



WİNKLER ZEMİN VE FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEME ÖZELLİKLERİNİN KİRİŞİN FREKANS PARAMETRELERİNE ETKİLERİNİN İNCELENMESİ

Mehmet AVCAR^{1*}, Waleed Khalid Mohammed MOHAMMED²

¹ Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye

² Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, Türkiye

Anahtar Kelimeler

FDM,
Winkler Zemin,
Titreşim,
Kiriş,
Özdeğer.

Özet

Bu çalışmada, Winkler zemine oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden (FDM) oluşan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin kiriş kalınlığı doğrultusunda sürekli olarak kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde, Winkler zemine oturan FD kirişin serbest titreşiminin yönetici denklemi türetilmiştir. Yönetici denklem değişkenlerine ayrılarak çözülmüştür. Ankastre-basit mesnetli sınır koşulu için ilk üç moda ait öz değerler Newton-Raphson yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Boyutsuz frekans parametre değerlerine malzeme özelliklerinin değişiminin ve Winkler zeminin etkileri incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için bir karşılaştırma çalışması yapılmıştır.

EXAMINATION OF THE EFFECTS OF WINKLER FOUNDATION AND FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL PROPERTIES ON THE FREQUENCY PARAMETERS OF BEAM

Keywords

FGM,
Winkler Foundation,
Vibration,
Beam,
Eigen-value.

Abstract

In the present study, free vibration of the beam composed of functionally graded materials (FGM) resting on Winkler foundation is investigated. The material properties are assumed to vary continuously through the thickness direction. The governing equation of the free vibration of the FG beam resting on Winkler foundation is derived in the framework of Bernoulli-Euler beam theory. The governing equation is solved using separation of variables. The eigenvalues of the first three modes for clamped-simply supported boundary conditions are found employing Newton-Raphson Method. The effects of the Winkler foundation and varying material properties on the values of dimensionless frequency parameters are examined. Furthermore, to show the accuracy of the present results, a comparison study is performed.

Alıntı / Cite

AvcAR, M., Mohammed W.K.M., (2017). Winkler Zemin ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme Özelliklerinin Kirişin Frekans Parametrelerine Etkileri, *Journal of Engineering Sciences and Design*, 5(3), 573-580.

Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)

M. AVCAR, 0000-0002-0689-0601

W. K. M. MOHAMMED, -

Başvuru Tarihi / Submission Date	02.11.2017
Revizyon Tarihi / Revision Date	21.11.2017
Kabul Tarihi / Accepted Date	30.11.2017
Yayın Tarihi / Published Date	19.12.2017

1. Giriş

Günümüz teknolojisinde, malzemelerde homojen olmayan kademeli veya devamlı değişen bir yapıya ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, bilim insanları

birbirleri ile birleştirilmiş, fiziksel ve kimyasal olarak farklı özellikler taşıyan, iki madde arasında, farklı ısıl genleşme katsayılarından kaynaklanan ısıl gerilmeleri derecelendirilmiş yapılarıyla azaltan; iki madde arasındaki fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani

* İlgili yazar / Corresponding author: mehmetavcar@yahoo.com, +90-246-211-1218

değişimlerden dolayı meydana gelebilecek diğer olumsuzlukları da en aza indiren yeni nesil bir malzeme olan FDM'leri geliştirmiştir. FDM tipik olarak bir seramik ve bir metalin karışımıdır, bu şekilde seramik termal ortamlarda yüksek sıcaklıklara karşı koyabilecek bununla birlikte metal de soğutmanın ilk aşamalarında seramik yüzeyde oluşacak çekme gerilmelerini azaltacaktır. FDM'ler makine, uzay, nükleer ve inşaat mühendisliğinde yüksek sıcaklığa maruz yapı elemanlarında, uzay araçlarında, mikro-elektronik ve endüstriyel uygulamalarında çok yaygın olarak kullanılmaktadır. (Wakashima vd., 1990; Koizumi, 1993; Suresh ve Mortensen, 1998; Dimitoka ve Yıldırım, 2003; Akgöz ve Civalek, 2013; Chakraverty ve Pradhan, 2016).

Elastik zemine oturan kiriş kavramı, yapı, geoteknik, karayolu ve demiryolu mühendisliği problemlerinin modellenmesi ve analizi için önemli bir araçtır (Hetenyi, 1946; Kerr, 1964; Selvadurai, 1979, Avcar, 2016; Mohammed, 2017). Demiryolları, karayolları, boru hatları ve sürekli temeller elastik zemine oturan kirişlere verilebilecek örneklerden birkaçıdır. Zeminin karmaşık bir yapıya sahip olması, modelleme aşaması için farklı yaklaşımlar geliştirilmesine neden olmuştur. Bu yaklaşımlar arasında en fazla benimsenen varsayım Winkler zemin modelidir. Winkler zemin modelinde elastik zeminin bir noktasındaki düşey yer değiştirmenin sadece o noktada uygulanan basınç kuvvetiyle orantılı olduğu ve komşu noktalarda uygulanan basınç kuvvetlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Böylece, zeminin düşey yer değiştirme özellikleri, birbirinden bağımsız doğrusal sürekli yaylarla tanımlanır (Winkler, 1867; Filonenko-Borodich, 1940; Teodoru ve Musat, 2008).

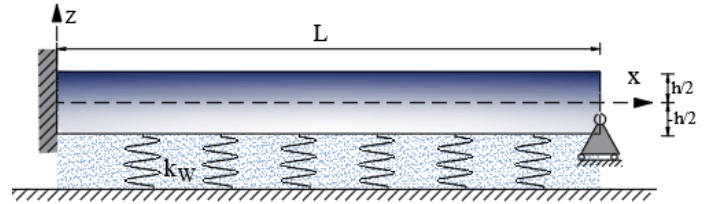
Winkler zemine oturan kirişlerin serbest titreşiminin incelenmesi açık literatürün ilgi çeken konularından birisidir (Eisenberger ve Clastornik, 1987; Issa 1988; Zhou, 1993; Coşkun 2000; Ruge ve Birk, 2007; Civalek ve Demir, 2009; Avcar 2010; Calim ve Akkurt, 2011; Öztürk ve Bozkurt, 2013; Yanık ve Yaylı 2015).

Yapılan literatür çalışmasının sonucunda, Winkler zemine oturan FD kirişlerin serbest titreşiminin incelenmesine ait çalışma sayısının az olduğu özellikle de öz değer analizi sayısının son derece kısıtlı olduğu görülmüştür. Bu nedenle de ilgili problemin çözümü için bir girişimde bulunulmuştur. Bu bağlamda, sunulan çalışmada, Winkler zemine oturan FDM'lerden oluşan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin kiriş kalınlığı doğrultusunda sürekli olarak kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde, Winkler zemine oturan FD kirişin serbest titreşiminin yönetici denklemi türetilmiştir. Yönetici denklem değişkenlerine ayrılarak çözülmüştür. Ankastré-basit mesnetli sınır koşulu için ilk üç moda ait öz değerler Newton-Raphson yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Boyutsuz frekans

parametre değerlerine malzeme özelliklerinin değişiminin ve Winkler zeminin etkileri incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için bir karşılaştırma çalışması yapılmıştır.

2. FDM'lerin Etkin Malzeme Özelliklerinin Tanımlanması

Uzunluğu L , yüksekliği h olan Winkler zemine oturan bir ucu ankastré diğer ucu basit mesnetli olan FD kirişi ele alalım. Orijin FD kirişin orta düzleminin merkezinde, x , y ve z eksenleri ise sırasıyla kirişin uzunluğu, eni ve kalınlığı doğrultusunda yönelmektedir.



Şekil 1. Winkler zemine oturan bir ucu ankastré diğer ucu basit mesnetli FD kiriş ve koordinat sistemi

Karışım kuralına göre, P , etkin malzeme özellikleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P = P_m V_m + P_s V_s \quad (1)$$

burada P_m , P_s , V_m ve V_s sırasıyla metal ve seramiğin malzeme özellikleri ve hacim oranları olup aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir:

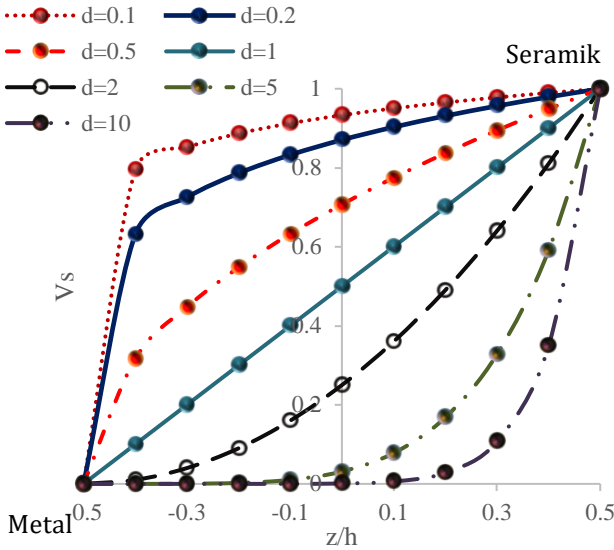
$$V_m + V_s = 1 \quad (2)$$

Kirişin seramik bileşeninin hacim oranı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$V_s = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^d \quad (3)$$

Burada d negatif olmayan bir değişken olup kalınlık boyunca malzeme dağılımını karakterize eder.

FD kiriş kalınlığı boyunca seramik bileşenin hacim oranının değişimi Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. FD kiriş kalınlığı boyunca seramik bileşenin hacim oranının değişimi

(1)-(3) denklemleri kullanılarak FDM kirişin etkin malzeme özelleri seramik malzemenin hacim oranına göre aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(z) = (P_s - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^d + P_m \quad (4)$$

Denklem (4) incelediğinde şu sonuca varılır:

$$z = -h/2, \text{ olduğunda } E = E_m; v = v_m; G = G_m; \rho = \rho_m$$

$$z = h/2, \text{ olduğunda } E = E_c, v = v_c, G = G_c, \rho = \rho_c.$$

Burada, E, v ve ρ sırasıyla elastisite modülü, Poisson oranı ve yoğunluktur.

3. Yönetici Denklemler

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre, x ve z eksenleri boyunca kirişte herhangi bir noktanın koordinatları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (5)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t)$$

Burada u_0 ve w_0 sırasıyla orta yüzeyin eksenel ve düşey yer değiştirmesidir. (5) denkleminden yararlanarak kirişin herhangi bir noktasındaki şekil değiştirme aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\varepsilon(x, z, t) = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (6)$$

Hooke kanununa göre normal gerilme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\sigma(x, z, t) = E(z)\varepsilon = E(z) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (7)$$

(7) denkleminde, kiriş en-kesitinde gerilmelerin neden olduğu N normal kuvvet ve M eğilme momenti ve Q kesme kuvveti sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = A_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA = B_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = B_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (10)$$

burada A_1, B_1 ve D_1 sırasıyla FD kirişin uzama, uzama-eğilme birleşik ve eğilme rijitlikleri olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(A_1, B_1, D_1) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z) (1, z, z^2) dz \quad (11)$$

Winkler zemin için basınç-yer değiştirme bağıntısı şu şekildedir (Hetenyi, 1946):

$$p(x, t) = k_w w(x, t) \quad (12)$$

Burada, $p(x, t)$ zeminin tepki kuvveti, $w(x, t)$ zeminin düşey yer değiştirmesinin fonksiyonu, k_w Winkler zemin katsayısıdır.

FD kirişin denge koşulları ve yukarıda verilen bağıntılar dikkate alınarak, bazı matematiksel işlemler ve sadeleştirmelerden sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$I_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_w w = 0 \quad (13)$$

(13) denklemini Winkler zemine oturan FD kirişin hareketini tanımlayan dördüncü dereceden kısmi diferansiyel denklemdir. Burada I_0 , FD kirişin kütle eylemsizlik momenti olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_0 = \int_A \rho(z) dA \quad (14)$$

4. Yönetici Denklemlerinin Genel Çözümü:

(14) denkleminin çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemiyle arayalım (Rao, 2007):

$$w(x,t) = a(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (15)$$

(15) ifadesi (14) denkleminde dikkate alındığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Lambda_0 \frac{d^4 a}{dx^4} - (I_0 \omega^2 - k_w) a = 0 \quad (16)$$

(16) denkleminin çözümü şu şekilde aranır:

$$a(x) = d_1 \sinh(\beta_1 x) + d_2 \cosh(\beta_1 x) + d_3 \sin(\beta_2 x) + d_4 \cos(\beta_2 x) \quad (17)$$

(17) denklemini (16)'da yerine yazılıp bazı matematiksel işlemler uygulandıktan sonra serbest titreşim frekansı için şu ifade elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Lambda_0 \beta^4 + k_w}{I_0}} \quad (18)$$

Burada, bilinmeyen olan β değeri sınır koşullarına bağlı olarak belirlenir.

5. Yönetici Denklemlerin Özel Çözümü

Winkler zemine oturan bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli FD kiriş için aşağıdaki sınır koşulları geçerlidir:

$$a|_{x=0} = 0 \text{ ve } \left. \frac{da}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (19)$$

$$a|_{x=L} = 0 \text{ ve } \left. \frac{d^2 a}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (20)$$

(19) ve (20) sınır koşulları (17) denkleminde dikkate alınıp bazı matematiksel işlemlerden sonra aşağıdaki katsayılar matrisi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \sinh(A) - \sin(A) & \cosh(A) - \cos(A) \\ \sinh(A) + \sin(A) & \cosh(A) + \cos(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

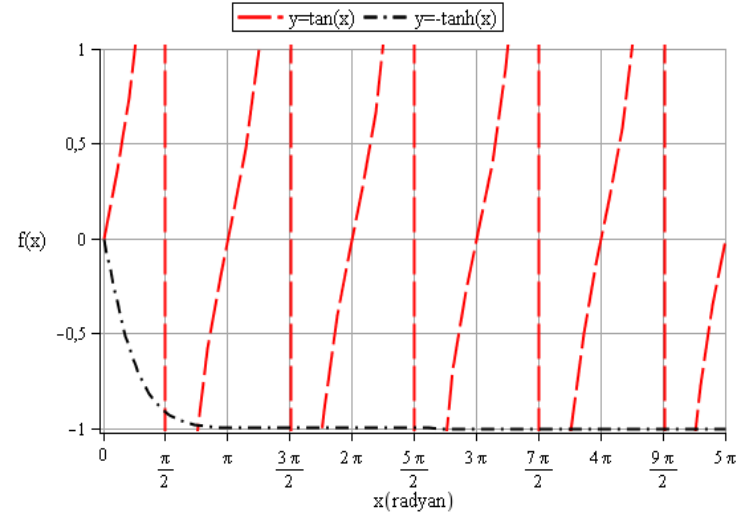
Burada şu tanım geçerlidir:

$$A = \beta L \quad (22)$$

(21) katsayılar matrisinin determinantını alırsak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\tanh(A) - \tan(A) = 0 \quad (23)$$

(23) denkleminin çözümünü Newton-Raphson yöntemiyle arayalım. (23) denkleminin ait grafiksel gösterim Şekil 3'de sunulmuştur.



Şekil 3. Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kirişin serbest titreşimine ait fonksiyonun değişimi

Yukarıdaki şekilde iki eğrinin kesiştiği sıfırdan farklı olan noktalarda, aranan kökler elde edilir. Buna göre kökler yaklaşık olarak aşağıdaki ifadeyi sağlar:

$$\beta_n = \frac{\pi}{L} \left[\frac{1}{4} + n \right], n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

(24) denklemini tekrar ele alalım ve onu aşağıdaki şekilde bir fonksiyon olarak tanımlayalım:

$$f(A) = \tanh(A) - \tan(A) \quad (25)$$

Bilindiği gibi, değişkenin bir kök olabilmesi için fonksiyon sıfıra eşit olmalıdır.

Newton-Raphson yöntemine göre aşağıdaki tanım geçerlidir:

$$A = C - \frac{f(C)}{f'(C)} \quad (26)$$

(25) ifadesi (26)'da dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$A = C - \frac{\tanh(C) - \tan(C)}{-\tanh^2(C) - \tan^2(C)} \quad (27)$$

(27) denkleminde iterasyon işleminin uygulanması ve elde edilen ilk üç kökün değerleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş için A değerinin elde edilişi

İterasyon	İlk kök(β_1)	
	C	A
1	3.927	3.926602470
2	3.926602470	3.926602312
3	3.926602312	3.926602312
	İkinci kök(β_2)	
1	7.069	7.068582920
2	7.068582920	7.068582746
3	7.068582746	7.068582746
	Üçüncü kök(β_3)	
1	10.210	10.21017615
2	10.21017615	10.21017612
3	10.21017612	10.21017612

6. Araştırma Bulguları ve Tartışma

Bu bölümde sunulan problemi incelemek için bir dizi sayısal örnek verilmiştir.

6.1. Karşılaştırma Çalışması

Tablo 2’de bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli sınır koşuluna sahip zeminsiz, Winkler zemine oturan homojen kiriş elde edilen ilk üç moda ait ω ve ω_w boyutsuz frekans parametre değerleri Obara (2014) çalışması ile karşılaştırılmıştır. Burada, aşağıdaki boyutsuz parametreler kullanılmıştır:

$$\omega = \sqrt{\omega L^2 \sqrt{\frac{I_0}{\Lambda_0}}}; K_w = \frac{k_w L^4}{\Lambda_0} \quad (28)$$

Ayrıca, burada şu tanımlar geçerlidir:

$$k_w = 0.6\pi^4 d = 0 \quad (29)$$

Tablo 2. Boyutsuz frekans parametre değerlerinin karşılaştırılması

n		Obara(2014)	Sunulan Çalışma
1	ω	3.927	3.927
	ω_w	4.148	4.149
2	ω	7.069	7.069
	ω_w	7.109	7.110
3	ω	10.210	10.210

ω_w	10.224	10.224
------------	--------	--------

Tablo 2’de elde edilen sonuçların ilgili çalışma ile çakışması elde edilen formülasyonun doğruluğunu teyit etmektedir.

6.2. Sayısal Örnekler

Sayısal örneklerde Winkler zemine oturan FD kirişin Alümina(Al_2O_3) ve Alüminyum(Al)’dan oluştuğu varsayılmıştır ve buna göre aşağıdaki malzeme özellikleri dikkate alınmıştır:

$$E_m = 70 \text{ GPa}; \rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3 \quad (32)$$

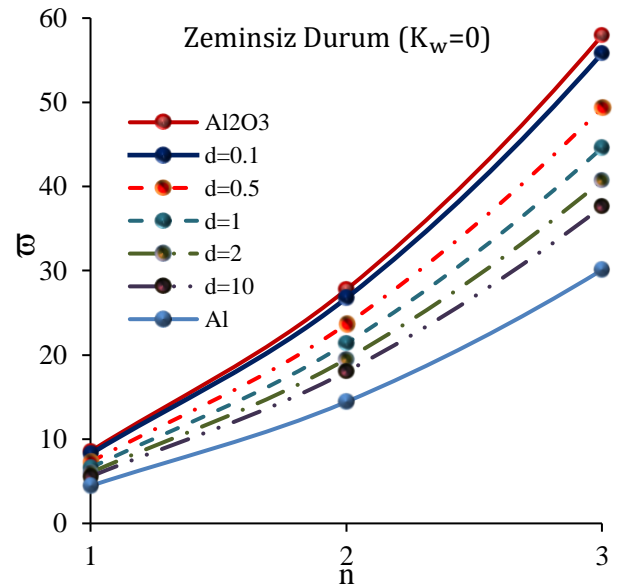
$$E_c = 380 \text{ GPa}; \rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$$

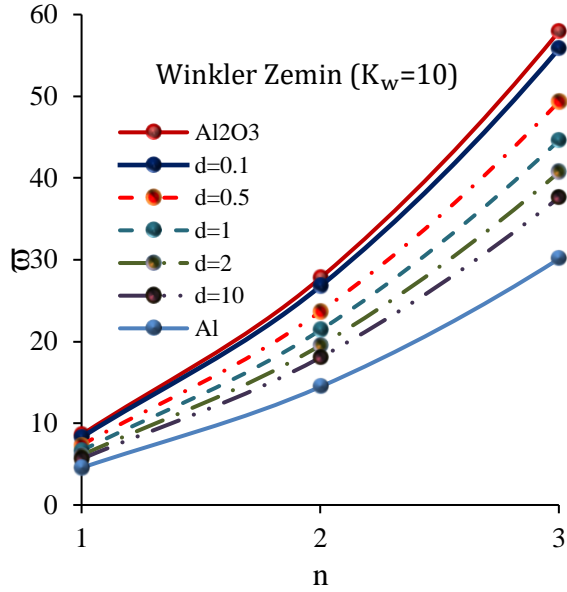
Ayrıca burada boyutsuz frekans şu şekilde tanımlanmıştır:

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_m I} \omega = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (66)$$

Örnek 1

Şekil 4’te bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu basit mesnetli sınır koşullarında Winkler zemine oturan/oturmayan FD kirişin boyutsuz frekans parametre değerlerinin d katsayısına bağlı değişimi sunulmuştur. Elde edilen sonuçlardan d katsayısı arttıkça yani malzeme özellikleri seramikten metale doğru değiştiğinde, ω , boyutsuz frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür. Ayrıca, elastik zemin dikkate alındığında d katsayısının değişiminin, ω , boyutsuz frekans değerleri üzerindeki etkisinin azaldığı gözlemlenmiştir.

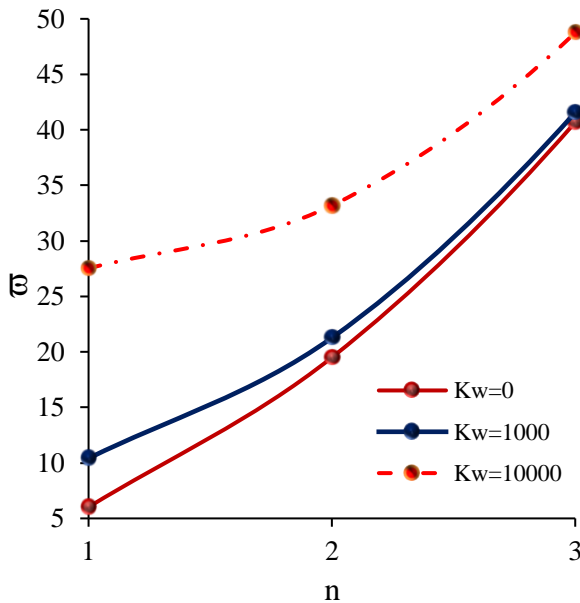




Şekil 4. Winkler zeminine oturan/oturmayan bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli FD kirişin boyutsuz frekans parametre değerlerinin d katsayısına bağlı değişimi

Örnek 2

Şekil 5'te Winkler zeminine oturan/oturmayan bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kirişin boyutsuz frekans değerlerinin zemin sertlik katsayısına, K_w bağlı değişimi sunulmuştur. Burada $d=2$ olarak hesaba katılmıştır. Elde edilen sonuçlardan zemin sertlik katsayısı arttıkça ω , boyutsuz frekans parametre değerlerinin arttığı görülmüştür. Burada en yüksek etki temel frekans üzerinde olup, artan mod sayısı ile birlikte zemin sertlik katsayısının değişiminin etkisi giderek azaldığı görülmüştür.



Şekil 5. Winkler zeminine oturan/oturmayan bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu basit mesnetli FD kirişin boyutsuz frekans parametre değerlerinin zemin sertlik katsayısına bağlı değişimi

6. Sonuç

Sunulan çalışmada, Winkler zeminine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden oluşan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin kiriş kalınlığı doğrultusunda sürekli olarak kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde, Winkler zeminine oturan FD kirişin serbest titreşiminin yönetici denklemi türetilmiştir. Yönetici denklem değişkenlerine ayrılarak çözülmüştür. Ankastre-basit mesnetli sınır koşulu için ilk üç moda ait öz değerler Newton-Raphson yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Boyutsuz frekans parametre değerlerine malzeme özelliklerinin değişiminin ve Winkler zeminin etkileri incelenmiştir.

Kısaca şu sonuçlar elde edilmiştir

- Malzeme özellikleri seramikten metale doğru değiştiğinde, boyutsuz frekans parametre değerleri azalmaktadır
- Elastik zemin etkisi dikkate alındığında d katsayısının değişiminin boyutsuz frekans parametre değerleri üzerindeki etkisi azalmaktadır
- Zemin sertlik katsayısı arttıkça boyutsuz frekans parametre değerleri artmaktadır
- Zemin sertlik katsayısı en yüksek etkiye temel frekans üzerinde sahip olup, artan mod sayısı ile birlikte söz konusu etkisi giderek azalmaktadır

Elde edilen sonuçlardan, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin ve Winkler zeminin kirişin serbest frekansı değerleri üzerinde önemli etkilere sahip oldukları görülmüştür.

Teşekkür

Bu çalışma Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 4912-YL1-17 nolu proje kapsamında desteklenmiştir. Yazarlar, desteklerinden dolayı Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine teşekkürlerini sunar.

Conflict of Interest / Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

No conflict of interest was declared by the authors.

Kaynaklar

- Akgöz, B., Civalek, Ö., 2013. Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM). *Composites Part B: Engineering*, 55, 263-268.
- Avcar, M., 2010. Elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli rastgele ve sürekli homojen olmayan kirişin serbest titreşimi. *Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 1, 33-38, (2010).
- Avcar, M., 2016. Pasternak zemine oturan eksenel yüke maruz homojen olmayan kirişin serbest titreşimi. *Politeknik Dergisi*, 19, 507-512.
- Çalim, F.F., Akkurt, F.G., 2011. Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation. *Mechanics Research Communications*, 38, 89-94.
- Chakraverty, S., Pradhan, K.K., 2016. *Vibration of Functionally Graded Beams and Plates*. Academic Press.
- Civalek, Ö., Demir, Ç., 2009. Elastik zemine oturan kirişlerin ayrik tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleriyle analizi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 11, 56-71.
- Coşkun, I., 2000. Non-linear vibrations of a beam resting on a tensionless Winkler foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 236, 401-411.
- Dimitoka, K., Yıldırım, B., 2003. Katmanlı ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış termal bariyer kaplamalardaki termal gerilimlerin sonlu elemanlar metodu ile hesaplanması. *Mühendis ve Makina*, 525, 34-42.
- Eisenberger, M., Clastornik, J., 1987. Vibration and buckling of beam on a variable Winkler elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 115: 233-241.
- Filonenko-Borodich, M.M., 1940. Some Approximate Theories of the Elastic Foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 46, 3-18.
- Hetenyi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*, The University of Michigan Press.
- Issa, M.S., 1988. Natural frequencies of continuous curved beams on Winkler-type foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 127, 291-301.
- Kerr, A.D., 1964. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, 31, 3491-3498.
- Koizumi, M., 1993. The Concept of FGM. *Ceramic transactions, Functionally Graded Materials*, 34, 3-10.
- Mohammed, W.K.M., 2017. *Pasternak Zemine Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişin Serbest Titreşimi*. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi.
- Obara, P., 2014. Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Archives of Civil Engineering* 60,421-440.
- Ozturk, B., Coskun, S.B., 2013. Analytical solution for free vibration analysis of beam on elastic foundation with different support conditions. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 470927.
- Rao, S.S., 2007. *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley and Sons Ltd.
- Ruge, P., Birk, C. (2007). A comparison of infinite Timoshenko and Euler-Bernoulli beam models on Winkler foundation in the frequency-and time-domain. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3), 932-947.
- Selvadurai, A.P.S., 1979. *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Amsterdam: Elsevier.
- Suresh, S., Mortensen, A., 1998. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. IOM Communications, London.
- Teodoru, I. B., Musat, V., 2008. Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation. *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura*, 5, 69-78.
- Wakashima K., Hirano T., Niino M., 1990. *Space applications of advanced structural materials*. ESA SP303-97.
- Winkler, E., 1867. *Die Lehre Vonder Elastizitat und Festigkeit*, Prag
- Yanık, F. ve Yaylı M.O., 2015. Rijit olmayan sınır koşullarında elastik zemine oturan bir çubuğun eksenel titreşim analizi. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2, 35-44.

Zhou, D., 1993. A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation. Computers & structures, 47, 83-90.