

# Büyük Elektromanyetik Saçılım Problemlerinin Moment Metodu Çözümlerinde Dalgacık Dönüşümünün Kullanılması

M. Bahattin KURT, Metin DEMİRTAŞ  
Dicle Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi,  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, DIYARBAKIR

## ÖZET

Geleneksel Moment Metodu, elektromanyetik saçılım problemlerinin sayısal çözümlerinde karşılaşılan integral denklemlerine doğrudan uygulandığı zaman matris denklemleri her zaman yoğun olmaktadır. Özellikle saçıcının elektriksel boyutları büyüdüğünde, bu matris denklemlerinin çözümü, yüksek hesap zamanı ve çok fazla bellek gereksiniminden dolayı süper bilgisayarlarla bile çok fazla zaman almakta ve hatta imkansız hale gelmektedir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek amacıyla, araştırmacılar son zamanlarda, bu yoğun matris denklemlerini, etkin seyrek çözücülerle kolaylıkla çözülen seyrek matrisler haline dönüştürmek için, dalgacıkları sıkça kullanmaya başlamışlardır. Bu çalışmanın amacı şimdiye kadar bu alanda yapılan etkili çalışmalarını bir araya getirerek integral denklemlerin etkili dalgacık çözümüne yönelik yeni bir strateji geliştirmektir. Yöntemin geçerliliğini göstermek için yapılan sayısal deneylerin matris seyrekliği ve akımdaki bağıl hata cinsinden sonuçları sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Moment Metodu, İntegral Denklemler, Dalgacık Dönüşümü, Matris Seyrekliği

## Using Wavelet Transforms in the Method of Moment Solutions of Large Electromagnetic Scattering Problems

### ABSTRACT

Conventional method of moments, when directly applied to integral equations arising in numerical solution of electromagnetic scattering problems, leads to a dense (fully populated) matrix which often becomes computationally unmanageable even for supercomputers, especially when the electrical size of the scatterer becomes large. To overcome this difficulty, recently, researchers have frequently used wavelets which leads to a sparse matrix that can be solved easily by an efficient sparse solver. Using wavelets in solving EM integral equations has been widely studied. The purpose of this study is to develop a strategy for efficient wavelet solution of integral equations by connecting and using efficient studies have been done in this area. Results in terms of matrix sparsity and relative error in reconstructed current, which obtained from numerical experiments are provided to illustrate the validity of the proposed approach.

**Keywords:** Method of Moment, Integral Equations, Wavelet Transform, Matrix Sparsity

### 1. GİRİŞ

Elektromanyetik saçılım problemlerinin integral denklemlerle çözümlerinde sık sık

$$\int_a^b f(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')d\vec{r}' = g(\vec{r}) \quad (1)$$

biçiminde integral denklemlerle karşılaşılır. Burada  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , integral denklemin çekirdeği(kernel) ya da Green fonksiyonu,  $f(\vec{r}')$  bilinmeyen fonksiyon ve  $g(\vec{r})$  uyartım fonksiyonu olarak bilinir. Genelde (1) bağıntısının analitik çözümü yoktur ve sayısal çözümü için moment metodu(1) kullanılır. Moment metodu,

temelde göz önündeki geometriyi bölmelendirme işlemi olan ve sonuçta integral denklemlerini matris denklemler haline getiren bir yöntemdir. İntegral denklemlere geleneksel moment metodu doğrudan uygulandığı zaman matris denklemleri her zaman yoğun olmaktadır. Yoğun bir matris denkleminin doğrudan çözümü  $O(N^3)$  işlem ve  $O(N^2)$  bellek alanı, iteratif çözümü ise her iterasyon için  $O(N^2)$  işlem ve  $O(N^2)$  bellek alanı gerektirmektedir(2). Burada N, bölmelendirilmiş integral denklemlerindeki bilinmeyen sayıdır. Bu yüzden, özellikle saçıcının elektriksel boyutları büyüdüğünde, bu matris denklemlerinin çözümü, yüksek hesap zamanı ve çok fazla bellek gereksinimi yüzünden, günümüz bilgisayarlarıyla bile çok fazla zaman almakta ve hatta imkansız hale gelebil-

mektedir. Bu zorluklardan dolayı moment metodunun uygulama alanları uzun yıllar boyunca küçük problemlerle sınırlı kalmış ve yapılan çalışmalar, saçılım problemlerine moment metodunun uygulanması neticesinde elde edilen empedans matrisinin oluşturulması, saklanması ve matris denkleminin çözülmesi için gerekli bellek ve zamanı indirgemek üzerine yoğunlaştırılmıştır.

Araştırmacılar bu zorluğun üstesinden gelmek için son yıllarda, integral denklemlerinin moment metoduyla çözümünden elde edilen matris denklemlerini oldukça seyrek (elemanlarının çoğu sıfır olan) hale getiren dalgacık ( wavelet ) fonksiyonlarını moment metodunda taban ve test fonksiyonu olarak yaygın şekilde kullanmaya başlamışlardır(3-6). Seyrek matris denklemler ise etkili seyrek çözümler kullanılarak çok daha çabuk bir sürede,  $O(N \log N)$  işlemle çözülebilmektedirler(2).

Dalgacık fonksiyonları matematikçiler tarafından integral denklemlerin çözümünde 1990'ların başında kullanılmaya başlanmıştır(5). Dalgacıkların hiyerarşik (çok çözünürlüklü ) tabiatları, değişik çözünürlüklerdeki dalgacıkların birbirleriyle ilişkilendirilebilmesini ve bu da çoklu ızgara (multigrid) tür yöntemler için uygun aday olmalarını sağlamıştır. Diğer taraftan integral denklemlere geleneksel moment metodu uygulanması ile elde edilen yoğun matris yapısı, dalgacıkların en önemli özelliklerinden birisi olan "veri sıkıştırma ve indirgeme" kabiliyetleri sayesinde seyrek matrisler haline getirilir. Bu sebeplerden dolayı son on yıl içerisinde dalgacık tekniklerinin elektromanyetik saçılım problemlerinin sayısal çözümünde kullanılması çok hızlı bir artış göstermiştir.

Dalgacıklar, elektromanyetik saçılım problemlerinin çözümünde genel olarak iki şekilde kullanılmaktadır. Birinci yöntemde (1) bağıntısındaki bilinmeyen  $f$  işlevi (saçılım problemlerinde  $J$  akımı), ağırlıklandırma işlevleri kullanılmadan önce farklı ölçeklerdeki dalgacıkların bir bileşkesi olarak ifade edilir. Yani taban işlevleri olarak dalgacık fonksiyonları kullanılır ve daha sonra moment metodu uygulanır. Bu uygulama sonucunda elde edilen empedans matrisindeki çoğu elemanlar ihmal edilebilecek bir değer aldıklarından, uygun bir eşikleme (thresholding ) yapılarak seyrek matris elde edilir ( (5), (7) ). Hızlı Dalgacık Dönüşümü olarak bilinen ikinci yöntemde ise bilinmeyen fonksiyon, darbe, üçgen vb. gibi geleneksel taban işlevleri kullanılarak genişletildikten sonra moment metodu uygulanır ve yoğun matris denklemleri elde edilir. Daha sonra ayrık dalgacık dönüşüm teknikleri ile bu matris denklemleri seyrek hale getirilir ( (4),(6),(8) ). Her iki yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen matris denkleminin seyreklik derecesinin aynı olmasına rağmen ikinci yöntemde dalgacıkların taban işlevi olarak kullanılmaması, sayısal çözüm sürecinde zaman alan birçok sayısal integrasyondan kaçınılmasını ve bu da çözümün önemli bir ölçüde hızlanmasını sağlar. Ayrıca ikinci yöntemde dalgacıkların probleme hızlı bir

şekilde uygulanabilir olması daha fazla seyreklik için değişik dalgacık türlerinin denenmesinde büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada dalgacık dönüşümü ikinci yöntem kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

## 2. FORMÜLASYON VE ÇÖZÜM

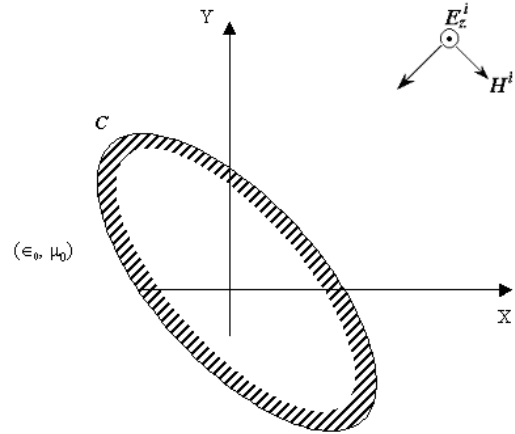
### 2.1 Problemin Formülasyonu

2 boyutlu genel bir saçılım problemi Şekil-1'de gösterilmiştir. Bu şekilde gösterilen saçıcıya çarpan TM dalgası saçıcı yüzeyinde bir  $\vec{J} = J_z \hat{z}$  akımı indükler.

Daha sonra bu indüklenen akım  $E_z^s$  ile gösterilen bir elektrik alan üretir. Yüzeyde indüklenen akımı bulmak için, mükemmel bir iletken yüzeyindeki aşağıdaki sınır koşulundan problemin integral denklem formülasyonu yapılır. Kontur yüzeyindeki sınır koşulu :

$$E_z = E_z^i + E_z^s(J_z) = 0 \quad (C \text{ üzerinde}) \quad (2)$$

şeklinde ve sonuçta problem (3) bağıntısındaki integral denklemle ifade edilir:



Şekil 1. Mükemmel iletken bir saçıcıya bir TM dalgasının çarpması ve  $C$  çevresi boyunca bir akımın indüklenmesi

$$-\frac{k_0 \eta_0}{4} \int_{s' \in C} J_z(s') H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) ds' = E_z^i(\vec{r}) \quad (3)$$

(3)'te tek bilinmeyen  $J_z$  akımıdır. Bu bağıntıyla saçıcı yüzeyinde indüklenen  $J_z$  akımıyla gelen dalga  $E_z^i(\vec{r})$  bir integral operatörü üzerinden ilişkilendirilmiştir. Bu noktada (3) bağıntısına moment metodu uygulanırsa

$$[Z] \vec{I} = \vec{V} \quad (4)$$

biçiminde bir matris denklem elde edilir. Bu matris denklemindeki  $[Z]$  matrisi empedans matrisi olarak bilinir ve bu matrisin elemanları,

$$Z_{ij} = \frac{k_0 \eta_0}{4} \int_{s_1 \in R_i} \int_{s_2 \in R_j} H_0^{(2)}(k|\vec{r}(s_1) - \vec{r}'(s_2)|) ds_1 ds_2 \quad (5)$$

olarak hesaplanır. Uyarım vektörü  $\vec{V}$  ise,

$$V_i = E_z^i(\vec{r}(s_i)) \quad (6)$$

biçiminde oluşturulur.

## 2.2 Dalgacıkların Kullanılması

Bu çalışmada kullanılan dalgacık dönüşümü (9) ve (10)'de yapıldığı gibi, tamamıyla ayrık süzgeç mantığıyla gerçekleştirilmiştir. Buna göre bir işaretin ayrık dalgacık dönüşümünü almakla, bu işareti kullanılacak dalgacık türüne göre seçilen alçak ve yüksek geçiren süzgeç gruplarından geçirmek aynı sonucu vermektedir. (10)'de ayrık dalgacık dönüşümünün gerçekleştirilmesinde gerekli olan şeyin, yalnızca kullanılacak dalgacık türüne göre süzgeç katsayılarının belirlenmesi ve buna göre dönüşüm matrisinin oluşturulup işarete uygulanması olduğu belirtilmektedir. Bu çalışmada da aynı yöntem takip edilmiştir. Bu yöntemde dönüşümün alınmasında önemli kısım dalgacık dönüşüm matrisi  $W$ 'nin oluşturulması sürecidir ve bu süreç bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılacaktır.

### 2.2.1 Büyük Matris Denklemlerinin Çözümü

Dalgacık uygulamalarının en ilginç ve umut vadeden uygulamalarından birisi doğrusal cebirdir. Buradaki temel fikir, bir integral operatörünü (büyük bir matris) bir dijital görüntü olarak düşünmektir. Kabul edelim ki operatör iki boyutlu dalgacık dönüşümü altında iyice sıkıştırılabilir olsun, yani dönüşüm sonunda operatörün dalgacık katsayılarının büyük bir kısmı ihmal edilebilecek kadar küçülsün. O zaman böyle bir operatöre sahip herhangi doğrusal bir sistem, dalgacık tabanında seyrek hale gelir. Başka bir ifadeyle,

$$Ax = b \quad (7)$$

biçimindeki matris denklemini çözmek için önce  $A$  operatörünün ve  $b$ 'nin dalgacık dönüşümünü alırız.  $W$ , bir boyutlu dalgacık dönüşüm matrisi olmak üzere (nasıl oluşturulduğu 2.2.2'de anlatılacaktır),  $A$  matrisinin ve  $b$  vektörünün dalgacık dönüşümleri (8)'deki gibi hesaplanır:

$$\tilde{A} = W \cdot A \cdot W^T, \quad \tilde{b} = W \cdot b \quad (8)$$

Bu bağıntıdaki  $T$  üst simgesi transpozeyi temsil etmektedir. (8)'deki  $\tilde{A}$  matrisinin çoğu elemanları, ihmal edilebilecek kadar küçüktür ve bu elemanlar sıfır yapılarak matrisin seyrekliği sağlanır. Daha sonra seyrek haldeki

$$\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b} \quad (9)$$

matris denklemi seyrek çözümlerle çözülür ve aşağıdaki biçimde ters dalgacık dönüşümü alınarak:

$$x = W^T \cdot \tilde{x} \quad (10)$$

denklemin çözümü gerçekleştirilmiş olur.

### 2.2.2 $W$ nin oluşturulması

Ayrık dalgacık dönüşümünde, dalgacık işlevlerinin yanında, ana dalgacığa uygulanan aynı genişleme ve ötelemelerin, ölçekleme işlevine de uygulanmasından ortaya çıkan bir işlevler kümesi vardır.  $\psi(\cdot)$ , ana dalgacık işlevi ve  $\phi(\cdot)$ , ölçekleme işlevi olmak üzere iki ölçek ilişkisi (two-scale relation) adı verilen bu işlevler kümesi:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N_m-1} g_n \phi(2x-n) \\ \phi(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N_m-1} h_n \phi(2x-n) \\ g_n &= (-1)^{1-n} h_{1-n} \end{aligned} \quad (11)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. Burada  $\{h_n\}$  dizisi,  $\phi(\cdot)$  ölçekleme işlevi için süzgeç dizisi ve  $\{g_n\}$  dizisi,  $\psi(\cdot)$  dalgacık işlevi için süzgeç dizisini oluşturmaktadır.  $N_m$  kaybolma momenti sayısını göstermektedir. Dalgacıklar bağlı oldukları dalgacık ailesi içerisinde sahip oldukları kaybolma momenti sayılarına göre sınıflandırılırlar. Kaybolma momenti tamamen o dalgacık türünün sahip olduğu katsayı miktarıyla ilgili matematiksel bir ilişkidir ve aslında dalgacığın yaklaşım derecesini gösteren, dalgacıkların en önemli özelliklerindedir. Bir fonksiyonun dalgacık olabilmesi için en az bir kaybolma momenti olmalıdır. Bu en basit dalgacık türü Haar dalgacığdır ve genellikle eğitim amaçlı kullanılır. İyi bir yaklaşım ve veri sıkıştırması için,  $\{g_n\}$  süzgeç dizisinin kaybolma momenti sayısının iyi seçilmesi gerekmektedir(8). Burada  $N_m$  ile  $\{g_n\}$  arasında,

$$\sum_{n=1}^{2N_m+1} n^j g_n = 0 \quad j = 0, \dots, N_m - 1 \quad (12)$$

bağıntısı vardır.  $N_m$  sayısının büyük olması matris seyrekliğini azaltmakta fakat sonucun doğruluk derecesini arttırmaktadır. Diğer taraftan, büyük  $N_m$  değeri daha yoğun bir  $W$  dönüşüm matrisini doğurmakta ve bu da hesaplama maliyetini arttırmaktadır. Bu nedenle, hızlı ve doğru bir çözüm için  $N_m$  değerinin optimum bir şekilde seçilmesi gerekmektedir(11).

Bu bağıntı ve parametrelerin ışığında büyüklüğü  $N = 2^n$  olan  $s^0$  işareti(vektörü) için  $N \times N$ 'lik  $W_n$  matrisi :

$$W_n = \begin{bmatrix} H_n \\ G_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

biçiminde oluşturulur. Burada  $H_n$  ve  $G_n$  dereceleri  $2^{N-1} \times 2^N$  olan matrislerdir ve sırasıyla alçak geçiren ve yüksek geçiren süzgeçlerdir. Örnek olarak  $N_m = 2$  için bu matrisler,

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \\ h_3 & h_4 & \dots & & & h_1 & h_2 & \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$G_n = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \\ g_3 & g_4 & \dots & & & g_1 & g_2 & \end{bmatrix} \quad (15)$$

şeklinde oluşturulur.  $W_n s^0$  çarpımı  $s^0$  vektörünü,  $s^1$  yaklaşım ( approximation ) ve  $d^1$  ayrıntı ( detail ) parçalarına ayırır. Bu işlem  $s^0$  vektörüne alçak ve yüksek geçiren süzgeç uygulayıp,  $s^0$  vektörünü alçak frekans ve yüksek frekans bileşenlerine ayırmakla aynı anlama gelmektedir. Bu ayrıştırma süreci arka arkaya yaklaşım verisi  $s^j$  ye tekrar uygulanır ve bu işleme, düzey endeksi  $j$ ,

$$j=1, \dots, k \leq n - \log_2 2N_m + 1 \quad (16)$$

bağıntısındaki  $k$  değerini alıncaya kadar devam edilirse sonuçta  $s^0$  vektörünün ayrık dalgacık dönüşümü alınmış olur. Matris gösterimi ile bu:

$$W_n s^0 = W_{n-k} \cdot W_{n-1} W_n s^0 = (s^k, d^k, \dots, d^l) \quad (17)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $W_{n-j}$  blok diyagonal matristir ve

$$W_{n-j} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_n \\ G_n \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_{N-N/2^j} \end{bmatrix} \quad (18)$$

biçimindedir.  $I_{N-N/2^j}$ , rankı  $N-N/2^j$  olan birim matristir.

Bundan başka  $W$  dalgacık dönüşüm matrisinin herhangi bir matrise uygulanabilmesi için matrisin kare matris ve boyutunun  $2$ 'nin tam kuvveti olması gerekir.  $2$ 'nin tam kuvveti olmayan kare matrislerde dönüşümün uygulanabilmesi için, (19)'da gösterildiği gibi sıfır ve birim matrisler eklemek suretiyle, matris boyutunun

$2$ 'nin tam kuvvetleri olan bir kare matris haline getirilmesi gerekir (10).

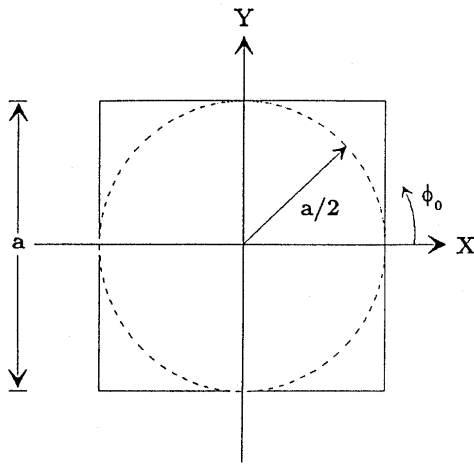
$$\begin{pmatrix} Z_{P \times P} & 0 \\ 0 & I_{Q \times Q} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$W$  matrisinin oluşturulması aşamasında (6), (8), (10) ve (11)'de belirtilen seyreklik, doğruluk derecesi ve işlem zamanı açısından en uygun (optimum) dalgacık Daubechies(12) dalgacığı ve optimum kaybolan moment sayısı  $N_m = 8$  alınmıştır. Bundan başka seçilen dalgacık türünün Daubechies olmasının başka bir nedeni matrislerin kondüsyon sayılarıdır. Kondüsyon sayıları iteratif seyrek çözümlerde çözüm zamanını belirleyen önemli bir faktördür. Daubechies türü ortogonal taban işlevleriyle yapılan dönüşümlerde matrislerin kondüsyon sayıları dönüşümden sonra da korunur. (13) yayınında dalgacık dönüşümünde taban işlevleri olarak Daubechies dalgacıkları kullanmanın matrisin kondüsyon sayısını değiştirmedığı, fakat taban işlevi olarak nonortogonal cardinal-spline gibi işlevler alındığında seyrekliğin daha fazla olmasına rağmen dönüşümden sonra matrisin kondüsyon sayısının orijinalinden çok daha büyük bir değere ulaştığı rapor edilmiştir. Bu nedenle bu çalışmada, matris dönüşümlerinde yüksek seyreklik sağlamakla birlikte, dönüşümden sonra matrisin kondüsyon sayısını değiştirmemeleri, Daubechies dalgacık türünün bir başka tercih edilme sebebidir.

### 3. SAYISAL DENEYLER

Bu çalışmada, Şekil-2'de gösterilen dairesel ve kare ara kesite sahip sonsuz uzunluktaki mükemmel iletken iki silindirik saçıcıya bir TM dalgasının çarpması formüle edilmiş ve darbe taban ve delta test fonksiyonları uygulanmak suretiyle moment metodu uygulanarak matris denklemleri elde edilmiştir. Bu konturlar üzerinde indüklenen akımın doğru olarak elde edilebilmesi için daire ara kesitli saçıcıda dalga boyu başına en az 10 örnek ( darbe ) ve kare ara kesitli saçıcı için ise en az 20 örnek alınması gerekmiştir. Daha fazla örnek alınması akım şeklini daha düzgün yapmakta fakat bu, bilinmeyen sayısını arttırdığından işlem süresini de arttırmaktadır. Bundan başka örnek sayısının daha fazla alınması bir bakıma Nyquist oranının üzerinde örnek almak demek olduğundan, seyreklik ölçümleri için yanıltıcı olabilmektedir.

Deneyde, boyutları, gelen EM dalganın dalga boyuna göre oldukça büyük olan kare ve daire konturlara moment metodunun uygulanmasıyla  $N=64$ 'ten  $N=2048$ 'e kadar  $2$ 'nin tam kuvvetleri olarak artan her bir  $N$  değeri için ilgili matris denklemleri elde edilmiştir.



Şekil 2. Yapılan sayısal deneyde incelenen ve çevre uzunlukları  $3.2 \lambda$  ile  $204.8 \lambda$  arasında değişen daire ve kare konturlar

Bundan sonra Bölüm 2.2.1'de izah edilen hızlı dalgacık dönüşümü bu empedans matrislerine uygulanmış, elde edilen matris seyreklikleri ve bu yöntemle elde edilen akımın değişik eşik değerleri için maruz kaldığı hata oranları grafiksel olarak sunulmuştur.

### 3.1 Seyreklik İncelemesi

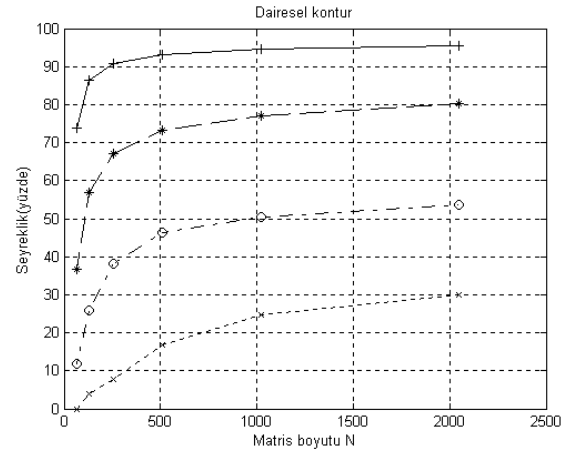
Moment metodunda integral denklemlerinin (4) bağıntısındaki gibi matris denklemlerine dönüştürüldüğü izah edilmişti. Bu elde edilen matris denklemlerindeki  $N \times N$ 'lik  $Z$  empedans matrislerine hızlı dalgacık dönüşümü uygulanmasıyla, dönüşümden sonra matris elemanlarının çoğu en büyük matris elemanına kıyasla çok küçük bir değer aldığından, uygun bir eşik değeri  $\tau (0 < \tau < 1)$  ile empedans matrisinin en büyük elemanının çarpımından küçük olan matris elemanları ( $Z_{ij} < \tau \times Z_{ij \max}$ ) sıfır yapılarak matris seyrekliği (veya matris sıkıştırması) sağlanmış olur. Eşik değerleri genel olarak  $\tau = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$  şeklinde alınmıştır. Buna göre daire arakesitli saçıcı için Şekil-3 ve kare arakesitli saçıcı için Şekil-4'te matris boyutu  $N$ 'nin artırılmasıyla seyrekliğin nasıl değiştiği gösterilmiştir. Burada sözü edilen yüzde matris seyrekliğini hesaplamak için kullanılan bağıntı:

$$S = \frac{N_0 - N_\tau}{N_0} \times 100 \quad (20)$$

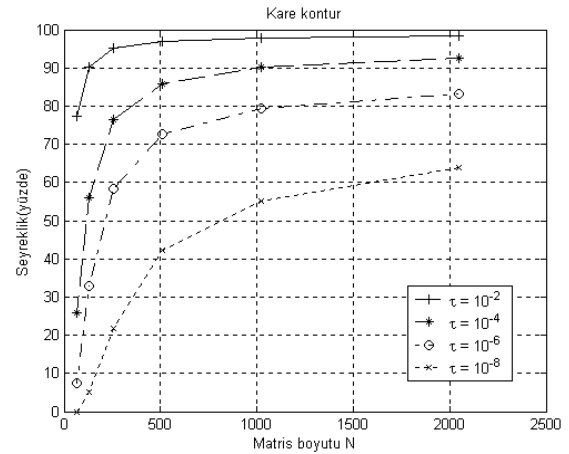
biçimindedir. Bu bağıntıda  $N_0 = N^2$  ve  $N$  matris boyutudur.  $N_\tau$  ise eşikleme işleminden sonra matrisede kalan sıfırdan farklı eleman sayısıdır.

Bu grafiklerden, matris boyutu arttıkça düşük eşik değerlerine rağmen matris seyrekliğinin %90'lar seviyesine çıktığı anlaşılmaktadır. Bundan başka kare konturun empedans matrisinin daire konturuna göre dönüşüm ve eşikleme işleminden sonra aynı  $N$  değeri

için daha yüksek seyreklik yüzdesine sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 3. Dairesel kontur için matris boyutu  $N$  ve farklı eşik değerlerine göre empedans matrisi seyrekliğinin yüzde olarak değişimi



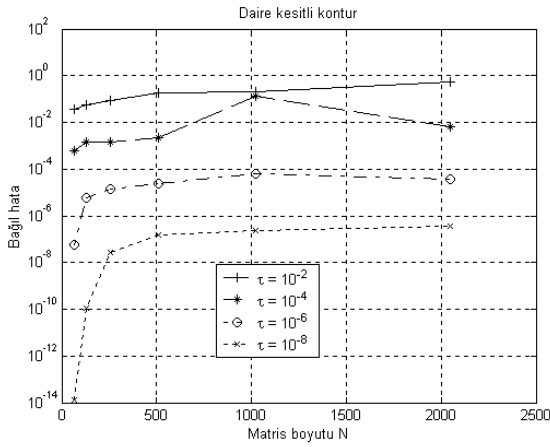
Şekil 4. Kare kontur için matris boyutu  $N$  ve farklı eşik değerlerine göre empedans matrisi seyrekliğinin yüzde olarak değişimi

### 3.2 Hata İncelemesi

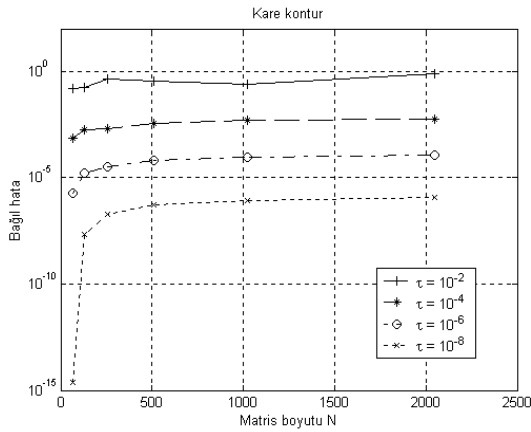
Matris denkleminin dalgacık dönüşümünde herhangi bir bilgi kaybı olmamakla beraber matris seyrekliğinin (veya sıkıştırmasının) sağlanması için eşikleme işlemi yapılır. Yapılan bu eşikleme işlemi orijinal empedans matrisinde bilgi kaybına yol açtığından, akım bilinmeyeninin dönüşüm ve eşik işlemine tabi tutulmuş matris denkleminde eldesi ancak belli bir hata yüzdesi ile mümkün olur. Bu nedenle hata tespiti için, orijinal matris denkleminde elde edilen akımla, dalgacık yöntemi ve eşik işlemlerinden geçirilmiş matris denkleminde elde edilen akım, (21)'deki bağıl hata bağıntısı kullanılarak karşılaştırılmıştır.

$$\text{bağıl hata} = \frac{\|\vec{I} - \vec{I}_w\|}{\|\vec{I}\|} \quad (21)$$

Bu bağlamda  $\vec{I}$  geleneksel yolla elde edilen akım vektörünü ve  $\vec{I}_w$ , dalgacık tekniği ve eşik işlemlerinden sonra elde edilen akım vektörünü,  $\|\cdot\|$  ise  $L^2$  normu göstermektedir. Buna göre daire ve kare konturlar için elde edilen sonuçlar Şekil-5 ve Şekil-6'da gösterilmiştir. Bu şekillerde farklı N değerlerindeki hataların aynı grafik üzerinde gözlemlenebilmesi için dikey eksen logaritmik olarak alınmıştır. Elde edilen bu sonuçlardan akımdaki matris boyutunun büyümesine ve eşik değerlerinin küçülmesine rağmen hata miktarının sabit kaldığı gözlenmiştir.



Şekil 5. Daire kontur için farklı eşik değerlerine göre elde edilen akım fonksiyonunun matris boyutu N'ye göre bağıl hata değişimleri



Şekil 6. Kare kontur için farklı eşik değerlerine göre elde edilen akım fonksiyonunun matris boyutu N'ye göre bağıl hata değişimleri

#### 4. SONUÇLAR

Seyrek matris denklemleri eşlenik-gradyent (Conjugate-Gradient) gibi etkili seyrek çözümler kullanılarak çok daha çabuk çözülebildiğinden, bu tür büyük saçıcı problemleriyle ilgili yapılan tüm çalışmalarda temel nokta empedans matrislerindeki seyreklik derecesini arttırmak üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu nedenle literatürde yapılan bu tür çalışmalarda elde edilen seyrek-

lik derecesi, problemin çözümü için gereken cpu zamanı ve bellek miktarı için bir ölçüt olmaktadır.

Bu çalışmada da, büyük saçıcı analizleri için hızlı dalgacık dönüşümü ve moment metodunu kullanan etkili matlab programları hazırlanmış ve hazırlanan bu programlar kullanılarak iki farklı geometri saçıcının analizi yapılmıştır. Sonuç olarak her iki tür saçıcı için de, elde edilen akım değerlerindeki düşük hata değerleriyle empedans matrislerinin çok yüksek seyreklik değerlerine ulaştığı gözlenmiştir.

#### 5. KAYNAKLAR

- Harrington, R.F., "Field computation by moment methods", Mcmillan, New York, 1968. (Reprinted by IEEE Press, 1993)
- Chew, W.C., Jiw, J.M., Lu, C.C., Michielssen, E., and Song, J.M., "Fast solution method in Electromagnetics", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 45, no. 3, March 1997, pp. 533-543.
- Beylkin, G., Coifman, R., and Rokhlin, V., "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I", Communicat. Pure Appl. Math., vol. XLIV, 1991, pp. 141-183.
- Kim, H. and Ling, H., "On the application of fast wavelet transforms to integral equation solution of electromagnetic scattering problems", Microwave Opt. Technol. Letter, vol. 6, no. 3, 1993, pp. 168-173.
- Steinberg, B.Z. and Leviatan, Y., "On the use of wavelet expansions in the method of moments", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 41, no. 5, 1993, pp. 610-619.
- Wagner, R.L. and Chew, W.C., "A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 43, no. 8, 1995, pp. 802-810.
- Wang, C.F., "A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis of electromagnetic scattering from conducting objects", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 43, February 1995, pp. 170-178.
- Xiang, Z.G. and Lu, Y.L., "An effective wavelet matrix transform approach for efficient solutions of electromagnetic integral equations", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 45, August 1997, pp. 1205-1213.
- Strang, G. and Nguyen, T., "Wavelets and filter banks", Cambridge Press, 1996.
- Sarkar, T.K., Su, C., and et al., "A Tutorial on Wavelets from an Electrical Engineering Perspective, Part I: Discrete Wavelet Techniques", IEEE Trans. on Antennas and Propagation Mag., vol. 40, no. 5, October 1998, pp. 49-69.
- Guan, N., Yashiro, K., and Ohkawa, S., "Wavelet matrix transform approach for electromagnetic scattering from an array of metal strips", IEICE Trans. on Electron, vol. E82-C, no. 7, July 1999, pp. 1273-1279.
- Daubechies I., "Ten Lectures on wavelets", Philadelphia, SIAM Publications, 1992.

13. Guan, N. and Yashiro, K., "On a choice of wavelet basis in the wavelet transform approach", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 48, August 2000 pp. 1186-1190.
14. M.B.Kurt, "Dalgacık Dönüşümünün 3 boyutlu EM Saçılım Problemlerinde Kullanılması", Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2002.