

# Eliptik Düz Dişli Çifti ile Tahrik Edilen Çubuk Mekanizmaların Dinamik Analizi

**Mehmet YAZAR, Ahmet ÖZDEMİR**

Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Eğitimi Anabilim Dalı  
06500 Teknikokullar, ANKARA

Geliş/Received : 28.04.2011, Kabul/Accepted : 17.05.2011

## ÖZET

Dairesel olmayan dişli çarkların önemli bir üyesi olan eliptik düz dişli çifti ve silindirik düz dişli çifti ile tahrik edilen mekanizmaların dinamik davranışlarının karşılaştırmalı analizi gerçekleştirilmiştir. Mekanizmalarda sürtünmeler ve kütleler ihmal edilmiş, konum, hız ve ivme eşitlikleri kompleks sayılar kullanılarak türetilmiştir. Eşitliklerin Excel ortamında çözülmesiyle elde edilen grafiklerden, eliptik dişli çifti ile tahrik edilen ve incelenen mekanizmalarda çizgisel ve açısal ivme değişimlerinde önemli farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Eliptik dişli çifti ile tahrik edilen mekanizmalarda  $\Delta_{ivme} = \left| \Delta_{ivm_{max}} - \Delta_{ivme_{min}} \right|$  değerinin küçük olması dolayısıyla, bu dişlilerin hareketli sistemlerde atalet kuvvetlerini dengeleyici bir özellik barındırdığı ve eliptik dişli çarkların, tam durmayı gerektirmeksizin düzensiz hareketin elde edilebileceği bir makine elemanı olarak kullanılabilceği ortaya konulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Eliptik Düz Dişli, Mekanizmalar, Dinamik Analiz

## Dynamic Analysis of Bar Mechanisms Activated By A Couple of Elliptical Spur Gears

### ABSTRACT

In this study a comparative analysis of dynamic behaviours of mechanisms activated by a couple of spur gears and elliptical gears which are important members of non-circular gears carried out. Friction and mass in mechanisms were neglected and the equations of motion, velocity and acceleration was derived by using complex numbers. By solving the equations in Excel, it was observed that there were significant differences in linear and angular velocity and acceleration changes in the mechanisms activated by a couple of elliptical spur gears. It was put forward that elliptic gears have a capacity to balance inertia forces in motion systems since the  $\Delta_{ivme} = \left| \Delta_{ivm_{max}} - \Delta_{ivme_{min}} \right|$  values were small and that elliptical gears can be used as a component of power transportation system in which irregular movements can be obtained without ceasing.

**Key Words:** Elliptical Gears, Mechanisms, Dynamic Analysis

### 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Dairesel olmayan dişli çarkların ilk örneği Leonardo da Vinci tarafından 17. yy'da yapılmış, ilk pratik uygulamaları, saat mekanizmalarında, müzik aletlerinde, otomatik oyun cihazlarında yapılmıştır. Zamanla anahtar açma tezgâhlarında, Geneva mekanizmalarında ve pompa ve debi metre imalatında yaygın olarak kullanılmıştır [1, 2, 3].

Dairesel olmayan dişli çarklar, alışılmamış hareket veya hız özelliklerini [4] ve kamlara göre basit, güvenilir ve hassas çözümleri sağlaması dolayısıyla tercih edilmektedir [5, 6]. İmalat maliyetleri kamlara nazaran yüksek olan dairesel olmayan dişli çarklar, karmaşık üretim donanımı gerektirmekte [7], servo sistemlerle eliptik dişli çiftlerinden beklenen hareketler sağlanabilmekte, ancak pahalı donanımlarla hareketlerin sağlanması uzmanlık gerektirmektedir.

Dört çubuk, beş çubuk ve altı çubuk mekanizmalarında dairesel olmayan dişli çarkların kullanılabilir ve hareket analizlerinin yapıldığı çalışmalar bulunmaktadır [8]. Bölüm dairesinin elips şeklinde olduğu eliptik dişli çarklar, tam durmayı gerektirmeyen sinüsoidal hareket çıkışı sağlayan makine elemanı olarak rağbet görmüştür [9]. Diğer taraftan dairesel olmayan dişli çarklar üzerindeki araştırmalar temel matematiksel analizler, tasarım, imalat ve çeşitli endüstriyel uygulamalar olmak üzere değişiklikler göstermektedir [10-12]. Dairesel olmayan dişli çarkların farklı tiplerinin hepsine uygulanabilecek bazı genel tasarım kriterlerinin hazırlandığı çalışmalara da rastlanmıştır [13,14].

Çubuk mekanizmalar ile karşılaştırıldığında dairesel olmayan dişli çarklar daha dengeli çalışabilen veya kolayca dengelenebilen makine elemanları olarak tercih edildiği görülmektedir. Yüksek hızla çalışan donanımlarda dengeleme ve gürültü önemli bir problem olmakta ve eliptik dişliler bu donanımlar için çözüm sunabilmektedir [6].

\* Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

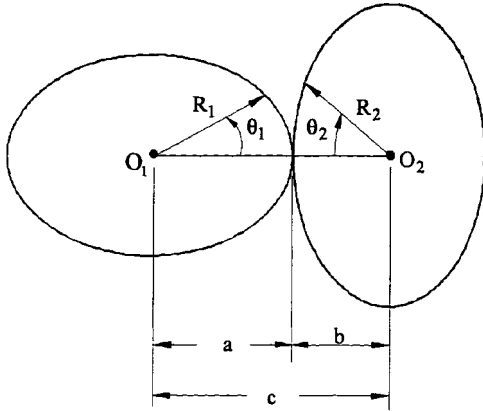
e-posta: ahmetoz@gazi.edu.tr

Digital Object Identifier (DOI) : 10.2339/2011.14.1, 1-8

Makinelerde ani ve büyük açısal konum değişiklikleri dikkatle ele alınmadığında, kısa süre içerisinde ciddi titreşim problemlerine yol açabilmektedir [15]. Bütünleşmiş mekanizma ve kontrol yaklaşımı araştırması, esneklik titreşimleri çizgisel olmayan mekanik elemanların mekanizmaya eklenmesiyle esnek uzay yapılarının dönme özelliklerini ayarlamaya dönük olarak uygulanabileceğini göstermektedir [16]. Mekanizma parametreleriyle kontrol kanunu arasındaki uyumlu tasarım anlamında optimizasyonun başarılı olduğu vurgulanmaktadır [6]. Bir çift dairesel olmayan dişli çark, düzlemsel oynar çift ışınlı yapıların dönme manevraları için değişen oranlarda aktarma sağlamak için tasarlanabilmektedir. Bu gibi dairesel olmayan dişli çark çiftleri bir çift sarmal silindirik karakterize edilebilmektedir [9].

Dairesel olmayan dişli çarklar makinelerin titreşim kaynaklı bağlantılarda olumsuzlukları yok etmek veya uzuvlardaki açısal hız değişimini azaltmak [17], endüstriyel makinelerde özel hareketler sağlamak [18] ve sürekli çalışma gerektiren makinelerde tekrarlamalı hız varyasyonları elde etmek için de tercih edilmektedir [16]. Sürekli Değişen İletim Sistemlerinde (CVT) gerek teorik [19] gerekse deneysel çalışmaların yanında bilgisayar ortamında oluşturulan matematiksel eşitliklerin [20] çözümleriyle gerçekleştirildiği görülmüştür [21].

## 2. ELİPTİK DÜZ DİŞLİ ÇİFTLERİNİN KONUM, HIZ VE İVME ANALİZİ (DISPLACEMENT, VELOCITY AND ACCELERATION ANALYSIS OF A PAIR OF ELLIPTICAL SPUR GEARS)



Şekil 1. İki özdeş elipsin temel geometrik özellikleri.

Şekil 1'de verilen notasyondan  $a=R_{max}$  ve  $b=R_{min}$  olarak kabul edilirse, eksenler arası mesafe,

$$c = a + b \text{ veya } e=R_{max}+R_{min} \quad (1)$$

olur. Her  $\theta_1$  konumu için yarı çap değişimi ise,

$$R_1 = \frac{2ab}{(a+b) - (a-b)2\cos 2\theta_1} \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)\cos 2\theta_1}{(a+b) - (a-b)2\cos 2\theta_1} \quad (3)$$

eşitlikleriyle ifade edilir. Döndürülen dişlinin açısal konumu,

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a \sin \theta_1}{b \cos \theta_1}\right) \quad (4)$$

olur.  $r = \frac{a}{b}$  oranı dikkate alınarak yazılırsa,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2r}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1)\cos 2\theta_1} \quad r = \frac{a}{b} \quad (5)$$

eşitliğinden açısal hız oranı elde edilir.

$$a_2 = \ddot{\theta}_2 = \frac{-4\omega_1^2 r(r^2 - 1)\sin 2\theta_1}{[(r^2 + 1) - (r^2 - 1)\cos 2\theta_1]^2} \quad (6)$$

eşitliği ile elde edilir.

Yukarıda hazırlanan eşitlikler silindirik düz dişli

çark çiftleri için  $\theta_2 = \theta_1$ ;  $w_2 = -w_1$  ve  $\alpha_2 = -\alpha_1$  formunda dikkate alınmıştır [1].

## 3. ELİPTİK VE SİLİNDİRİK DÜZ DİŞLİ ÇARK ÇİFTİ İLE TAHRİK EDİLEN DÖRT ÇUBUK MEKANİZMASININ KONUM, HIZ VE İVME ANALİZLERİ (DISPLACEMENT, VELOCITY AND ACCELERATION ANALYSIS OF A FOUR BAR MECHANISM DRIVEN BY ELLIPTICAL AND CYLINDRICAL SPUR GEAR COUPLES)

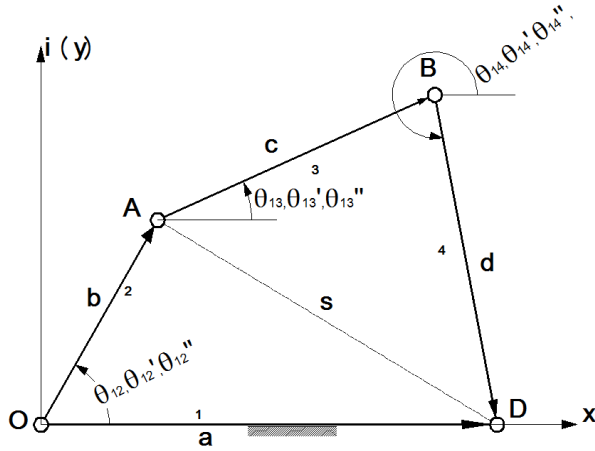
Çalışmanın ilk aşamasında; bu çalışmanın devamında yapılacak olan bilgisayar destekli hareket analizi ve deneysel hareket analizi için modülü 2, diş sayısı 32, elips büyük eksen mesafesinin yarısı  $a=38,85$  mm ve elips küçük eksen mesafesinin yarısı  $b=23,30$  mm olan bir takım eliptik düz dişli çiftinin tasarımı ve imalatı gerçekleştirilmiştir [21]. Tasarımı, imalatı ve çalışabilirlik ön deneyleri yapılan bu dişli çiftinin [21], mekanizmalarda tahrik amaçlı kullanılması düşünülmüş; çalışma kapsamında krank-biyel ve dört çubuk mekanizmalarının konum, hız ve ivme eşitliklerinin teorik alt yapısı hazırlanmış, eşitliklerin Excel ortamında çözümlenmesiyle analitik analiz sonuçları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Şekil 1'de verilen dört çubuk bağlantısında a, b, c ve d sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 uzuvlar olarak işaretlenir ve sabit uzuv 1 olarak düşünülürse,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$  ve  $\theta_{14}$  açıları sırasıyla 2, 3 ve 4 nolu uzuvların açısal konumu temsil etmektedir. Açısal konumların tayininde saat dönüş yönü pozitif olarak alınmıştır. Uzuvlar, kompleks ifade edilen vektörler biçiminde düşünülürse, kapalı devre konum denklemi ve eşleniği,

$$b.e^{i\theta_{12}} + c.e^{i\theta_{13}} + d.e^{i\theta_{14}} = a \quad (7)$$

$$b.e^{-i\theta_{12}} + c.e^{-i\theta_{13}} + d.e^{-i\theta_{14}} = a \quad (8)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliklerin literatürde yer alan çeşitli yöntemlerden [23-25] biriyle çözümlenmesinden,



Şekil 2. Dört çubuk mekanizması için notasyon

$$s = (a^2 + b^2 - 2.ab.\cos\theta_{12})^{1/2} \quad (9)$$

$$\theta_{13} = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + s^2 - d^2}{2.c.s}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{b}{s}\sin\theta_{12}\right) \quad (10)$$

$$\theta_{14} = 2.\pi - \left(\sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\sin\left(\cos^{-1}\frac{c^2 + s^2 - d^2}{2.c.s}\right)\right) + \sin^{-1}\left(\frac{b}{s}\sin\theta_{12}\right)\right) \quad (11)$$

$$\theta'_{14} = w_{14} = \frac{b.\sin(\theta_{12} - \theta_{13})}{d.\sin(\theta_{13} - \theta_{14})}.\omega_{12} \quad (15)$$

3 ve 4 nolu uzuvların açısal hızları elde edilir. Eş. 12 ve Eş. 13 üzerinde türev alma işlemi bir kez daha uygulanırsa,

$$i.b.e^{i\theta_{12}}[\theta''_{12} + i.\theta_{12}^2] + i.c.\theta_{13}[\theta''_{13} + i.\theta_{13}^2] + i.d.e^{i\theta_{14}}[\theta''_{14} + i.\theta_{14}^2] = 0 \quad (16)$$

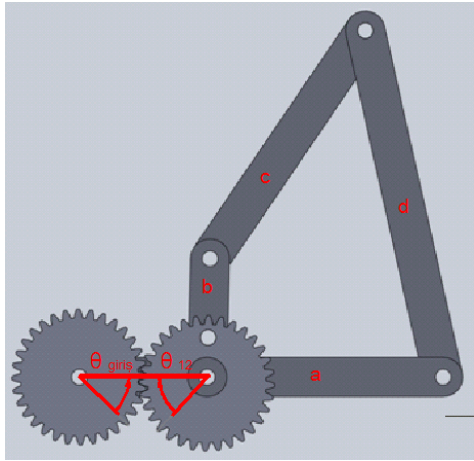
$$-i.b.e^{i\theta_{12}}[\theta''_{12} - i.\theta_{12}^2] - i.c.\theta_{13}[\theta''_{13} - i.\theta_{13}^2] - i.d.e^{i\theta_{14}}[\theta''_{14} - i.\theta_{14}^2] = 0 \quad (17)$$

şeklinde ivme denklemleri elde edilir. Bu eşitliklerin literatürde yazılan yöntemlerle çözülmesinde;

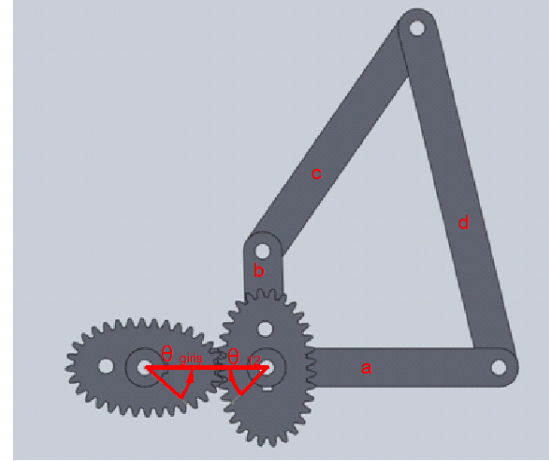
$$\theta''_{13} = \alpha_{13} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{12}}.\alpha_{12} - \frac{b.\omega_{12}^2.\cos(\theta_{12} - \theta_{14}) + c.\omega_{13}^2.\cos(\theta_{13} - \theta_{14}) + d.\omega_{14}^2}{c.\sin(\theta_{13} - \theta_{14})} \quad (18)$$

$$\theta''_{14} = \alpha_{14} = \frac{\omega_{14}}{\omega_{12}}.\alpha_{12} + \frac{b.\omega_{12}^2.\cos(\theta_{12} - \theta_{13}) + c.\omega_{13}^2 + d.\omega_{14}^2.\cos(\theta_{13} - \theta_{14})}{d.\sin(\theta_{13} - \theta_{14})} \quad (19)$$

Dört çubuk mekanizmasının silindirik dişli çifti ve eliptik düz dişli çifti ile tahrik edilerek Excel ortamında  $\theta_{12}$  açısına göre konum analiz gerçekleştirilmiştir. Analiz sonucu elde edilen ve  $\theta_{13}$  açısında meydana gelen konum değişikliğini gösteren grafik Şekil 4'de verilmiştir.  $\theta_{giris}$ ,  $\theta^0$  den  $360^0$  ye kadar,  $10^0$  adımlar halinde CCW (+) yönde değişime tabi tutulmuş, mekanizmayı, tahrik eden uzuv ve bu uzva



a)



b)

Şekil 3. a) Silindirik düz dişli çifti b) Eliptik düz dişli çifti tahrikli ( a=60 mm, b=30 mm, c=70 mm, d=90 mm)

3 ve 4 nolu uzuvların açısal konumları ( $\theta_{13}$  ve  $\theta_{14}$ ) aşağıdaki sıralı eşitliklerin çözümlerinden, elde edilir. Eş. 7 ve Eş. 8'den hız denklemleri,

$$i.b.\theta'_{12}.e^{i\theta_{13}} + i.c.\theta'_{13}.e^{i\theta_{13}} + i.d.\theta'_{14}.e^{i\theta_{14}} = 0 \quad (12)$$

$$-i.b.\theta'_{12}.e^{-i\theta_{13}} - i.c.\theta'_{13}.e^{-i\theta_{13}} + i.d.\theta'_{14}.e^{-i\theta_{14}} = 0 \quad (13)$$

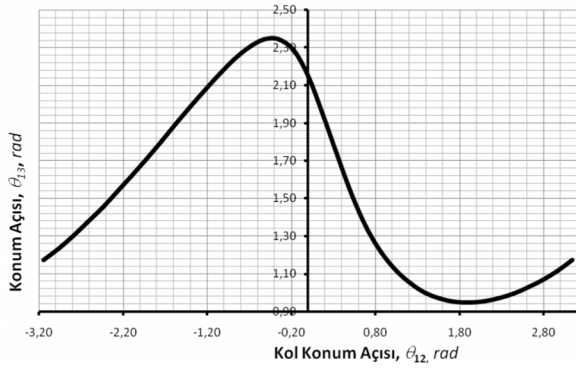
şeklinde türetilir ve literatürde yer alan yöntemlerden herhangi birisi ile çözümlenirse,

$$\theta'_{13} = w_{13} = -\frac{b.\sin(\theta_{12} - \theta_{14})}{c.\sin(\theta_{13} - \theta_{14})}.\omega_{12} \quad (14)$$

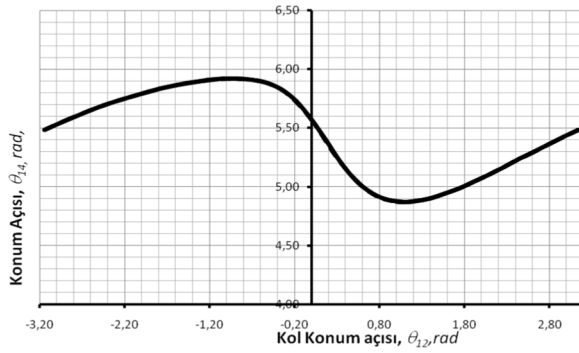
bağlı olan dişli konumu  $\theta_{12}$  olarak CW (-) yönü olarak dikkate alınmıştır.  $\theta_{12}$ 'nin başlangıcı olarak  $\theta(\text{sıfır})$  rad referans olmuştur.

Çalışma kapsamında elde edilen grafik çizimlerinde kesik çizgiler eliptik düz dişli çark, düz çizgi ise silindirik düz dişli ile elde edilen hareketleri göstermektedir.

Grafikler incelendiğinde, farklı dişli çiftiyle tahrik edilen her iki mekanizmada da konum değişiminin çakışık olduğu ve eliptik dişli tahrikli mekanizmadaki adım değişiminin dışında bir farklılık olmadığı görülmüştür. Bu çalışma beklenen bir durum olarak yorumlanmıştır.

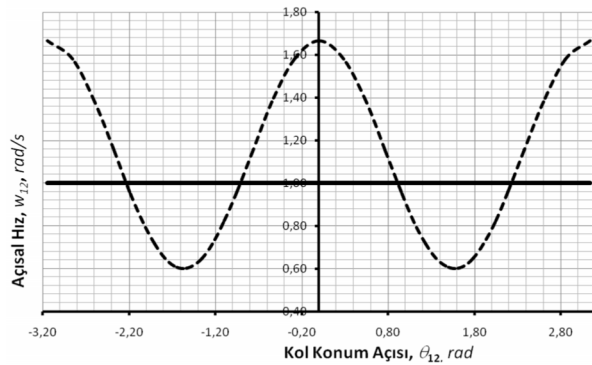


Şekil 4. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $\theta_{13}$  değişimi grafiği



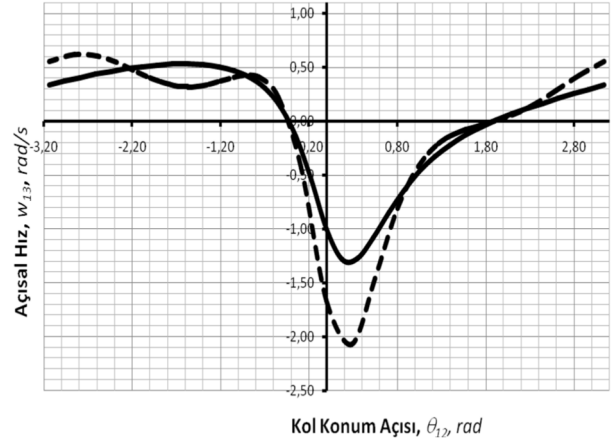
Şekil 5. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $\theta_{14}$  değişimi grafiği

Dört Çubuk mekanizmasında  $\theta_{12}$  açısına bağlı olarak  $w_{12}$  açısal hızında meydana gelen değişimleri gösteren grafik Şekil 6'da verilmiştir.



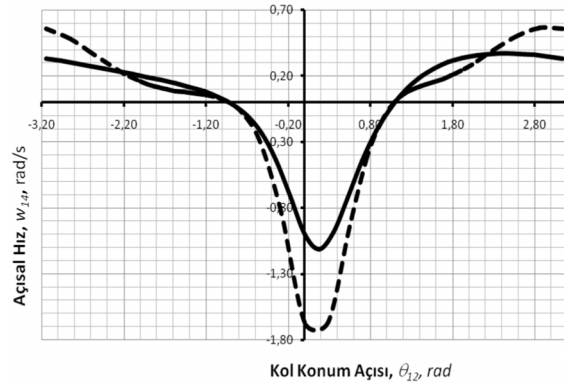
Şekil 6. Dört çubuk mekanizmasında  $\theta_{12}$ - $w_{12}$  değişimi grafiği

Mekanizmayı tahrik eden ilk dişlinin açısal hızının  $\theta_{12}=d \theta_{12} / dt = 1 \text{ s}^{-1}$  olması için  $\theta_{giriş}=1 \text{ s}^{-1}$  alınmıştır. Tasarlanan dört çubuk mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel programı (EK A) ile  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal hız analiz sonucu elde edilen ve  $w_{13}$  açısal hızında meydana gelen değişimi gösteren grafik Şekil 7'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında en büyük açısal hız  $w_{13mak} = 0,53114 \text{ rad/s}$  ve en küçük açısal hız ise  $w_{13min} = -1,28196 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında ise  $w_{13mak} = 0,62022 \text{ rad/s}$  ve  $w_{13min} = -2,06944 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli çifti ve eliptik dişli çifti ile tahrik edilen mekanizmada  $\Delta_{wdd} = 1,8131 \text{ rad/s}$  ve  $\Delta_{wed} = 2,68966 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir.



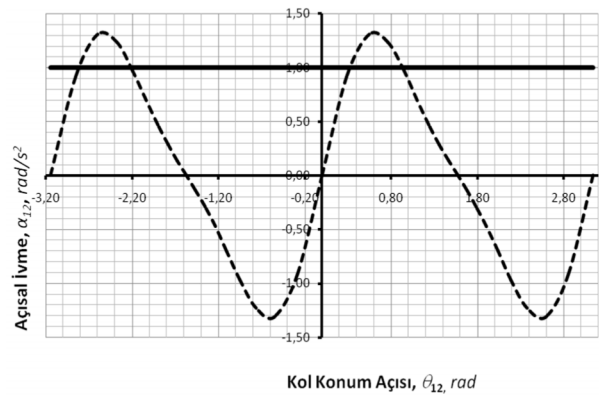
Şekil 7. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $w_{13}$  değişimi grafiği

Ayrıca açısal hız analiz sonucu elde edilen ve  $w_{14}$  açısal hızında meydana gelen değişimi gösteren grafik Şekil 8'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında en büyük açısal hız  $w_{14mak} = 0,37167 \text{ rad/s}$  ve en küçük açısal hız ise  $w_{14min} = -1,11289 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında ise  $w_{14mak} = 0,56422 \text{ rad/s}$  ve  $w_{14min} = -1,66738 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ile eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada sırasıyla  $\Delta_{wdd} = 1,48456 \text{ rad/s}$  ve  $\Delta_{wed} = 2,2316 \text{ rad/s}$  olarak elde edilmiştir.



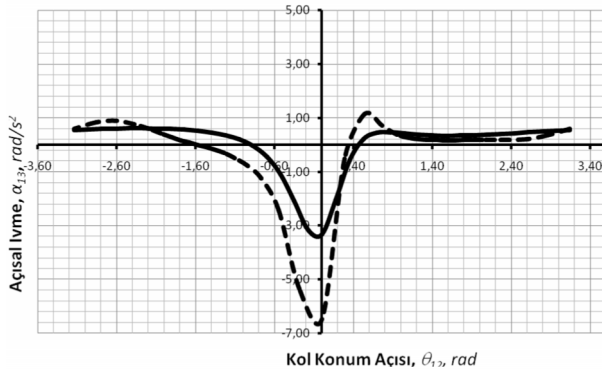
Şekil 8. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $w_{14}$  değişimi grafiği

Dört çubuk mekanizmasında  $\theta_{12}$  açısına bağlı olarak  $\alpha_{12}$  açısal ivmede meydana gelen değişimleri gösteren grafik Şekil 9'da verilmiştir.



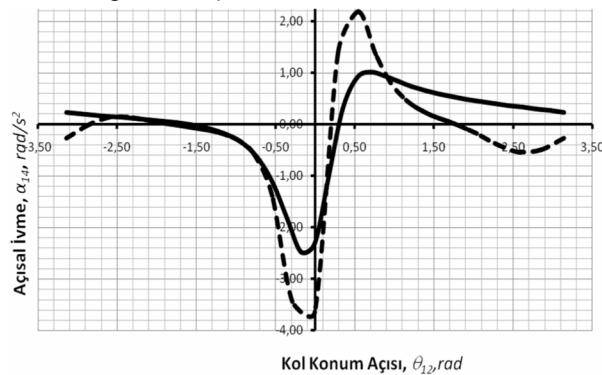
Şekil 9. Dört çubuk mekanizmasında  $\theta_{12}$ - $\alpha_{12}$  değişimi grafiği

Tasarlanan dört çubuk mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Exel programı ile  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal ivme analiz sonucu elde edilen ve açısal  $\alpha_{13}$  ivmesinde meydana gelen değişimi gösteren ivme grafiği şekil 10'da verilmiştir.  $\theta_2'' = d\theta_2'/dt = 0 \text{ rad/s}^2$  olarak alınan mekanizma tahrik dişlisinin ivmesi hesaplamalarda dikkate alınmıştır. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında en büyük açısal  $\alpha_{13\text{mak}} = 0,61069 \text{ rad/s}^2$  ve en küçük ise  $\alpha_{13\text{min}} = -3,33335 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında ise  $\alpha_{13\text{mak}} = 0,88979 \text{ rad/s}^2$  ve  $\alpha_{13\text{min}} = -6,4871 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada sırasıyla  $\Delta_{\text{add}} = 3,94404 \text{ rad/s}^2$  ve  $\Delta_{\text{aed}} = 7,37689 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir.



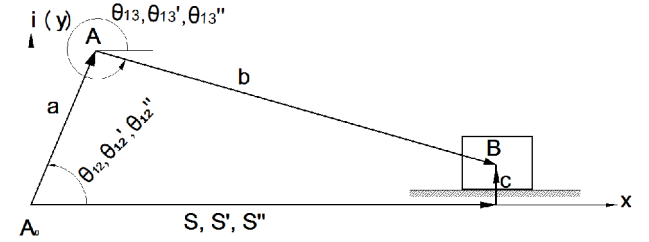
Şekil 10. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $\alpha_{13}$  değişimi grafiği

Tasarlanan dört çubuk mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Exel programı ile  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal ivme analiz sonucu elde edilen ve  $\alpha_{14}$  ivmesinde meydana gelen değişimi gösteren ivme grafiği şekil 11'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında en büyük açısal ivme  $\alpha_{14\text{mak}} = 1,01731 \text{ rad/s}^2$  ve en küçük ise  $\alpha_{14\text{min}} = -2,47369 \text{ rad/s}^2$  ve olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen dört çubuk mekanizmasında ise  $\alpha_{14\text{mak}} = 2,19077 \text{ rad/s}^2$  ve  $\alpha_{14\text{min}} = -3,6391 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada sırasıyla  $\Delta_{\text{add}} = 3,491 \text{ rad/s}^2$  ve  $\Delta_{\text{aed}} = 5,82987 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir.



Şekil 11. Dört çubuk mekanizması  $\theta_{12}$ - $\alpha_{14}$  değişimi grafiği

#### 4. ELİPTİK VE DÜZ DİŞLİ ÇARK ÇİFTİ İLE TAHRİK EDİLEN KRANK BİYEL MEKANİZMASININ KONUM, HIZ VE İVME ANALİZLERİ (DISPLACEMENT, VELOCITY AND ACCELERATION ANALYSIS OF A SLIDER CRANK MECHANISM DRIVEN BY ELLIPTICAL AND CYLINDRICAL SPUR GEAR COUPLES)



Şekil 12. Krank-biyel mekanizması

Şekil 12'de verilen notasyon ve kompleks sayılar kullanılarak verilen krank biyel mekanizmasının konum eşitlikleri,

$$a.e^{i\theta_{12}} + b.e^{i\theta_{13}} = s + i.c \quad (20)$$

$$a.e^{-i\theta_{12}} + b.e^{-i\theta_{13}} = s - i.c \quad (21)$$

halinde yazılır. Bu eşitliklerin bilinenler cinsinden yazılacak şekilde çözülmesiyle,

$$\theta_{13} = 2.\pi - \sin^{-1}\left(\frac{a.\sin\theta_{12} + c}{b}\right) \quad (22)$$

$$s = a.\cos\theta_{12} + b.\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{a.\sin\theta_{12} + c}{b}\right)\right) \quad (23)$$

Bulunur ve Eş. 20 ve Eş. 21'in türevleri alınırsa,

$$i.a.\theta_{12}'e^{i\theta_{12}} + i.b.\theta_{13}'e^{i\theta_{13}} = s' \quad (24)$$

$$-i.a.\theta_{12}'e^{-i\theta_{12}} - i.b.\theta_{13}'e^{-i\theta_{13}} = s' \quad (25)$$

elde edilir. Bu eşitliklerin çözülmesiyle,

$$\theta_{13}' = \omega_{13} = -\frac{a.\cos\theta_{12}}{b.\cos\theta_{13}}.\omega_{12} \quad (26)$$

$$s' = V_B = -\omega_{12}.a.\sin\theta_{12} - b.\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{a.\sin\theta_{12} + c}{b}\right)\right) \quad (27)$$

sırasıyla biyel uzvunun açısal konumu ve kayar uzvun çizgisel hızı elde edilir.

Hız denklemlerinin (Eş. 24 ve Eş. 25) bir kez daha türevi alınarak,

$$i.a.e^{i\theta_{12}}.\left[\theta_{12}'' + i.\theta_{12}'^2\right] + i.b.e^{i\theta_{13}}.\left[\theta_{13}'' + i.\theta_{13}'^2\right] = s'' \quad (28)$$

$$-i.a.e^{-i\theta_{12}}.\left[\theta_{12}'' - i.\theta_{12}'^2\right] + i.b.e^{-i\theta_{13}}.\left[\theta_{13}'' - i.\theta_{13}'^2\right] = s'' \quad (29)$$

ivme denklemleri elde edilmiştir. İvme eşitliklerinin çözülmesinden,

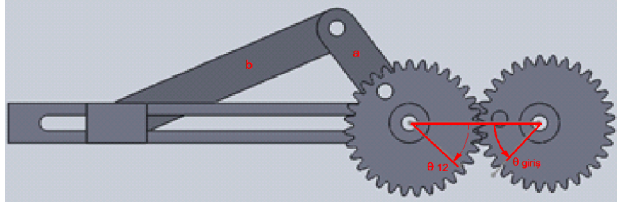
$$\theta_{13}'' = \alpha_{13} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{12}}.\alpha_{12} + \frac{a.\omega_{12}^2.\sin\theta_{12} + b.\omega_{13}^2.\sin\theta_{13}}{b.\cos\theta_{13}} \quad (30)$$

$$s'' = a_B = -a.(w_{12}^2.\cos\theta_{12} + \alpha_{12}.\sin\theta_{12}) - b.(w_{13}^2.\cos\theta_{13} + \alpha_{13}.\sin\theta_{13}) \quad (31)$$

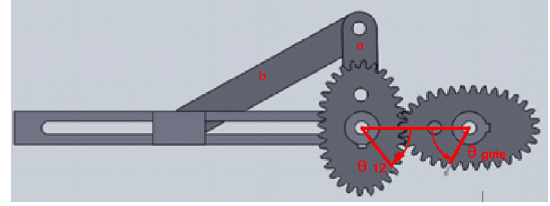
3 nolu uzvun açısal ivmesi (Eş. 30) ve 4 nolu uzvun çizgisel ivmesi (Eş. 31) bulunur.

Krank-biyel mekanizmasının konum, hız ve ivme analizlerinden elde edilen eşitlikler Excel ortamında tanımlanmıştır. Şekil 12’de verilen mekanizma boyutları ve Şekil 13’de verilen tahrik tipleri (silindirik düz dişli ve eliptik düz dişli çiftleri) için, mekanizma tahrik uzvunun açısal hızı  $\theta_{12}'=w_{12}=1 \text{ rad/s}$  ve  $\theta_{12}''=\alpha_{12}=1 \text{ rad/s}^2$  alınarak grafik çıktıları oluşturulmuştur.

Şekil 13’de verilen verilen krank-biyel mekanizmasında uzuv boyutları  $a=30$  ve  $b=60$  mm



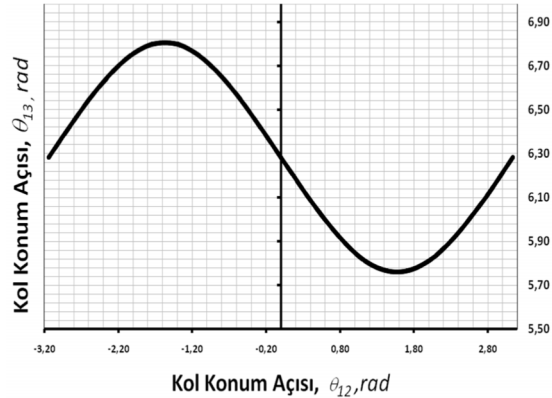
(a)



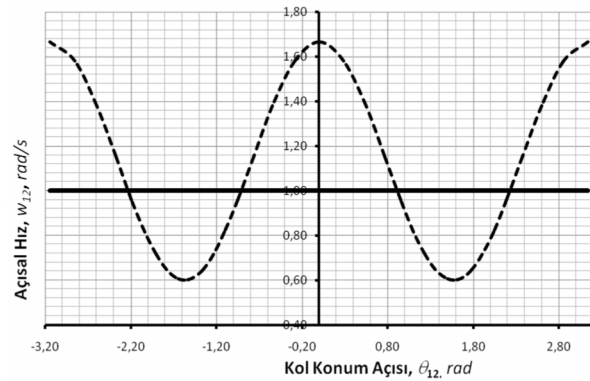
(b)

Şekil 13. a) Silindirik düz dişli çifti, b) eliptik düz dişli çifti tahrikli krank-biyel mekanizması ( $a=30$  mm,  $b=60$  mm ve  $c=0$  mm)

olarak alınmıştır. Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel ortamında (EK B)  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan konum analiz sonucu elde edilen ve  $\theta_{13}$  açısında meydana gelen konum değişikliğini gösteren grafik Şekil 14’de verilmiştir.

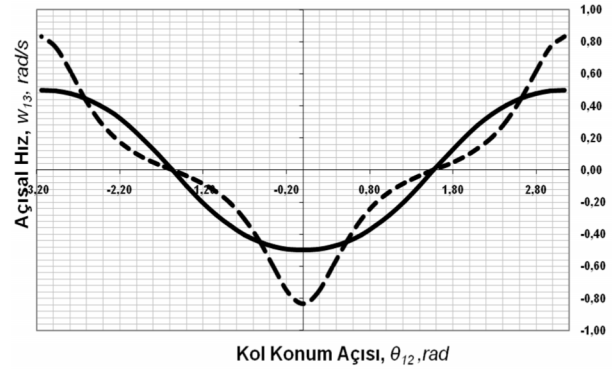
Şekil 14. Krank-biyel mekanizması  $\theta_{12}-\theta_{13}$  değişimi grafiği

Krank-biyel mekanizmasında  $\theta_{12}$  açısına bağlı olarak  $w_{12}$  açısal hızında meydana gelen değişimleri gösteren grafik Şekil 15’de verilmiştir.

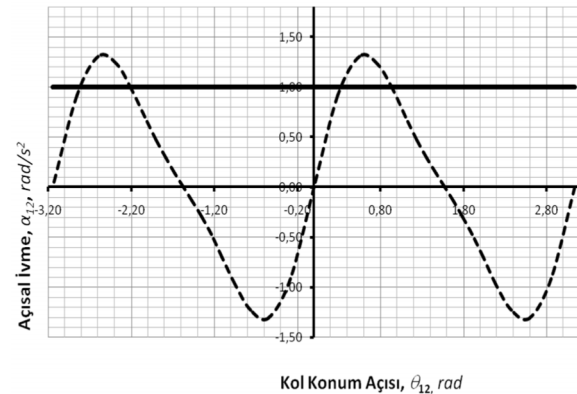
Şekil 15. Krank-biyel mekanizmasında  $\theta_{12}-w_{12}$  değişim grafiği

Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel ortamında  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal hız analiz sonucu elde edilen ve  $w_{13}$  hızında meydana gelen değişimi gösteren hız grafiği Şekil 16’da verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında maksimum açısal hız  $w_{13mak} = 0,5 \text{ rad/s}$  ve minimum açısal hız ise  $w_{13min} = -0,5 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında ise  $w_{13mak} = 0,83369 \text{ rad/s}$  ve  $w_{13min} = -0,83369 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve

eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada  $\Delta w_{dd} = 1 \text{ rad/s}$  ve  $\Delta w_{ed} = 1,66738 \text{ rad/s}$  olarak tespit edilmiştir.

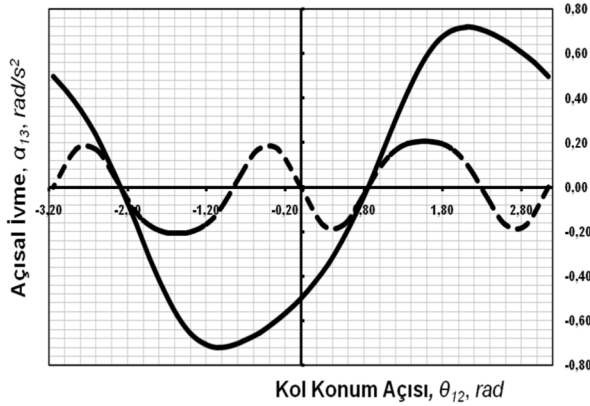
Şekil 16. Krank-biyel mekanizması  $\theta_{12}-w_{13}$  değişimi grafiği

Dört çubuk mekanizmasında  $\theta_{12}$  konum açısına bağlı olarak  $\alpha_{12}$  açısal ivmede meydana gelen değişimleri gösteren grafik Şekil 17’de verilmiştir.

Şekil 17. Krank-biyel mekanizması  $\theta_{12}-\alpha_{12}$  değişimi grafiği

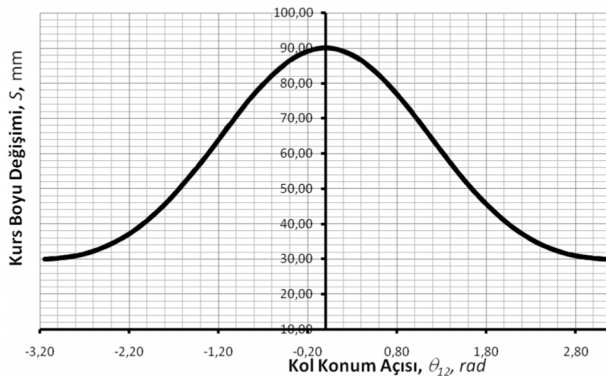
Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel ortamında  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal ivme analiz sonucu elde edilen ve  $\alpha_{13}$  ivmesinde meydana gelen değişimi

gösteren ivme grafiği Şekil 18'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında en büyük açısal ivme  $\alpha_{13mak} = 0,72078 \text{ rad/s}^2$  ve en küçük açısal ivme ise  $\alpha_{13min} = -0,72078 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında ise  $\alpha_{13mak} = 0,20767 \text{ rad/s}^2$  ve  $\alpha_{13min} = -0,20767 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada  $\Delta_{add} = 1,44156 \text{ rad/s}^2$  ve  $\Delta_{aed} = 0,41534 \text{ rad/s}^2$  olarak tespit edilmiştir.



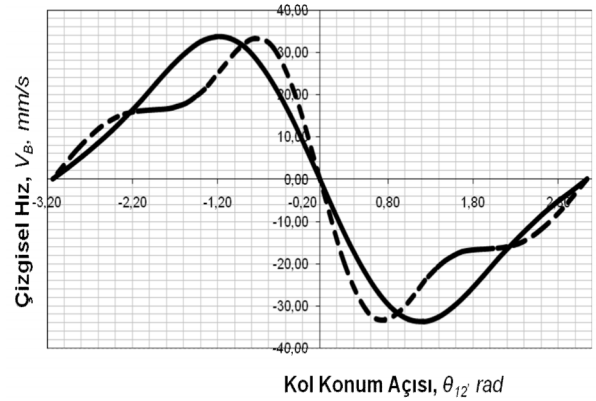
Şekil 18. Krank-biyel mekanizması  $\theta_{12}$ - $\alpha_{13}$  değişimi grafiği

Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel programı ile  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan açısal ivme analiz sonucu elde edilen ve sanal mesafede meydana gelen değişimi gösteren ivme grafiği Şekil 19'da verilmiştir.



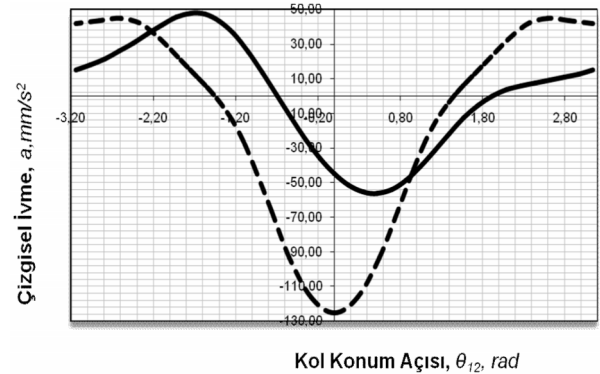
Şekil 19. Krank-biyel mekanizması açısal konum-kurs boyu değişimi grafiği

Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel ortamında  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan çizgisel hız analiz sonucu elde edilen ve  $V_B$  çizgisel meydana gelen değişimi gösteren çizgisel hız grafiği Şekil 20'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında en büyük çizgisel hız  $V_{Bmak} = 33,65203 \text{ mm/s}$  ve en küçük çizgisel hız ise  $V_{Bmin} = -33,65203 \text{ mm/s}$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında ise  $V_{Bmak} = 33,22699 \text{ mm/s}$  ve  $V_{Bmin} = -33,22699 \text{ mm/s}$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada  $\Delta_{V_{ad}} = 67,30406 \text{ mm/s}$  ve  $\Delta_{V_{ed}} = 66,45398 \text{ mm/s}$  olarak tespit edilmiştir.



Şekil 20. Krank-biyel mekanizması açısal konum-çizgisel hız değişimi grafiği

Tasarlanan krank-biyel mekanizması düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilerek Excel ortamında  $\theta_{12}$  açısına göre yapılan çizgisel ivme analiz sonucu elde edilen ve  $a_B$  çizgisel meydana gelen değişimi gösteren çizgisel ivme grafiği Şekil 21'de verilmiştir. Yapılan analiz sonucu düz dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında en büyük çizgisel ivme  $a_{Bmak} = 47,83491 \text{ mm/s}^2$  ve en küçük çizgisel ivme ise  $a_{Bmin} = -56,20953 \text{ mm/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Eliptik dişli ile tahrik edilen krank-biyel mekanizmasında ise  $a_{Bmak} = 44,96549 \text{ mm/s}^2$  ve  $a_{Bmin} = -116,17207 \text{ mm/s}^2$  olarak tespit edilmiştir. Düz dişli ve eliptik dişli ile tahrik edilen mekanizmada  $\Delta_{add} = 104,04444 \text{ mm/s}^2$  ve  $\Delta_{aed} = 161,13756 \text{ mm/s}^2$  olarak tespit edilmiştir.



Şekil 21. Krank-biyel mekanizması açısal konum-çizgisel ivme değişimi grafiği

## 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

Günümüz tasarım ve imalat teknolojileri desteğinde eliptik düz dişliler imal edilebilir nitelik kazanmıştır. Eliptik düz dişli çarklar kinematik olarak daha kesin çözümler ve daha basit tasarım ve hareket ve güç iletim imkânı sağlamaktadır. Eliptik düz dişli çarklar bu yüzden gelecekteki endüstriyel uygulamalar için daha ilgi çekici endüstriyel makine elamanları olması beklenmektedir.

Literatür çalışmalarına bakıldığında eliptik adımlı eğrilerin kinematik analizine ve bilgisayar destekli tasarımı üzerine yoğunlaşıldığı görülmüştür. Mekanizmalarda azda olsa dairesel olmayan dişlilerin ma-

tematiksel olarak analizlerinin yapıldığı tespit edilmiştir. Ancak aynı mekanizmalarda düz dişli ile eliptik dişlilerin analizine rastlanmamıştır.

Eliptik dişli çifti tahrikli mekanizmalarda, düz dişli tahrikli mekanizmalar göre dinamik değerlerin kıyaslanabilmesi için, dört çubuk ve krank-biyel olmak üzere iki farklı mekanizmada konum, hız ve ivme analizleri analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Eşitliklerin Excel ortamında çözülmesiyle elde edilen grafiklerden, eliptik dişli çifti ile tahrik edilen ve incelenen mekanizmalarda; çizgisel ve açısız ivme değişimlerinde önemli farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Eliptik çifti ile tahrik edilen mekanizmalarda  $\Delta_{ivme} = |\Delta_{ivm\max} - \Delta_{ivme\min}|$  değerinin küçük olması, bu dişlilerin hareketli sistemlerde atalet kuvvetleri dengeleyici bir özellik barındırdığını ortaya koymuştur.

Devir sayısının artması eliptik düz dişli çarkların çevresel hızlarının artması demektir. Çevresel hızının artmasıyla da mekanizmanın ses seviyesi yükselir, aşınmalar artar. Bu nedenle yüksek hızlarda çalışan eliptik dişli çarkların yüzey kalitesine, sertliğine ve aşınma davranışına dayalı araştırmalar önemli olacaktır.

Çalışmada elde edilen çarpıcı sonuçlar aşağıda verildiği gibi özetlenebilir.

\* Eliptik düz dişli çifti tahrikli mekanizmalarda en düşük ve en yüksek noktaları olan yumuşak geçişli konum değişimi dikkat çekici olmuştur. Bir eliptik düz dişli tahrikli mekanizma için olumlu olarak değerlendirilmektedir.

\* Eliptik düz dişli çifti tahrikli mekanizmalarda en düşük ve en yüksek noktaları olan sert geçişli açısız hız değişimi dikkat çekici olmuştur. Bir eliptik düz dişli tahrikli mekanizma için olumsuzluk olarak değerlendirilmektedir.

\* Eliptik düz dişli çifti tahrikli mekanizmalarda en düşük ve en yüksek noktaları olan yumuşak geçişli açısız ivme değişimi dikkat çekici olmuştur. Bir eliptik düz dişli tahrikli mekanizma için olumlu olarak değerlendirilmektedir.

## 6. KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Lai M. J., "An Investigation of The Dynamic Behaviour of Systems With, Noncircular Gears", *Cnkijjournal*, Beijing, 377-388, (1996)
- Litvin, F. L. and Varsimashvili, R. S., "Cutting Noncircular Bevel Gears by the Intermittent Generating Method" *Machines and Tooling*, s31-35, (1970)
- Laczik, B., "Non-Circular Gears width Logarithmic Pitch Curve", *A Dunaujvarosi Fiiskola Kozlemenyei*, Dunaujvaros, 211-229, (2006)
- Ogawa, K., Yokoyama, Y., and Koshiya, T., "Studies on the Noncircular Planetary Gear Mechanisms with Nonuniform Motion", *Bull of the ASME*, 1433-1442, (1973)
- Cunningham, F. W., "Noncircular Gears", *Trans. of the Fifth Conf. on Mechanisms, Purdue Univ.*, West Lafayette, IN, 96-103, (1958)
- Mckinley J.R., Crane C. III., Dooner D. B., Kammath J.-F. "Planar Motion Generation Incorporating a 6-Link Mechanism and Non-Circular Elements", *ASME 29th Mechanisms and Robotics Conference*, 393-403, (2005)
- Olsson, U., "Noncircular Cylindrical Gears", *Acta Polytechnics Mechanical Engineering Series*, Vol. 2, Stockholm, Sweden, 10-15, (1953)
- Dooner, D. B., Seireg, A., "The Kinematic Geometry of Gearing: A Concurrent Engineering Approach", *Wiley Series in Design Engineering*, New York, 123-125, (1995)
- Kowalczyk L, Urbanek S., "The Geometry and Kinematics of a Toothed Gear of Variable Motion", *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, Poland, 60-62, (2003)
- Litvin, F.L., "Theory of Gearing" *NASA Publication*, Washington D.C., RP 1212, (1989)
- Litvin, F. L., "Noncircular Gears", 2nd Ed." *Gos Tech Isdat*, Russian, 47-50, (1956)
- Cunningham, F. W., "Designing and Using Noncircular Gears to Generate Mathematical Functions", *Machine Design*, 161-164, (1959)
- Cunningham, F. E., "Elliptical Gears", *ASME Paper*, 68-70, (1970)
- Dooner, D.B., "Effects in gear-type continuously variable transmissions", *Journal of Automobile Engineering*, Cilt 212, no. 6, 463-478, (1998)
- Benton, M. and Seireg, A., "Simulation of Resonances and Instability Conditions in Pinion-Gear Systems" *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 100, 26-32, (1978)
- Benton, M. and Seireg, A., "Factors Influencing Instability and Resonances in Geared Systems" *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 103, 372-378, (1981)
- Dooner, D.B., "Geared 2-degree of freedom mechanical function generator", *Trans. Of ASME*, V. 121, N. 1, 65-70, (1999)
- Fedotyonok, A., Yermakov, V., "Machine Tool Design" *Mir Publishers*, Cilt 2, Moscow, (25-75), (1968)
- Ferguson, R. J. and Kerr, J. H., "Kinematic Efficiency of Noncircular Geared Transmissions" *ASME J. of Mechanical Design*, Cilt. 103, 170-176, (1981)
- Cleghorn, W. L. and Shaw., E. C., "Computer Analysis of Continuously Variable Transmissions Using Noncircular Gears" *Trans. of the CSME*, Cilt 11, No. 2, 113-120, (1987)
- Bloomfield, B., "Noncircular Gears" *Product Engineering*, 59-66, (1960)
- Yazar, M., Özdemir, A., "Eliptik Düz Dişlilerin Bilgisayar Destekli Tasarımı ve CNC Tel Erozyon ile İmalatı", *GÜ Politeknik Dergisi*, Cilt 13, Sayı 4, Sayfa 245-252, (2010)
- Özdemir, A., Şeker, U., "Mekanizma Tekniği", Ankara, (1994)
- Söylemez, E., "Mekanizma Tekniği", (2010)
- George H. M., "Kinematics and Dynamics of Machines", *McGraw-Hill Book Company*, 177-193, (1982)