

KAOS VE LYAPUNOV ÜSTELLERİNİN TAHMİN EDİLMESİ

Tarhan SERİN*

ÖZET

Bu çalışma temel olarak Lyapunov üstellerinin tahminine dayanır. Kaos ve Lyapunov üstelleri arasındaki bağıntıya kısaca değinilmiştir. Diğer bir nokta ise simülasyon teknikleri ile tahmini yapılan üstellerin dağılım özelliklerinin incelenmesidir. Lojistik fonksiyon aracılığı ile üretilen veriler üzerinden bulunan Lyapunov üstellerinin tahminlerinin dağılımı, Normal dağılım veya Weibull dağılımı gibi görünmesine rağmen, yapılan uyum iyiliği testleri bunların normal dağıldığı düşüncesini desteklemediğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler : Çekiciler; Lojistik Fonksiyonu, Parametre Dışı Tahmin, , En Yakın Komşu Metodu , R-adik Dönüşüm (Map), Dinamik Sistemler, Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemler, Doğrusal Olmayan Salınımlar, Kaos, Lyapunov Üstelleri, Periyodik Olmayan ve Doğrusal Olmayan Davranışlar.

1.GİRİŞ

Bu çalışmanın kapsamı Lyapunov üstellerinin tahmini ve yorumu üzerinedir. Kaos ile Lyapunov üstelleri arasında sıkı bir bağımlılık bulunur. Gerçi kaos kavramına standart bir tanım getirilememiş ve kabul edilmiş genel bir görüş mevcut değildir. Lyapunov üstellerinin yorumu kaos konusu ile iç içe olduğundan ilk önce kaos kavramına değinilmelidir.

Özellikle 1970 li yıllardan sonra daha gelişmiş bilgisayarlar yardımıyla diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlenmeleri olanaklı hale geldikçe kaotik olarak adlandırılan bir sistemin davranış özelliklerinin eskiden sanıldığı kadar belirsizlik ve karmaşa barındırmadığı görülmekle birlikte daha farklı ve anlaşılması zor kadastrofik özellikler fark edilmiştir. Bunlarla birlikte modeldeki özel bazı parametrelerin fonksiyonel özelliklerinin ortaya çıkması sonucu çatallanma (bifurcation) ile birlikte bu kavramlar yeni duyulmaya başlanmasına rağmen Poincare böylesi bir durumdan daha

* Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye

önce bahsetmiştir. Elbette 1980'li yıllar ve sonrasında fizik ile birlikte biyolojik oluşumların, kimyasal olayların, birçok mühendislik problemlerinin arka planında kaos fenomeninin varolduğu görülmekle birlikte çok daha karışık konular olan ekonomi, sosyoloji, psikoloji ve politik konjonktürlerde kaosu varlığı konusunda büyük ölçüde fikir birliği bulunmaktadır. Bu yöndeki en büyük delil kuşkusuz bu fenomenlerin tümünün hemen hemen eğrisel dinamik yapıları barındırmaları ve bir şekilde kaosu gündeme getirmeleridir. Bir çok bilimsel verilerin davranış şekillerinde kaosu varlığı gözlenmektedir. Eğer bir oluşumun kaotik özellikler gösterdiği saptanabilirse oluşumun modellenmesi ve buradan da yakın gelecek tahminlerinin yapılabilmesi mümkündür.

Bir sistem de stokastik veya kaotik yapıdan hangisinin baskın olduğuna Lyapunov üstelleri aracılığı ile karar verilebilir. Dominant Lyapunov üsteli pozitif bir sayı ise sistemin kaotik olduğuna karar verilecektir.

2. LYAPUNOV ÜSTELLERİNİN TANIMI

Bir sistemin dinamik yapısını ortaya koyan diferansiyel denklem

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow x = x(t) \quad (1)$$

ifadesi aynı zamanda dinamik model olarak anılır. Belirli başlangıç şartları ile ya da bir eğrinin geçtiği bir nokta yardımıyla özel bir çözüm bulunur. Buna bağlı olarak başlangıçta çok yakın iki noktadan başlayan iki ayrı yörünge zamana karşı üstel olarak birbirlerinden uzaklaşabilirler veya yakınlaşabilirler; en azından başlangıca yakın bir bölgede bir ortalamadan bahsedilebilir. Eğer uzaklaşma mevcutsa sistemin kaotik özellikler gösterdiği söylenebilir. Tabii ki bu durumda çizilen eğrisel yörüngeyi başlangıç şartları belirler, yani başlangıç şartlarına duyarlı bir bağımlılık söz konusudur. Daha sonra ifade edileceği gibi, pozitif Lyapunov üstelinin varlığı ile incelenen sistemin başlangıç şartlarına duyarlı bir bağımlılığına işaret eder (Jones and Kasap (1995), Kasap (1995)).

Vektör değişkenli dinamik bir model, "Eş. 1" tarzı bir gösterimde "x" vektör değişkeni sistemin tüm değişkenlerini açıklayan vektördür. Böylece diferansiyel denklemler sistemi söz konusudur. Başlangıç şartları ile x_0 ve $x_0 + \eta_0$ gibi iki ayrı başlangıç şartı olsun; ancak burada η_0 çok küçük bir fark vektörüdür. Bu durumda eldeki diferansiyellerin integrali ile çizilen iki ayrı yörünge uzun bir süre boyunca hemen hemen aynı yoldan ilerleyecektir. Eğer "Eş. 1" sistemi kaotik bir yapıyı gösteriyorsa zaman ilerlerken gelecekte zaman ekseninde küçük olabilecek bir aralık içerisinde iki yörünge aniden birbirlerinden uzaklaşır. Şimdi "Eş. 1" ile izlenen yollardan biri, en azından başlangıç şartı x_0 olan bir yol bilinir. Ancak diğer bir başlangıç şartı $x_0 + \eta_0$ olan çok yakın diğer bir yörünge için şunlar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{x} + \dot{\eta} &= f(x) + Df(x)\eta + O(\eta^2) \end{aligned}$$

Eğer η çok küçük ise $O(\eta^2)$ güven içinde ihmal edilebilir. Böylece şu ifade özde toparlanabilir:

$$\dot{\eta} = Df(x)\eta \rightarrow \eta = \eta(t) \quad (2)$$

Bu şekilde x noktasına göre jakobyen matrisi $Df(x)$ ile bu matrisin özdeğerleri Lyapunov üstellerinin bir yorumunu verir. Ancak bu ifade "Eş. 1" ifadesi ile birlikte düşünülmelidir. Böylece "Eş. 1" ile "Eş. 2" ifadeleri bir sistemi oluşturarak $Df(x)$ ' in "Eş. 1" ile belirlenmesi sağlanabilir. Ancak formel olarak iki ayrı başlangıç koşulu üzerinden "Eş. 1" ifadesi integre edilerek iki ayrı yörünge bağımsız olarak hesaplanabilir, bu yol genel bir yaklaşım olabilir. Başlangıç şartları çok yakın olmakla birlikte zaman ilerledikçe yörüngelerde bir ayrılık belirlediği anda iki ayrı yörünge ayrı yollarda ilerleyeceğinden iki yörünge aralarında bir bağımlılığın var olduğunu düşünmemek gerekir. Eğer bu şekilde yörüngeler arasında bir uzaklaşma mevcutsa pozitif Lyapunov üsteli söz konusu olarak, sistemin kaotik olduğu ifade edilebilir. Eğer $t=0$ anında $\eta=\eta_0$ ise "Eş. 2" ifadesinin çözümü

$$\eta = \eta_0 e^{\lambda t}$$

olarak bulunacaktır. İfadedeki η vektörleri burada onların normu şeklinde düşünülmelidir, ayrıca bir varsayım gereği t 'nin fazla büyük olmayan bir değerden küçük kalması istenmelidir. Ayrıca bir kabul ile başlangıca yakın t zamanlarında $Df(x)$ matrisi sabit gibi alınabilir, en azından iki komşu yörünge beraber yol aldığı süre boyunca sabit gibi değerlendirilebilir (Medio (1992)).

Bir çekici (yörüngeler topluluğu şeklinde düşünülebilir) üzerindeki bir yörünge, başlangıç şartlarına olan bağımlılığı oldukça duyarlıdır. Lyapunov üstelinin pozitif olduğu durumda, birbirine oldukça yakın noktalardan başlayan iki ayrı yörünge birbirinden hızla uzaklaşacaklar ve tamamıyla çok farklı geleceklere sahip olacaklardır. Bu durumda uzun dönem tahminlerini hesaplamak pratikte imkansız ve anlamsızdır. Buradaki açıklamalar kaos üzerinde yapılan tanımlamalarının temelini oluşturur (Delecroix, Guegan and Leorat (1997)).

2.1. Kaos Tanımı

Henüz evrensel anlamda kaos tanımı kabul edilmiş olmamakla birlikte, genel olarak başlangıç şartlarına duyarlı bağımlılık gösteren deterministik sistemlerde, uzun dönemli periyodik olmayan davranışlar mevcutsa, bu periyodik olmayan davranışlara kaos denir (Strogatz (1994)).

1. Uzun dönemli periyodik olmayan davranış ifadesinden söylenmek istenen yörüngelerin bir noktaya, periyodik bir yörüngeye ya da kısmen periyodik bir yörüngeye (quasiperiodic orbit) doğru yakınsamaması anlamındadır. Pratikte bu tür yörüngelere bazen sıkça rastlanabilir. Örneğin, periyodik olmayan bu tür yörüngelere neden olan bir başlangıç şartları kümesi mevcut olabilir, ya da rastgele olarak seçilen başlangıç şartlarına bağlı olarak bu tür yörüngeler oluşturulabilir.
2. Deterministik tanımından kastedilen sistemin içinde rastgele ya da gürültü şeklinde değişkenlerin ve parametrelerin bulunmamasıdır. Buradaki sistemin uyumsuzluğunun kaynağı gürültünün (white noise) neden olduğu etkilerin yokluğunun haricinde, daha çok sistemin eğriselliğindedir.

3. Başlangıç şartlarına duyarlı bağımlılık ifadesinden anlatılmak istenen çok yakın yörüngelerin birbirlerinden üstel bir hızla uzaklaşmalarıdır, yani sistemin pozitif Lyapunov üsteli vardır.
4. Ayrıca üç ya da daha fazla boyutlu dinamik sistemlerde kaos ortaya çıkabilmektedir.

2.2. Çekiciler

Çekici tanımını doğrudan ve bütün özelliklerini kapsayan yeterli bir tanımını vermek zor olmakla birlikte şöyle bir tanım literatürde uygun görülmektedir: "Zayıf bir ifade ile, bir küme (bir grup) komşu yörüngelerin yakınsayarak oluşturdukları nesneye çekici denir." Durağan sabit noktalar ve durağan limit çevrimler çekiciye birer örnektirler (Strogatz (1994)).

2.3. Fonksiyonel Dönüşümler

Fonksiyonel (map), sistemin eşit zaman aralıklarındaki konumunu veren bir fonksiyondur. Sistemin bir önceki konumu girdi olarak fonksiyonda kullanılırsa yani fonksiyon içinde değişken olarak bulunursa ve fonksiyonun çıktısı yani görüntüsü şu anki konumunu verir.

Tek boyutlu dönüşüm: sürekli bir fonksiyon φ olmak üzere reel eksen üzerinden yine kendisine bir dönüşüm yapmak üzere $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ şeklinde ifade edilir. Eğer bir x^* noktası $x^*=\varphi(x^*)$ olacak şekilde varsa bu sabit noktadır, böylece yörünge ileri iterasyonlarda daima bu x^* noktasından geçecektir. Sabit nokta x^* 'in durağanlığının tespiti için çok küçük bir δ değeri ile yakın bir yörünge $x_n=x^*+\delta_n$ olsun. Böylece yakın yörüngelerin çekildiği ya da itildiği konusunda bir şeyler söylenebilir. Taylor açılımı (expansion) ile,

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

$$x_{n+1}=x^*+\delta_{n+1}=\varphi(x^*+\delta_n)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)\delta_n+O(\delta^2)$$

$$\delta_{n+1}=\varphi'(x^*)\delta_n+O(\delta^2)$$

yazılabilir; böylece n 'in artışı ile δ_n 'nin artması ya da azalması hakkında bir şeyler söylenebilir. Eğer $O(\delta^2)$ ihmal edilebiliyorsa doğrusallaştırılmış dönüşüm $\delta_{n+1}=\varphi'(x^*)\delta_n$ özdeğeri ya da çarpanı $\mu=\varphi'(x^*)$ ile elde edilir. Genel olarak artan n ile birlikte $\delta_n=\mu^n\delta_0$ şeklinde alınabilir. Eğer $|\mu|<1$ ise $n\rightarrow\infty$ ile $\delta_n\rightarrow 0$ olur, böylece sabit nokta x^* doğrusallaştırılmış durağandır. Yani yakın yörünge çekilir. Aksi halde $|\mu|>1$ ise sabit nokta durağan değildir, yakın yörünge itilir. Buradaki yerel durağanlık hakkındaki söylenenler doğrusallaştırmaya dayanmakla birlikte orijinal eğrisel dönüşümü de içine alır. Fakat marjinal bir durum olan $|\varphi'(x^*)|=1$ hakkında doğrusallaştırma ile pek bir şey söylenemez, bununla birlikte ihmal edilmiş terim olan $O(\delta^2)$ yerel durağanlığı belirler (Strogatz (1994)).

2.4. Lyapunov Üsteli

Bir dönüşüm periyodik olmayan yörüngeler üretebilir, ve bu davranışın gerçek bir kaos olup olmadığından şüphe edilebilir. Kaotik bir sistemin başlangıç şartlarına hassas bir bağımlılığa sahiptirler ve komşu yörüngeler ortalamada üstel olarak birbirlerinden uzaklaşırlar. Bir başlangıç şartı x_0 ve buna çok yakın olan $x_0 + \delta_0$ noktası verilmiş olsun. Yapılan n iterasyondan sonra yörüngeler arasındaki fark δ_n olsun. Eğer $|\delta_n| \cong |\delta_0| e^{nL}$ ise burada, L , Lyapunov üsteli olarak adlandırılabilir. Arka arkaya yapılan n iterasyonu gösteren dönüşüm skalar değişkenli bir fonksiyonel olmak üzere $x_n = \varphi^n(x_0)$ olarak gösterilebilir. Ayrıca

$$\delta_n = \varphi^n(x_0 + \delta_0) - \varphi^n(x_0)$$

ifadesi yardımıyla logaritmik olarak ve $\delta_0 \rightarrow 0$ için,

$$L \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\varphi^n(x_0 + \delta_0) - \varphi^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| (\varphi^n)'(x_0) \right|.$$

Buradan genelleştirilmiş hali ise,

$$L \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \varphi'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\varphi'(x_i)|$$

sonucuna varılır. Son ifadede eğer $n \rightarrow \infty$ limiti mevcut ise bu limit x_0 'dan başlayan yörüngenin Lyapunov üsteli olarak tanımlanır:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\varphi'(x_i)| \right].$$

Dikkat edilirse L , x_0 'a bağımlıdır. Böyle olmakla birlikte bir çekicinin çekim tabanındaki her x_0 için bu değer (L) aynıdır (Lorenz (1993), Medio (1992), Strogatz (1994)).

2.5. Sürekli ve Kesikli Fonksiyon Gösteriminde Lyapunov Üstelleri

Sürekli bir fonksiyonu ima eden "Eş. 1" gibi vektörel bir ifade varsa $\dot{x} = f(x)$ ve başlangıçta çok küçük bir fark vektörü η_0 mevcutsa ilerleyen yol boyunca bir t zamanı sonunda fark vektörü η 'ya ulaşır. Bu durumda Lyapunov üsteli tanımı

$$L = \frac{1}{t} \ln \frac{\|\eta\|}{\|\eta_0\|}$$

dır. Dikkat edilirse $\|\eta\|/\|\eta_0\|$ oranı zamana bağlı olarak üstel değişim geçirme eğilimindedir. Kaotik bir sistem için üstel bir artış söz konusudur.

Kesikli gösterim $x_k = \varphi(x_{k-1})$ şeklinde ifade edildiğinde küçük bir δ_0 vektörel farkı ile Lyapunov üsteli tahmini yapılabilir. Bu uzaklık artış oranlarının logaritmalarının zaman içindeki ortalamaları Lyapunov üstelidir. Lyapunov üsteli

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right\|$$

ifadesi daha önceki tanımların bir devamıdır. Eğer $\|\delta_n\|/\|\delta_0\|$ için $\sup_n (L_n) = L$ dikkate alınırsa dominant Lyapunov üsteli elde edilir (Jones and Kasap (1995), Kasap (1995), Strogatz (1994)).

2.6. Düzeltme Teknikleri

Önerilen regresyon modelleri dahil verileri düzelten daha doğrusu genel yapıyı ortaya koymaya çalışan tüm teknikler düzeltme teknikleri çatısı altında toparlanabilir. Ancak parametre tahminlerinin uzun zaman alıcı olması ve bazen önerilen regresyon modelleri ile verilerin uyumlu olamaması nedeniyle parametre dışı düzeltme tekniklerinin kullanılmaları daha anlamlı olabilir. Özellikle türev tahminlerinin yapılabilmesi için verilerin düzgünleştirilmesi gerekir. Bu sayede Lyapunov üstelleri tahmin edilebilir (Serin (2003)).

3. SİMÜLASYON

İlk önce Lyapunov üsteli tahmini için map anlamında dönüşümün çıkarılmasına yönelik bir fikir verilmeye çalışılmıştır. Bu dönüşüm yardımıyla türev tahminleri hesaplanarak Lyapunov üsteli tahmini bulunacaktır (Delecroix, Guegan and Leorat (1997)).

3.1. Deterministik Dinamik Sistemlerde Lyapunov Üstellerinin Tahmini

Bu başlık altındaki konu Delecroix, Guegan ve Leorat(1997)'in bir çalışmasına dayanmaktadır. Dinamik sistemde gözlemlerin $X_t \in \mathbb{R}^d$ olacak şekilde d boyutlu vektörel

$$X_t = \varphi(X_{t-1}) \quad (3)$$

gibi bir yapıdan geldikleri varsayılabilir. Burada D , φ 'nin tanım bölgesi (Domain) olmak üzere D ' den D 'ye bazı dönüşümler φ ile gösterilmiştir. Map sonuçta bir dönüşümü gösteren bir fonksiyondur. Yapılan bir tanım ile başlangıç şartlarına ve ergodikliğe duyarlı olan dinamik sistemlere şimdilik kaos denecektir. Bu çalışmada, başlangıç şartlarının duyarlılığının belirlenmesi ile ilgilenilmiştir. $d = 1$ durumunda, iyi bilinen bir kavram olarak sistemin Lyapunov üstelleri sayesinde şu şekilde bulunur, L reel bir sayı olmak üzere

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d}{dx} \varphi^n(x) \right| \quad (4)$$

olarak ifade edilmiştir. Burada φ^n , φ fonksiyonunun n 'inci iterasyonunu ifade eder.

Temel olarak gözlemlerin aşağıdaki süreçlerden birinden geldiği varsayılır:

1. Gözlemler olan veri seti X_1, X_2, \dots, X_n

$$X_t = \varphi(X_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (5)$$

den üretilmişlerdir, burada X_t ve ε_t rastgele değişkenlerdir.

2. Gözlemler veri seti Y_1, Y_2, \dots, Y_n şu şekilde üretilmiştir:

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t$$

burada

$$X_t = \varphi(X_{t-1}) \quad (6)$$

ve Y_t ile ε_t rastgele değişkenler olup X_t deterministiktir.

İlk durumda Lyapunov üstelinin tahmini problemi genelde ε_t değerinin üzerindeki varsayımlarla ilgili olarak X_t değişkenlerinin asimptotik bağımsızlığı varsayımları altında $E[X_t|X_{t-1}]$ regresyon fonksiyonu tahminine indirgenir. İkinci durum ayrıştırma probleminin klasik bir halidir. Bu şekildeki görüş kaos çalışmaları için çok daha gerçekçi bir durumdur. Önceki tamamı ile rastgele modelde, fiziksel mantık içerisinde kaosu tam belirginliği ya da varlığı hakkında birşey söylenemez. Burada ikinci durum için ilk yaklaşım olarak, gürültüden arındırılmış olarak "Eş. 3" ifadesi ile belirlenmiş gerçek deterministik kaos X_t değerlerine bağlı olarak Lyapunov üsteli L hesaplanacaktır. Olağan k -en yakın komşulukların çekirdek (kernel) tahminlerine bağlı olarak φ tahminin standart orijinal tanımı yapılabilir.

Şimdi simülasyonlar için kullanılacak iki sistem verilmiştir:

1. Lojistik fonksiyonu şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varphi(x) = ax(1 - x), x \in [0, 1], a \in [0, 4], \quad (7)$$

2. r -adik fonksiyonu şöyle tanımlanmıştır:

$$\varphi(x) = rx \pmod{1}, x \in [0, 1], r > 1. \quad (8)$$

İlk sistemde φ 'nin sürekli olduğu not edilmelidir. Ayrıca bu dönüşümün dinamik özellikleri iyi bilinmektedir. Diğer bir dönüşüm olan r -adik dönüşümle ilgili olarak φ 'nin süreksizlik noktalarının varlığı bir ilgi alanıdır.

3.2. Kaotik Dönüşümün Tahmini

Bu bölümde "Eş. 3" ifadesi ile tanımlanan φ için iki ayrı tahmin önerilmiştir. Bunlar en yakın komşuluklar metoduna dayanır. Farklı tahminlerin temelde aynı prensiplere bağlı olduğu ve birbirlerini tamamladığı görülecektir. Önceki iki sisteme bağlı olarak birkaç simülasyon verilmiştir.

i^n, i^l ve i^r indeksleri gözlem verisindeki üç elemanı ifade etsin. Bunlar x 'in en yakın komşulukları olan x 'in sol tarafındaki enyakın komşusu i^l , x 'in sağ taraftaki en yakın komşusu i^r , ayrıca $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ sıralanmış örneklerdir. İlgilenilen iki tahmin şunlardır:

1. Birinci tahmin: en yakın komşu:

φ 'nin tanım bölgesi D ' deki bir nokta x olsun ($x \in D$), öyle ise φ için ilk tahmin

$$\hat{\varphi}_n^1(x) = X_{i^{n+1}}$$

olarak bulunur. $X_{i^{n+1}}$, x 'in sol en yakınındaki $x_{i'}$ noktasının görüntüsüdür: $\varphi(x_{i'}) = X_{i^{n+1}}$, elbette $X_{i^{n+1}}$, φ 'nin görüntü kümesinde bulunur: $X_{i^{n+1}} \in \text{Range}$.

2. İkinci tahmin: iki tane en yakın komşu:

D ' deki bir nokta x olsun. φ için φ_n^2 tahmini

eğer $X_{(1)} < x < X_{(n)}$ ise

$$\hat{\varphi}_n^2(x) = (x - X_{i'}) \frac{X_{i'^{n+1}} - X_{i'^{n+1}}}{X_{i'^{n+1}} - X_{i'^{n+1}}} + X_{i'^{n+1}}$$

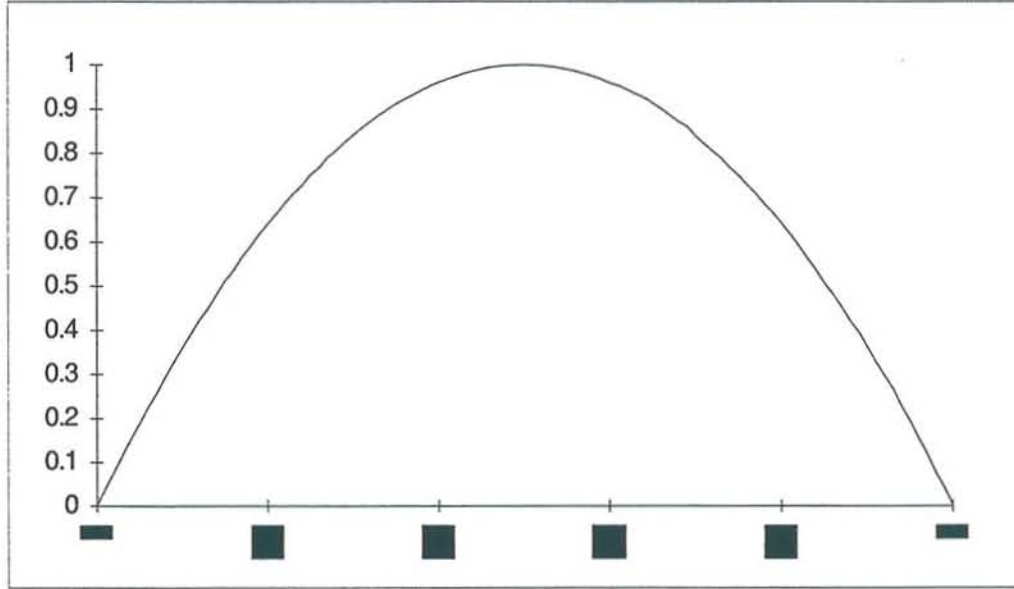
değil ise $\hat{\varphi}_n^2(x) = \hat{\varphi}_n^1(x)$

Aynı yol ile φ 'nin türevinin tahmini elde edilebilir. $\varphi_n(x)$ 'nin türevi şöyle tanımlanabilir:

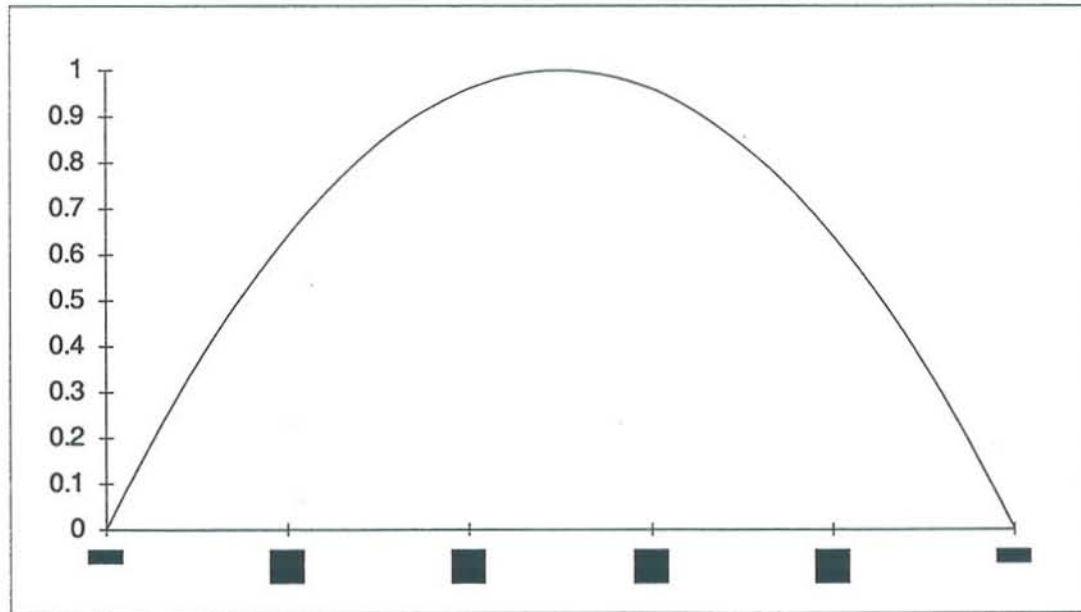
$$\hat{\varphi}_n'(x) = \frac{X_{i'^{n+1}} - X_{i'^{n+1}}}{X_{i'^{n+1}} - X_{i'^{n+1}}}$$

İki dinamik sistemle ilgili olarak bazı simülasyonlar verilmiştir. "Eş. 7" ile verilen lojistik dönüşüm ve "Eş. 8" ile verilen r-adik fonksiyon önceki sonuçların ışığında gösterilecektir.

Şekil 1'de $a=4$, $n=1000$ için φ fonksiyonunun tahmini φ_n^1 oluşturuldu. Şekil 2'de aynı yol ile φ_n^2 tahmini yapıldı. Tahminler tam çizgi ile gösterilmekle birlikte gerçek fonksiyonların düzgün birer parabol oldukları bilinir.



Şekil 1. En yakın komşuluk metoduna göre lojistik mapin oluşturulması, yatay eksen ve dikey eksen ard arda lojistik dönüşümle oluşturulan gözlemlerdir.

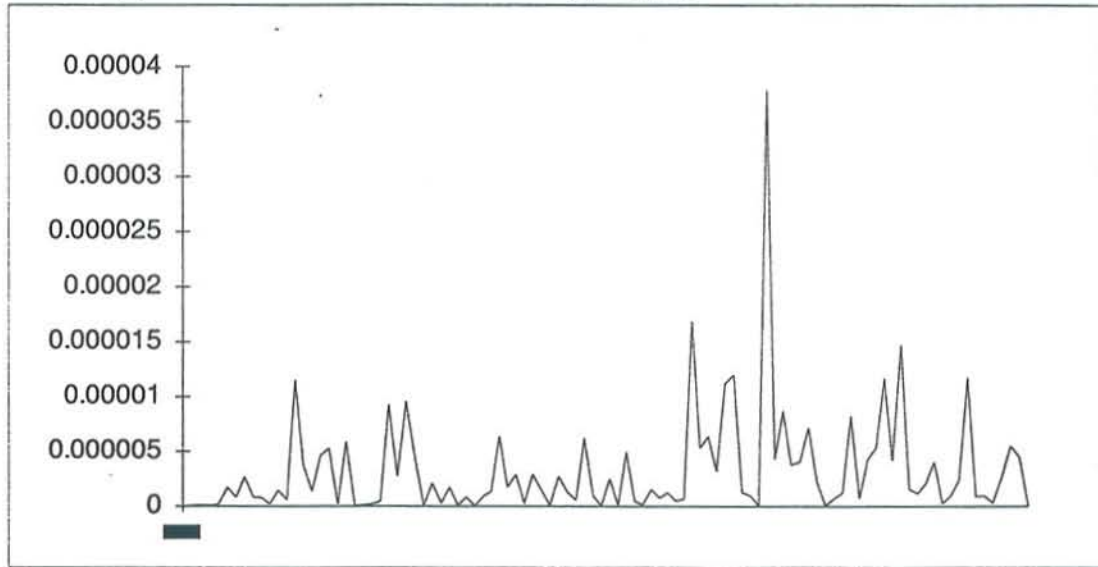


Şekil 2. En yakın iki komşu metoduna göre lojistik dönüşümün oluşturulması

Öylece Şekil 3 ve 4'te en yakın komşu metoduna ve iki en yakın komşu metoduna göre gerçek dönüşüm φ ile tahmin dönüşümü $\hat{\varphi}_n$ arasındaki farkı olan artıklardan $(\varphi - \hat{\varphi}_n)$ grafiği verilmiştir.

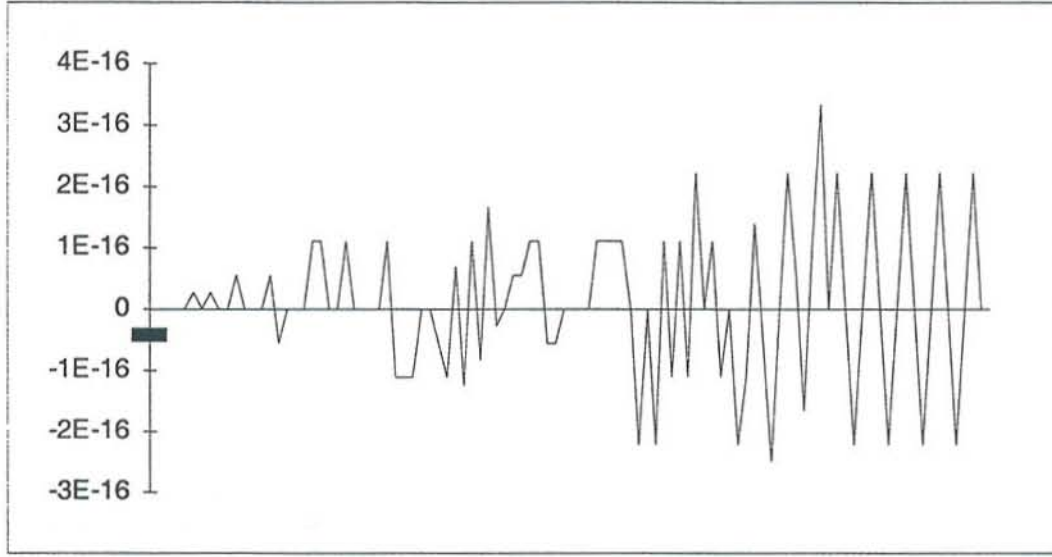


Şekil 3. En yakın komşu metoduna göre gerçek dönüşüm φ ile tahmin dönüşümü $\hat{\varphi}_n^1$ arasındaki farkı olan artıkların $(\varphi - \hat{\varphi}_n^1)$ çizimi



Şekil 4. En yakın iki komşu metoduna göre gerçek dönüşüm φ ile tahmin dönüşümü $\hat{\varphi}_n^2$ arasındaki farkı olan artıkların $(\varphi - \hat{\varphi}_n^2)$ çizimi

Ayrıca $n=1000$ ile iki en yakın komşu metoduna göre oluşturulan gerçek r -adik dönüşüm ($r=3$ için) ve tahmini dönüşümü arasındaki farkı ifade eden artıklar şekilde verilmiştir. Bakınız Şekil 5.



Şekil 5. En yakın iki komşu metoduna göre gerçek dönüşüm ile tahmin dönüşümü arasındaki fark olan artıkların çizimi

İki dinamik sistemin iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Beşinci şekilde r -adık dönüşümün süreksizliklerinin hangi değerler olduğu bilinmekle birlikte artıkların çok küçük olması dolayısı ile gerçekten uyumun çok başarılı olduğu söylenmelidir. Ayrıca artıkların sıralamasının da yer yer periodik özellik göstermesi ilginçtir; buna bağlı olarak artıkların toplamı da sıfıra çok yakındır. Ancak son şekilde söz konusu artıklar için şu durum göz önünde bulundurulmalıdır: bilgisayarda hesaplamalar 16 basamak üzerinden yapıldığından bunun artıklar üzerinden bir alt sınır olduğudur.

3.2.1. Lyapunov Üstellerinin Tahmini

Lyapunov üstelini tahmin etmek için ilk önce φ^n tahminine gereksinim vardır. Sonsuza kadar artarak giden tamsayılar dizisi $p(n)$ olsun (n pozitif tamsayıdır) ve $x \in D$ tanım kümesinin bir noktası olsun. L Lyapunov üstelinin doğal bir tahmini olarak

$$\hat{L} = \frac{1}{p(n)} \ln \left| \left(\hat{\varphi}^{p(n)} \right)' (x) \right|, \quad (9)$$

tüm $x \in D$ 'ler için, burada $(\hat{\varphi}^{p(n)})'$ ifadesi $\varphi^{p(n)}$ tahminini gösterir. Elbette $n \rightarrow \infty$ iken $p(n) \rightarrow \infty$ olur. $\varphi^{p(n)}$ ve onun türevlerinin tahminlerini bulmak için, gözlemler seti $X_1, \dots, X_{p(n)}$, $1 \leq i \leq p(n)$ kullanılabilir, çünkü deterministik modelde kesinlikle $X_{p(n)+i} = \varphi^{p(n)}(X_i)$ dir. Bu arada $\varphi^{p(n)}$ için tanımlanan en doğal tahmin daha önce verildiği gibi

$$\hat{\varphi}^{p(n)}(x) = \frac{X_{i'+p(n)} - X_{i'+p(n)}}{X_{i'} - X_{i'}} \quad (10)$$

dir. Burada $X_1, \dots, X_{p(n)}$ arasında bulunan x 'in sol ve sağ en yakın komşuları sırasıyla $X_{i'}$ ve $X_{i'+1}$ olarak gösterilir. İki gözlem değeri $X_i, i \leq p(n)$ arasında x bulunduğu

bu tahmin iyi tanımlanmıştır. L 'nin x 'den bağımsız olması gibi, "Eş. 4" ifadesindeki $\varphi^{p(n)}$ 'nin yerine tahmini olan $\hat{\varphi}^{p(n)}$ kullanılarak L bulunabilir.

3.2.2. Tahminin Yakınsaması

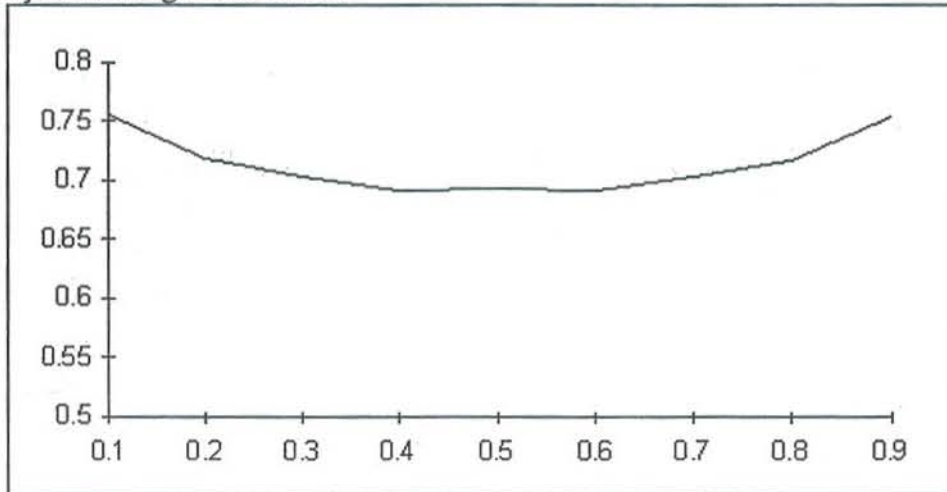
Verilerin stokastik olduğu durumlarda $\varphi^{p(n)}(x)$ 'nin doğal tahmini, x 'in enyakın komşuları olan k adet X_i noktalarının i indisleri için $X_{p(n)+i}$ gözlemlerinin ortalaması olacaktır. Şimdi burada olduğu gibi verilerin deterministik olduğu durumda, gözlemlerde hatanın bulunmamasından dolayı k enyakın komşuların ortalamasını bulmaya gerek yoktur, böylece $X_{p(n)+1} = \varphi^{p(n)}(X)$ 'dir.

3.3. Simülasyon

Bu alt bölümde verilen Deterministik Dinamik Sistemlerde Lyapunov Üstellerinin Tahmini konusundaki yaklaşım için şimdi Lyapunov üstelinin hesabına yönelik bazı simülasyonlar gösterilecektir. Şimdi $a=4$, $n=10000$ ve $p(n)=\ln(n)$ için lojistik dönüşüm göz önünde bulundurularak simülasyon yapılmıştır. Bazı x 'ler için $L^{(1)}$ hesaplandıktan sonra sonuçlar şunlardır:

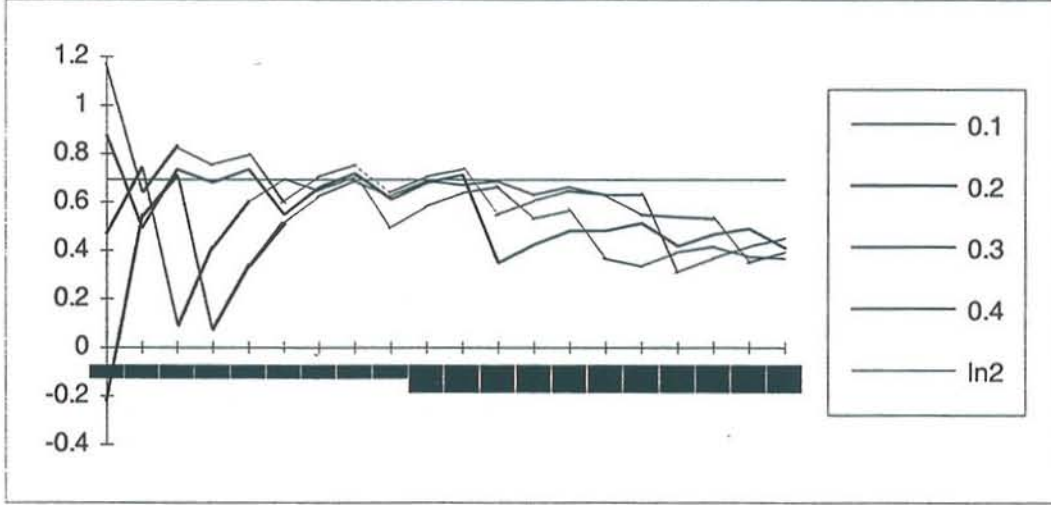
x	$L^{(1)}$
0.1	0,754751494
0.2	0,718614982
0.3	0,703561441
0.4	0,69073256
0.5	0,042895372
0.6	0,690807872
0.7	0,703249114
0.8	0,716647056
0.9	0,754092514

L 'nin gerçek değeri $\ln(2)=0.69$ dir (William Tong'un "Nonlinear Time Series", 1995 kitabında bulunur); $x=0.5$ olduğunda sabit bir noktayı işaret eder ve limitte 0 olması beklenir, ancak sadece $x=0.5$ bir süreksizlik noktasıdır. Şekil 6'da buradaki tüm açıklamalar görülmektedir.



Şekil 6. Lojistik dönüşüm $a=4$, $n=10000$, $p(n)=\ln(n)$ için yatay eksende farklı x değerlerinin başlangıç olarak seçildiği durumlar için dikey eksende Lyapunov üstellerinin tahminleridir.

$p(n)$ fonksiyonunda L , $a=4$ ile lojistik dönüşüm için Şekil 7’de temsil edilmiştir, böylece $p(n)$ ’nin seçimindeki önem görülmüş olur. Şekil çiziminde $n=10000$ deneme kullanılarak aynı şekil üzerinde birçok farklı başlangıç değerlerinin örneğin $x=0.1$, $x=0.2$, $x=0.3$ ve $x=0.4$ seçiminde L ’nin davranışları görülmektedir. Tüm durumlar için $p(n)=\ln(n)$ olduğu zaman en iyi tahminin elde edildiği görülebilmektedir. Şekil 7’den gerçek değer düz çizgi halinde $\ln(2)$ olarak görülür. Bununla beraber $p(n)$ dizisinin oldukça geniş sınıfı için L tahmininin benzer davranışları gösterdiği gözlenmiştir.



Şekil 7. Lojistik dönüşümün ($a=4$ için) farklı başlangıç değerlerine göre yatay eksende $p(n)=\ln(n)$ fonksiyonu doğrultusunda aldığı değerler, dikey eksende Lyapunov üstelinin tahmini

Kaotik dönüşüm ve türevinin birbirlerini onaylayan tahminleri verilmiştir. Bu metod şimdi k -boyutlu duruma genişletilebilir. Lyapunov üsteli için simülasyonla elde edilen sonuçlar oldukça başarılıdır. Bir çok sınıftan dinamik sistemlerin tahminlerinin yakınsamasını sağlayacak varsayımların iyileştirilmesine ihtiyaç vardır. Sistemde gürültü olduğu durumlarda, bu metod dikkatle kullanılmalıdır. Bu çalışmada regressogram yaklaşımının veya k -en yakın komşu metodunun kullanılmasının tercih edilebilir ve makul olduğu görülmektedir. Bu metodun bir diğer kısıtı ise, ilgilenilen aralıkta bir nokta olmadığı zaman, tahminin elde edilemeyeceğidir (Delecroix, Guegan and Leorat (1997)).

3.4. Lojistik Fonksiyonun Lyapunov Üsteli Tahmininin Dağılımı

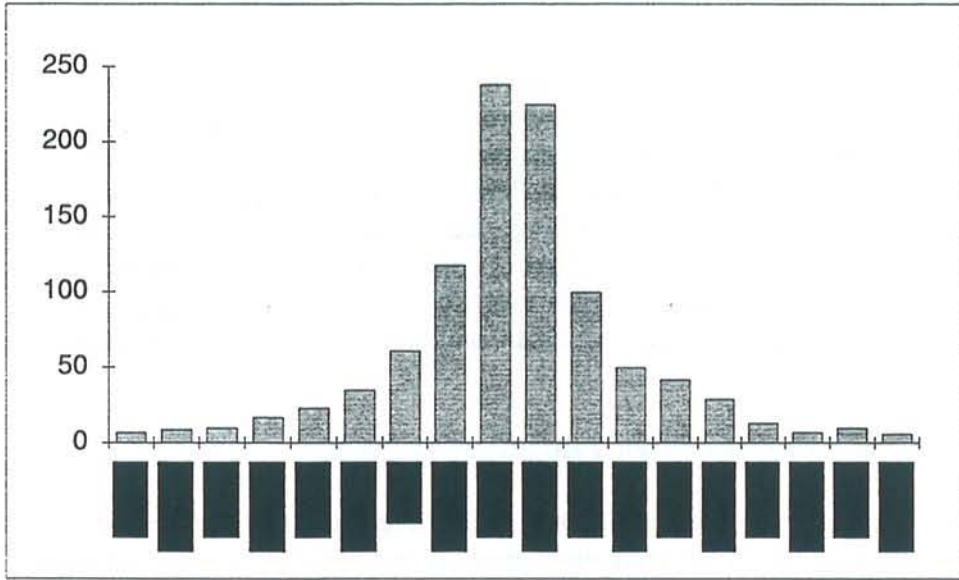
Lojistik fonksiyonundan üretilen tek boyutlu gözlemler aracılığı ile Lyapunov üsteli tahmininin bulunması konu edildikten sonra Lyapunov üsteli tahmininin dağılımının nasıl bir dağılım olduğu merak edilebilir. Buradaki alt başlık altında dağılımlarla uyumluluğuna ki-kare testi aracılığı ile bakılmaktadır.

Lojistik dönüşüm $x_{k+1}=4x_k(1-x_k)$ ile gözlem değerleri üretilmiştir. İlk gözlem x_0 , $[0,1]$ aralığında rastgele seçildikten sonra diğer gözlemler lojistik dönüşüm aracılığı ile hesaplanmaktadır. Bu gözlemler üzerinden Lyapunov tahminleri ve dağılımları incelenecektir. Şimdi lojistik dönüşüm fonksiyonu aracılığı ile toplam

10,000×1000=10,000,000 gözlem yaratılmıştır. Her biri 10,000'er gözlemden oluşan 1000 gruba ayrılarak, her biri bir anlamda 10,000'er gözlemden oluşan 1000 tekrar şeklinde ele alınmıştır. Sonra eldeki gözlemler kullanılarak her biri 10,000'er gözlemden oluşan verilerden Lyapunov üsteli

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|\phi'(x_i)| \right]$$

ifadesi ile 1000 birimlik örnek oluşturularak tahmin edilecektir. Sonra eldeki gözlemler kullanılarak her biri 10,000'er gözlemden oluşan verilerden Lyapunov üstelleri yukarıda verilen ifadeye göre hesaplanmıştır. Buradaki 1000 tekrarın her biri birer Lyapunov üsteli tahmini olmak üzere bir dağılım oluşturur. Tekrar sayısı ve her bir tekrardaki gözlem sayıları artırılarak bir tekrara karşı gelen Lyapunov üstellerinin daha doğru tahmin edilmesi umut edilmekle birlikte Lyapunov üstellerinin tahminlerinden oluşan dağılımın normal dağılıma yaklaşıp yaklaşmadığı incelenecektir, ancak yapılan hesaplamalar bunu kesinlikle onaylamamaktadır. Normal dağılımın basıklığının ve çarpıklığının her ikisinin de sıfır olması gerektiği bilinmekle birlikte bu verilerden oluşan dağılımın basıklığı 3.46 ve çarpıklığı -0.15 olarak bulunmuştur. Bununla birlikte çarpıklığın sıfır olarak kabulü biraz şüpheli olmakla birlikte dağılımın simetrik olduğu gözlenmektedir. Diğer yandan basıklığın büyük bulunmasından dolayı normal dağılım varsayımı yine şüphelidir. Uyum iyiliği için yapılan ki-kare testi sonucu ile hesaplanan χ^2 değeri tablo değerinden büyük olmasından dolayı dağılımın normal dağılım olmadığı söylenebilir. Histogram dağılımı Şekil 8'de verilmiştir. Tahminlerden $m=0.693148$, $s=0.000136$ olarak bulunmuştur.



Şekil 8. 10000'er gözlemden oluşan 1000 tekrarın histogram dağılımı

Yukarıda yapılan toplam 10 milyon gözlemden oluşan 1000 tekrarlık verinin oluşturduğu dağılımın şekli incelendiğinde en uygun dağılımın, belirgin bir simetrik veya asimetrik yapıyı da bünyesinde barındırabilen ve fonksiyonel açıdan esnek olan Weibull dağılımı olduğu düşünülmekle birlikte, yapılan ki-kare testi ile dağılımın hiçbir dağılıma uymadığı görülmüştür. Ancak dağılımın kısmen simetrik olduğu söylenebilir.

Bunun için Weibull dağılımı parametreleri tahminleri bulunmalıdır. Bu amaç için ilk önce histogram aralıklarına düşen veriler ile bu aralıklara düşmesi beklenen veri sayıları arasındaki farkların kareleri toplamı amaç fonksiyonu olarak kurulmuştur. Sonra bu amaç fonksiyonu Weibull dağılımını açıklayan parametrelere göre minimize edilmiştir. Bulunan değerler Weibull dağılımının parametrelerinin tahminleridir. Weibull dağılımının parametreleri alfa 7544.375 ve beta 0.693181 olarak bulunmuştur. Gözlenen O, beklenen E olmak üzere kullanılan ki-kare testi için

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (11)$$

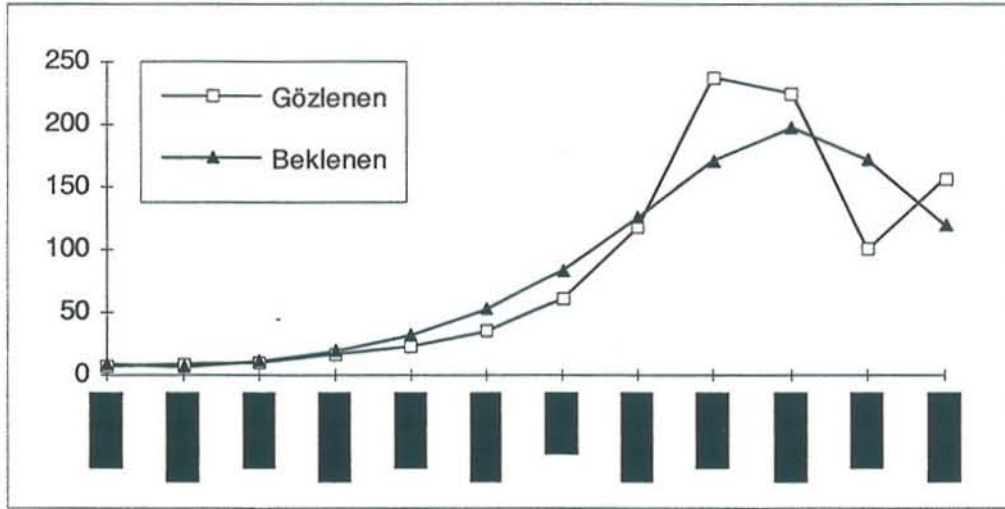
ifadesi yardımıyla k=12 için $\chi^2 = 88.50526$ olarak bulunur. Ayrıca 0.05 anlamlılıkta ve k-1 serbestlik derecesinde tablo değeri $\chi_{k-1}^2 = 19.67515$ bulunur ve $\chi^2 > \chi_{k-1}^2$ olduğundan Weibull dağılımdan olmadığına karar verilir.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bin	Observed	weibull p	Expected	e	khi2	korelasyon	
2							0.917993	
3	0.6927	7	0.009153	9.152819	-2.15282	0.506361		
4	0.69275	9	0.006572	6.572081	2.427919	0.896944		
5	0.6928	10	0.011225	11.22543	-1.22543	0.133775		
6	0.69285	17	0.019048	19.04766	-2.04766	0.220127		
7	0.6929	23	0.031957	31.95688	-8.95688	2.510437		
8	0.69295	35	0.052582	52.58234	-17.5823	5.879135		
9	0.693	61	0.083677	83.6768	-22.6768	6.145517		
10	0.69305	118	0.125742	125.7419	-7.7419	0.476667		
11	0.6931	238	0.171309	171.3087	66.6913	25.96324		
12	0.69315	225	0.197524	197.524	27.47597	3.821961		
13	0.6932	100	0.17188	171.8802	-71.8802	30.06028		
14	0.69325	157	0.119331	119.3311	37.66887	11.89081		
15						khi2	tablo	
16		1000	1		12768.13	88.50526	19.67515	
17					0			
18		alfa	7544.375					
19		beta	0.693181			k	p	
20						12	3.27E-14	

Exceldeki hesaplamalarda A kolonunda aralığın alt sınırları, B kolonunda aralıklara düşen gözlem sayıları (toplam 1000 gözlem bulunmaktadır), C kolonunda parametre değerleri yukarıda verilen Weibull dağılımının aralıklara düşen integrali, D kolonunda, C kolonuna göre bulunan olasılıklara göre beklenen gözlem sayısı, E kolonunda B ve D kolonlarındaki hücrelerin değerleri farkı yani B-D=E'dir, buradaki çalışmada E kolonundaki E3:E14 hücre değerlerinin kareleri toplamı E16 hücresine yazılarak Weibull dağılımı parametreleri olan alfa ve beta'ya göre minimize edilerek bulunmuştur; F kolonundaki hücrelere bu hücrelere karşı gelen $(B - D)^2 / D$ değerleri

hesaplanarak yukarıdaki formül [11] uyarınca F3:F14 hücre değerleri toplanarak F16'da khi-kare hesaplanmıştır. G16'da 0.05 anlamlılığında ve $k-1=11$ serbestlik derecesinde ki-karenin tablo değeri bulunur. Ayrıca G2'de B ve D kolonlarındaki değerlerin korelasyonu, G20'de 11 serbestlik derecesinde F16'daki ki-kare değerinin sonsuza doğru uzanan integrali olan olasılık değeridir.

Şekil 9'da histogram aralıklarına düşen veriler ile bu aralıklara düşmesi beklenen veri sayıları grafiği çizilmiştir. Bir uyumsuzluk göze çarpar.



Şekil 9. 10000'er gözlemden oluşan 1000 tekrarın Weibull dağılımı ile uyumu

Sonuç olarak ilk önce merkezi limit teoremi uyarınca Lyapunov üsteli tahminlerinin dağılımlarının normal dağılım eğiliminde olduğu düşünülmesine karşın yapılan uyum iyiliği testleri sonucunda dağılımların normal dağılımdan olmadığına karar verilmiştir. Bunun üzerine yapısı dolayısı ile esnek olan Weibull dağılımı denenmiş ancak bu uğraşı da bir sonuç vermemiştir. Fakat dağılımın simetrik bir dağılım eğilimi gösterdiği söylenebilir (Serin (2003)).

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Teorik alt yapı ve simülasyon çalışmaları yukarıda anlatılmış ve ilgilienlere güçlü fikirler vermekle birlikte verilen varsayımlarda ve yapılmış olan çalışmalarda halen bazı açıklıklar bulunmaktadır. Bundan dolayı konu doğal olarak, üzerinde düşünölmeye ve ilerlemelere açıktır.

Lyapunov üstellerinin tahmini konusunda önerilen yaklaşımların gerçekte eksik tarafları bulunmaktadır. Şöyle ki yapılan denemelerden ve çalışmalardan görölmekteki ki sayısal değerlerin aşırı derecede büyümeleri söz konusu olduğundan Lyapunov üstellerinin tahmini bir yaklaşıklıkla ele alınmaktadır. Bundan dolayı Lyapunov üstellerinin tahminlerinde bir hata daima gözlenebilir olacaktır.

Bir sistemin Lyapunov üsteli pozitif ise kaotik özelliklere sahip olduğu daha önceden ifade edilmişti. Böyle sistemler her zaman hareket halinde ve sürekli denge arayışı içerisinde olan dinamik yapılardır. Eğer Lyapunov üsteli negatif ise sistemin

durağanlaşma eğiliminde olduğu ifade edilmelidir. Bu tarz yapılar bir noktaya doğru yakınsama eğilimindedirler. Böylece sistemi çeken çekicinin bir nokta olduğu düşünülür. Ancak Lyapunov üstelinin pozitif olması ile bir noktaya yakınsama durumu kesinlikle söz konusu değildir.

Veriler doğası gereği daima içerisinde hataları barındırır. Bu verilerden sistem yapısının anlaşılması istatistiksel çalışmalarla mümkün olabilmektedir. Bu yüzden Lyapunov üstelinin tahmini yapılmadan önce verilerin düzgünleştirilmesi uygun olabilir. Verilerin düzgünleştirilmesi ile elde edilen düzeltilmiş verilerin genelde periyodik olmayan davranış özellikleri göstererek dinamik sistem görünümü ortaya çıkmaktadır. Böyle bir yaklaşım içerisinde hemen hemen tüm zaman verileri bu görünümü oluşturabilmektedir.

Kaotik bir sistemin eskiden sanıldığı gibi son derece belirsiz bir geleceği ya da geçmişi olmayabilir. Durağan olmayan stokastik bir sistem ile karşılaştırıldığında kaotik bir sistemin gelecek tahmin hatalarının daha küçük olması ihtimali mevcuttur. Bir çok kaynaktan gelen zaman verileri için de benzer bir durum söz konusu olabilir (Serin (2003)).

KAYNAKLAR

- DELECROIX, D.M., GUEGAN, D. and LEORAT, G.,(1997), *Determining Lyapunov exponents in deterministic dynamical system*, Computational Statistics, 12(1),93-108.
- JONES, D.A. and KASAP, R.,(1995), *Identifying chaotic structure in time series*, The Fifteenth International Symposium on Forecasting, Toronto Canada.
- KASAP, R.,(1995), *Kaos ve zaman dizileri için kaotik yapının belirlenmesi*, 1.inci Sistem Mühendisliği ve Savunma Uygulamaları Sempozyumu, Ankara Türkiye.
- LORENZ, H.W.,(1993), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion* (second edition), Springer-Verlag, Darmstadt, Germany.
- MEDIO, A.,(1992), *Chaotic dynamics theory and application*, Cambridge University Press, Cambridge England.
- SERİN, T.,(2003), *Kaotik Yapılarda Lyapunov Üstellerinin Tahmini*, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- STROGATZ, S.H.,(1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, Massachusetts.

CHAOS AND ESTIMATION OF LYAPUNOV EXPONENTS

ABSTRACT

This study is basically based on the estimation of Lyapunov exponents. The theoretical linkage between chaos and Lyapunov exponents are discussed briefly. Other attempt is to investigate the distributional properties of the estimated exponents via simulation techniques. It is observed that estimated Lyapunov exponents through

the data generated from logistic function look like either Normal or Weibull distribution although goodness of fit tests do not support that they are normally distributed.

Key Words : *Attractors; Logistic Function, Nonparametric Estimation, Nearest Neighbor Method, R-adic Map, Chaos, Dynamical Systems, Lyapunov Exponents, Nonperiodic and Nonlinear Behaviours, Nonlinear Dynamical Systems, Nonlinear Oscilation.*