İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 03 No 02 Özel Sayı Sayfa 1-11 Ağustos 2004

İKİ DEĞİŞKENLİ FARLİE-GUMBEL-MORGENSTERN DAĞILIMLARI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİNİN EŞLENİKLERİNİN DAĞILIMLARI VE MOMENTLERİ

Muhammet BEKÇİ*

ÖZET

Bu çalışmada, iki değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımları için sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları ve momentleri çalışılmıştır. İlk olarak, FGM dağılımları ve bu dağılımların birliktelik parametresi için kabul edilebilir sınırlar verilmiştir. İki değişkenli FGM dağılımları için pozitif kadran bağımlılık özelliğinin sağlandığı gösterilmiş ve sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları sunulmuştur. Düzgün ve Üstel tip iki değişkenli FGM dağılımları için sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları, momentleri ve moment çıkaran fonksiyonları bulunmuştur. Sıra istatistiklerinin eşleniklerinin momentleri ve moment çıkaran fonksiyonları için indirgeme bağıntıları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : *FGM Dağılımları, İndirgeme Bağıntısı, Kabul Edilebilir Aralık, Moment, Moment Çıkaran Fonksiyon, Pozitif Kadran Bağımlılık, Sıra İstatistikleri, Sıra İstatistiklerinin Eşlenikleri.*

1. GİRİŞ

Çok değişkenli dağılımlarda değişkenlerin birbirine bağımlı olması hali doğadaki gerçek problemlere daha yatkın olan durumdur. Bu nedenle, bağımlı değişkenlerin olasılık dağılımlarının modellenmesi konusu üzerinde çalışılması gereken bir sahadır. Bu sahada ele alınan çok değişkenli dağılım modellerinden birisi olan ve literatürde Farlie-Gumbel-Morgenstern (□□M) dağılımları olarak yer alan bu konudaki ilk çalışmalar olarak Morgenstern (1956), Gumbel (1960) ve Farlie (1960)'nin çalışmaları temel yapı taşı oluşturmaktadır. Bu yapının üzerine inşa edilmiş çok değerli çalışmalar mevcuttur.

Çok değişkenli dağılımlarda sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımlarını karakterize etme problemi istatistik bilimi açısından kuramsal bir değer taşımanın yanı sıra; tıp, biyoloji, jeoloji, hidroloji, ekonomi ve ziraat gibi pek çok uygulama alanları açısından da önem taşımaktadır.

* Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 35100, Bornova, İzmir,Türkiye.

Bu bağlamda, FGM dağılım modelleri ele alınarak birliktelik parametresi için kabul edilebilir sınırlar verilmiştir. İki değişkenli FGM dağılımları ele alınarak birliktelik parametresi için kabul edilebilir sınırlar bulunmuştur. Değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı birliktelik parametresinin bir fonksiyonu olmaktadır. Dolayısıyla, değişkenler arasındaki korelasyonu artırabilmek için iki değişkenli FGM dağılımlar ailesi genelleştirilmeye çalışılmıştır.

Bunun yanı sıra, iki değişkenli FGM dağılımları için pozitif kadran bağımlık özelliğinin sağladığı gösterilmiş ve sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları ile ortak dağılımları sunulmuştur. Sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları, momentleri, moment çıkaran fonksiyonları ve bunlar arasındaki indirgeme bağıntıları Düzgün ve Üstel dağılımlar için elde edilmiştir. Böylece elde edilen sonuçlar bazı özel dağılım modellerinde kullanılarak bir çeşit uygulamaya gidilmiştir.

FGM dağılımları ve sıra istatistiklerinin eşlenikleri konusunda; Johnson ve Kotz (1975), (1977), David (1981), Bhattacharya (1984), Huang ve Kotz (1984), (1999), Balasubramanian ve Beg (1997), (1998), Bairamov ve Bekçi (1999) ile Bairamov, Kotz ve Bekçi (2001) yapılan bazı çalışmalar olarak yer almaktadır.

2. FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN DAĞILIMLARI

Bağımlı rasgele değişkenlerin olasılık dağılımlarının modellenmesinde kullanılan çok değişkenli dağılımlardan birisi olan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımının n boyutlu halde dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$x_1, x_2, ..., x_n \in R$ olmak üzere

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i)\left\{1+\sum_{1\le j<k\le n}\alpha_n(j,k)\overline{F}_j(x_j)\overline{F}_k(x_k)\right\} \qquad (1)$$

olup burada $\overline{F}(x)=1-F(x)$ ve $\alpha_n(j,k)$'lar $F(x_1,x_2,...,x_n)$, n boyutlu dağılım fonksiyonu olacak şekilde seçilen uygun parametrelerdir.

$F(x_1,x_2,...,x_n)$ ortak dağılım fonksiyonu için marjinallerin mutlak sürekli olması durumunda bu dağılıma karşılık gelen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)\left\{1+\sum_{1\le j<k\le n}\alpha_n(j,k)[1-2F_j(x_j)][1-2F_k(x_k)]\right\} \qquad (2)$$

olarak bulunur.

$X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu (1) eşitliğinde $\alpha_n(j,k)=\alpha_n$ olarak alınması durumunda

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i)\left\{1+\alpha_n\sum_{1\le j<k\le n}\overline{F}_j(x_j)\overline{F}_k(x_k)\right\} \tag{3}$$

olur.

Teorem 1. $X_1,X_2,...,X_n$ rasgele değişkenleri (3) eşitliği ile verilen ortak dağılım fonksiyonuna sahip olması durumunda α_n , $n>1$ birliktelik parametresi için kabul edilebilir sınırlar

$$-\frac{1}{\binom{n}{2}}\le\alpha_n\le\frac{1}{\left[\left[\frac{n}{2}\right]\right]}$$

şeklindedir. Burada $[[x]]$, x'in tam kısmını göstermektedir.
(Bairamov ve Eryılmaz, 2003)

2.1 İki Değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımları

X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal dağılımları sırasıyla $F(x)$ ve $F(y)$ olmak üzere,

$$F(x,y)=F(x)F(y)\{1+\alpha A[F(x)]B[F(y)]\} \tag{4}$$

şeklinde verilen ortak dağılıma iki değişkenli FGM dağılımı denir.

Burada $A(x)$ ve $B(y)$, $x,y\in(0,1)$ için $\lim_{x\to1}A(x)=0$, $\lim_{y\to1}B(y)=0$ koşullarını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(4) eşitliğinde $A(x)=1-x$ ve $B(y)=1-y$ olarak alınırsa,

$$F(x,y)=F(x)F(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-F(y)]\}\quad,\quad -1\le\alpha\le1 \tag{5}$$

olarak elde edilir. Eğer $F(x)$ ve $F(y)$ marjinal dağılımları mutlak sürekli ve bunlara karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile $f(x)$ ve $f(y)$ ise, o zaman X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=f(x)f(y)\{1+\alpha[1-2F(x)][1-2F(y)]\}\quad,\quad -1\le\alpha\le1 \tag{6}$$

olarak elde edilir. Burada $-1\le\alpha\le1$ olup $[-1,1]$ aralığı α birliktelik parametresi için kabul edilebilir aralık olarak adlandırılır.

X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon ise, $F(x)$ ve $F(y)$ marjinallerinin seçimine göre değişmekte ve α birliktelik parametresinin bir fonksiyonu olmaktadır. Marjinallerin (0,1) aralığında düzgün dağılım olarak alınması durumunda $\rho=\alpha/3$ olup $-1/3\le\rho\le1/3$ olmaktadır. Marjinaller standart normal dağılım olarak alınırsa X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon $\rho = \alpha/\pi$ olup $\alpha \in [-1,1]$ olduğundan $-0,318 \leq \rho \leq 0,318$ 'dir. Marjinallerin üstel dağılım olarak alınması durumunda ise $\rho_{max} = 1/4$ olmaktadır (Schucany vd., 1978). Eğer birliktelik parametresi $\alpha = 0$ ise bağımsızlık durumu elde edilmektedir.

(X,Y) iki değişkenli rasgele vektörü için marjinaller (0,1) aralığında düzgün dağılım olarak alınması durumunda ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y) = xy\{1+\alpha(1-x)(1-y)\} \;,\; 0<x,y<1 \;,\; -1\leq\alpha\leq 1 \tag{7}$$

olur. (7) eşitliği ile verilen dağılıma iki değişkenli FGM tip düzgün dağılım adı verilir. Bu dağılım üzerinde Morgenstern (1956), Gumbel (1960) ve Farlie (1960) çalışmıştır. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon ise $1/3$ değerini geçmemektedir.

Çok değişkenli halde, Johnson ve Kotz (1975), (1977) çalışmışlardır. Değişkenlere ait ortak dağılımın FGM tip dağılım olarak modellenmesi ve korelasyonu artıracak şekilde Huang ve Kotz (1984), (1999), Balasubramanian ve Beg (1997), (1998), Bairamov ve Bekçi (1999) ile Bairamov, Kotz ve Bekçi (2001) bu konu üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Eğer X ve Y rasgele değişkenleri için

$$P\{X\leq x, Y\leq y\} \geq P\{X\leq x\}P\{Y\leq y\} \;,\; \forall x,y \text{ için} \tag{8}$$

ise X ve Y rasgele değişkenleri pozitif kadran bağımlılık (PQD) özelliği gösterir (Lehmann, 1966). O zaman (7) eşitliği ile verilen dağılım $0\leq\alpha\leq 1$ için PQD'dir.

Teorem 2. X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı

$$F(x,y) = xy\{1+\alpha(1-x^{p_1})^{q_1}(1-y^{p_2})^{q_2}\} \;,\; 0<x,y<1 \;,\; p_1,p_2\geq 1 \;,\; q_1,q_2>1 \tag{9}$$

olması durumunda α birliktelik parametresi için kabul edilebilir sınırlar

$$\alpha_L \leq \alpha \leq \alpha_U \tag{10}$$

dır. Burada,

$$\alpha_L = -\min\left\{1, \frac{1}{p_1 p_2}\left(\frac{1+p_1 q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}\left(\frac{1+p_2 q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\} \tag{11}$$

ve

$$\alpha_U = \min\left\{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1+p_1 q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}, \frac{1}{p_2}\left(\frac{1+p_2 q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\} \tag{12}$$

ifadelerini göstermektedir. Eğer

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_U \tag{13}$$

ise X ve Y rasgele değişkenleri PQD'dir denir. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı ρ için sınırlar

$$12t(q_1, p_1)t(q_2, p_2)\alpha_L \leq \rho \leq 12t(q_1, p_1)t(q_2, p_2)\alpha_U \tag{14}$$

dır. Burada $t(a,b) = \dfrac{B(a+1,2/b)}{b}$, $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ fonksiyonlarını göstermektedir. Eğer $\alpha = 0$ ise X ve Y rasgele değişkenleri bağımsızdır. (Bairamov, Kotz ve Bekçi, 2001)

3. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN EŞLENİKLERİ

$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $F(x,y)$ dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ örneklemin ilk koordinatı olan X'in sıra istatistikleri olmak üzere, $1 \leq r \leq n$ için $X_{r:n}$ ile $r-$inci sıra istatistiği gösterilsin. Eğer

$$Y_{[r:n]} = Y_j \ni X_{r:n} = X_j \ , \ j = 1,2,...,n \tag{15}$$

ise $Y_{[r:n]}$'ye $r-$inci sıra istatistiğinin eşleniği denir.

Teorem 3. $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $F(x,y)$ sürekli dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere $r-$inci sıra istatistiğinin eşleniği olan $Y_{[r:n]}$'nin dağılım fonksiyonu

$$G_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y/x) f_{r:n}(x)dx \tag{16}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x) f_{r:n}(x)dx \tag{17}$$

dir (Bhattacharya, 1984). Burada $f_{r:n}(x)$, $r-$inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonudur, yani

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x) \tag{18}$$

dir (David, 1981).

Teorem 4. $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $F(x,y)$ sürekli dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere, $1 \le r < s \le n$ için $r-$inci ve $s-$inci sıra istatistiklerinin eşlenikleri olan $Y_{[r:n]}$ ve $Y_{[s:n]}$'nin ortak dağılım fonksiyonu

$$G_{[r,s:n]}(y_1,y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y_1/x_1)F(y_2/x_2)f_{r,s:n}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{19}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r,s:n]}(y_1,y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1/x_1)f(y_2/x_2)f_{r,s:n}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{20}$$

dir (Bhattacharya, 1984). Burada $f_{r,s:n}(x_1,x_2)$, $r-$inci ve $s-$inci sıra istatistiklerinin eşleniklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur, yani

$$f_{r,s:n}(x_1,x_2) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-r)!}\times$$

$$\times[F(x_1)]^{r-1}[F(x_2)-F(x_1)]^{s-r-1}[1-F(x_2)]^{n-r}f(x_1)f(x_2)\ ,\ x_1<x_2 \tag{21}$$

dir.

3.1 İki Değişkenli FGM Tip Düzgün Dağılımların Eşlenikleri, Momentleri, Moment Çıkaran Fonksiyonları ve İndirgeme Bağıntıları

X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal dağılımları (0,1) aralığında düzgün dağılım olarak alınırsa, FGM tip ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y) = xy\{1+\alpha(1-x)(1-y)\}\ ,\ 0\le x,y\le 1\ ,\ -1\le\alpha\le 1 \tag{22}$$

ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = 1+\alpha(1-2x)(1-2y)\ ,\ 0\le x,y\le 1\ ,\ -1\le\alpha\le 1 \tag{23}$$

olarak yazılır. O zaman, $r-$inci sıra istatistiğinin eşleniğinin dağılım fonksiyonu

$$G_{[r:n]}(y) = y\left\{1+\alpha\left[1-2\frac{r}{n+1}\right](1-y)\right\} \tag{24}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r:n]}(y) = 1 + \alpha\left[1 - 2\frac{r}{n+1}\right](1-2y) \tag{25}$$

olarak elde edilir. $Y_{[r:n]}$'nin $k-$ıncı momenti

$$\mu_{r:n}^{(k)} = E(Y_{[r:n]}^{k}) = \frac{1}{k+1}\left\{1 - \alpha\left[1 - 2\frac{r}{n+1}\right]\left(\frac{k}{k+2}\right)\right\}, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{26}$$

dır. $Y_{[r:n]}$'nin beklenen değeri ve varyansı ise,

$$E(Y_{[r:n]}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\alpha}{3}\left[1 - 2\frac{r}{n+1}\right]\right\} \tag{27}$$

ve

$$Var(Y_{[r:n]}) = \frac{1}{12}\left\{1 - \frac{\alpha^2}{3}\left[1 - 4\frac{r}{n+1}\left(1 - \frac{r}{n+1}\right)\right]\right\} \tag{28}$$

olarak bulunur. $\alpha = 0$ için bilinen sonuçlar elde edilir.

$Y_{[r:n]}$'nin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{[r:n]}(t) = E\left(e^{tY_{[r:n]}}\right) = \frac{e^t - 1}{t}\left\{1 + \alpha\left[1 - 2\frac{r}{n+1}\right]\left[1 + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{e^t}{e^t - 1}\right)\right]\right\} \tag{29}$$

dir (Bairamov ve Bekçi, 1999).

$1 \le i_1 < i_2 \le n - r$ ve $1 \le j_1 < j_2 \le r - 1$ için;

Sıra istatistiklerinin eşleniklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları arasında,

$$g_{[r-j_1:n-i_1]}(y) - g_{[r-j_2:n-i_2]}(y) = 2\alpha\left[\frac{r-j_2}{n-i_2+1} - \frac{r-j_1}{n-i_1+1}\right](1-2y) \tag{30}$$

indirgeme bağıntısı vardır. Momentleri arasında,

$$\mu_{[r-j_1:n-i_1]}^{(k)} - \mu_{[r-j_2:n-i_2]}^{(k)} = 2\alpha\left[\frac{r-j_1}{n-i_1+1} - \frac{r-j_2}{n-i_2+1}\right]\frac{k}{(k+1)(k+2)} \tag{31}$$

ve moment çıkaran fonksiyonları arasında,

$$M_{[r-j_1:n-i_1]} - M_{[r-j_2:n-i_2]} = 2\alpha\left[\frac{r-j_2}{n-i_2+1} - \frac{r-j_1}{n-i_1+1}\right]\frac{e^t-1}{t}\left[1+2\left(\frac{1}{t}-\frac{e^t}{e^t-1}\right)\right] \quad (32)$$

indirgeme bağıntıları vardır.

3.2 İki Değişkenli FGM Tip Üstel Dağılımların Eşlenikleri, Momentleri, Moment Çıkaran Fonksiyonları ve İndirgeme Bağıntıları

X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal dağılımları üstel dağılım olarak alınırsa, FGM tip ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y) = \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right)\left\{1+\alpha e^{-x-y}\right\} \ , \ x,y \geq 0 \ , \ -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (33)$$

ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = e^{-x-y}\left\{1+\alpha\left[2e^{-x}-1\right]\left[2e^{-y}-1\right]\right\} \ , \ x,y \geq 0 \ , \ -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (34)$$

olarak yazılır. O zaman, $r-$inci sıra istatistiğinin eşleniğinin dağılım fonksiyonu

$$G_{[r:n]}(y) = 1-\left[1-\alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)\right]e^{-y} - \alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)e^{-2y} \ , \ y \geq 0 \quad (35)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r:n]}(y) = \left[1-\alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)\right]e^{-y} + 2\alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)e^{-2y} \ , \ y \geq 0 \quad (36)$$

olarak elde edilir. $Y_{[r:n]}$'nin $k-$ıncı momenti

$$\mu_{r:n}^{(k)} = E(Y_{[r:n]}^k) = k!\left[1-\alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right] \ , \ k = 1,2,3,... \quad (37)$$

dır. $Y_{[r:n]}$'nin beklenen değeri ve varyansı ise,

$$E(Y_{[r:n]}) = 1-\frac{\alpha}{2}\left(1-2\frac{r}{n+1}\right) \quad (38)$$

ve

$$Var(Y_{[r:n]}) = 1-\alpha\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)\left[1+\frac{\alpha}{4}\left(1-2\frac{r}{n+1}\right)\right] \quad (39)$$

olarak bulunur. $\alpha = 0$ için bilinen sonuçlar elde edilir.

$Y_{[r:n]}$'nin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{[r:n]}(t) = E\left(e^{tY_{[r:n]}}\right) = (1-t)^{-1} - \alpha\left(1 - 2\frac{r}{n+1}\right)\frac{t}{(1-t)(2-t)}, \ t < 1 \tag{40}$$

dir.

$1 \le i_1 < i_2 \le n - r$ ve $1 \le j_1 < j_2 \le r - 1$ için;

Sıra istatistiklerinin eşleniklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları arasında,

$$g_{[r-j_1:n-i_1]}(y) - g_{[r-j_2:n-i_2]}(y) = 2\alpha\left[\frac{r-j_1}{n-i_1+1} - \frac{r-j_2}{n-i_2+1}\right]e^{-y}\left(1 - 2e^{-y}\right) \tag{41}$$

indirgeme bağıntısı vardır. Momentleri arasında,

$$\mu^{(k)}_{[r-j_1:n-i_1]} - \mu^{(k)}_{[r-j_2:n-i_2]} = 2\alpha\left[\frac{r-j_2}{n-i_2+1} - \frac{r-j_1}{n-i_1+1}\right]k!\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \tag{42}$$

ve moment çıkaran fonksiyonları arasında,

$$M_{[r-j_1:n-i_1]} - M_{[r-j_2:n-i_2]} = 2\alpha\left[\frac{r-j_1}{n-i_1+1} - \frac{r-j_2}{n-i_2+1}\right]\frac{t}{(1-t)(2-t)}, \ t < 1 \tag{43}$$

indirgeme bağıntıları vardır.

KAYNAKLAR

BAIRAMOV, I. G. and BEKÇİ, M. (1999), *Concomitant of Order Statistics in FGM Type Bivariate Uniform Distributions*, İstatistik, Journal of the Turkish Statistical Association, 2 (2); 135-144.

BAIRAMOV, I., KOTZ, S. and BEKÇİ, M. (2001), *New Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions and Concomitants of Order Statistics*, J. Appl. Stat., 28 (5); 521-536.

BAIRAMOV, I. and ERYILMAZ, S. (2003), *Characterization of Symmetry and Exceedance Multivariate FGM Distributions,* Journal of Applied Statistical Science (to appear).

BALASUBRAMANIAN, K. and BEG, M. I. (1997), *Concomitant of Order Statistics in Morgenstern Type Bivariate Exponential Distributions,* Journal of Applied Statistical Science, 5 (4); 233-245.

BALASUBRAMANIAN, K. and BEG, M. I. (1998), *Concomitant of Order Statistics in Gumbel's Bivariate Exponential Distributions,* Sankhya, The Indian Journal of Statistics, 60, Series B, Pt. 3; 399-406.

BHATTACHARYA, P. K. (1984), *Induced Order Statistics: Theory and Applications,* Handbook of Statistics (P. R. Krishnaiah and P. K. Sen eds), 4; 383-403.

DAVID, H. A. (1981), *Order Statistics,* 2 nd edn., John Wiley, New York.

FARLIE, D. J. G. (1960), *The Performance of Some Correlation Coefficients for General Bivariate Distribution,* Biometrika, 47; 307-323.

GUMBEL, E. J. (1960), *Bivariate Exponential Distributions,* Journal of American Statistical Association, 55; 698-707.

HUANG, J. S. and KOTZ, S. (1984), *Correlation Structure in Iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions,* Biometrika, 71, 633-636.

HUANG, J. S. and KOTZ, S. (1999), Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions. A Tough Hill to Climb, Metrika, 49; 135-145.

JOHNSON, N. L. and KOTZ, S. (1975), *On Some Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions, Communications in Statistics,* Theor. Meth., 4; 415-427.

JOHNSON, N. L. and KOTZ, S. (1977), *On Some Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions-II: Regression, Correlation and Further Generalizations,* Communications in Statistics, Theor. Meth., 6; 485-496.

LEHMANN, E. L. (1966), *Some Concepts of Dependence, Annals of Mathematical Statistics,* 37; 1137-1153.

MORGENSTERN, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik, 8; 234-235.

SCHUCANY, W. R., PARR, W. C. and BOYER, J. E. (1978), *Correlation, Structure in Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions,* Biometrika, 65 (3); 650-653.

THE DISTRIBUTIONS AND THE MOMENTS OF CONCOMITANTS OF ORDER STATISTICS FOR BIVARIATE FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN DISTRIBUTIONS

ABSTRACT

In this paper, the distributions and the moments of concomitants of order statistics for bivariate Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) distributions are studied. Firstly, FGM distributions and their admissible range of additional parameter are given. It is shown that positive quadrant dependence property is proved for bivariate FGM distributions, and the distributions of concomitants of order statistics are presented. The distributions, the moments and the moment generating functions of concomitants of order statistics are found for uniform and exponential bivariate FGM distributions. The recurrence relations are obtained for the moments and the moment generating functions of concomitants of order statistics.

Key Words : *Admissible Range, Concomitants Of Order Statistics, FGM Distributions, Moment, Moment Generating Function, Positive Quadrant Dependence, Recurrence Relation, Order Statistics.*