İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 03 No 02 Özel Sayı Sayfa 73-87 Ağustos 2004

ARMAX MODELLERİNDE PARAMETRE TAHMİNİ VE KONTROL

Esin KÖKSAL[*] Fikri ÖZTÜRK[*]

ÖZET

Bu çalışmada, parametreleri bilinmeyen ARMAX modellerinde parametre tahmini ve parametreleri bilinen ARMAX sistemlerinde kontrol problemi üzerinde durulmaktadır.

Anahtar Kelimeler : *ARMAX, Durum-uzay modeli, Kontrol.*

1. GİRİŞ

Bir sistemin çıktısı, zaman parametresi k (k=0,1,2,3,...) 'ye bağlı bir rasgele değişken $Y(k)$ olsun. Kontrol terimi de olabilen sistem girdisi , bilinen bir $u(k)$ niceliği olmak üzere,

$$Y(k)+a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+...+a_nY(k-n)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+...+b_nu(k-n)$$
$$+c_0e(k)+c_1e(k-1)+...+c_ne(k-n) \quad (1.1)$$

gibi bir modele ARMAX modeli denir (Durbin and Koopman, 2001). Burada $e(k)$ hata terimi zaman serilerindeki alışılmış varsayımları sağlamaktadır. Gösterimdeki X harfi sisteme giren dışsal değişkenin varlığını ifade etmektedir. Bu model, bir ARMA (Autoregressive Moving Average, otoregresif kayan ortalama) modeline sistem girdisinin n adım gecikmeli etkilerinin eklenmesi ile ortaya çıkmış olarak düşünülebilir. Tüm gecikme parametrelerinin (derecelerinin) aynı ve n olması gösterim kolaylığı içindir. Gecikme parametrelerinin farklı olması bazı katsayıların sıfır alınmasıyla sağlanmaktadır. Bir ARX modeli

$$Y(k)+a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+...+a_pY(k-p)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+...+b_nu(k-n)+e(k)$$

şeklindedir. Bu model, bir AR(p) zaman serisi modeline sistem girdisinin n adım gecikmeli etkilerinin eklenmesi ile ortaya çıkmış olarak düşünülebilir.

n=0,1,2,... için $B^nY(k)=Y(k-n)$ ve

$$\Phi(B)=B^0+a_1B^1+a_2B^2+...+a_nB^n$$
$$\Psi(B)=b_1B^1+b_2B^2+...+b_nB^n$$
$$C(B)=c_0B^0+c_1B^1+c_2B^2+...+c_nB^n$$

olmak üzere, (1.1) deki ARMAX modeli B operatörü yardımıyla kısaca,

$\Phi(B)Y(k)=\Psi(B)u(k)+C(B)e(k)$ biçiminde yazılabilir. (1.2)

$C(B)$ nin bilinmesi durumunda biçimsel olarak bu ARMAX modeli,

$$\frac{\Phi(B)}{C(B)}Y(k)=\frac{\Psi(B)}{C(B)}u(k)+e(k) \qquad (1.3)$$

gibi bir ARX modeline dönüşür.

Çalışmanın ikinci kısmında ARX ve üçüncü kısmında ARMAX modellerinde parametre tahmini, dördüncü kısmında durum-uzay modellerinde kontrol problemi ele alınmaktadır.

2. ARX MODELLERİNDE PARAMETRE TAHMİNİ

p ile q gecikme parametreleri bilinen bir ARX modeli,

$$Y(k)=a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+\ldots+a_pY(k-p)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\ldots+b_qu(k-q)+e(k)$$

biçiminde olsun. Hata teriminin bir beyaz gürültü süreci oluşturduğu ve modeldeki diğer değişkenlerden bağımsız olduğu varsayılsın. $k<0$ için $y(k)=0$ ve $u(k)=0$ olmak üzere,

$$\underline{Y}^N=\begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(N) \end{bmatrix}, \quad \underline{e}^N=\begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}, \quad \underline{\theta}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p & b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{bmatrix}'$$

$$X_N=\begin{bmatrix} Y(0) & Y(-1) & \cdots & Y(1-p) & u(0) & u(1) & \cdots & u(1-q) \\ Y(1) & Y(0) & \cdots & Y(2-p) & u(1) & u(0) & \cdots & u(2-q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y(N-1) & Y(N-2) & \cdots & Y(N-p) & u(N-1) & u(N-2) & \cdots & u(N-q) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \\ \vdots \\ \underline{x}_N' \end{bmatrix}$$

gösterimleri altında gözlemler,

$$\underline{Y}^N=X_N\underline{\theta}+\underline{e}^N$$

lineer modeli olarak ifade edilebilir. $\underline{\theta}$ parametre vektörünün en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\min_{\underline{\theta}}\left\|\underline{Y}^N-X_N\underline{\theta}\right\|^2=\min_{\underline{\theta}}\sum_{j=1}^{N}(Y_j-\underline{\theta}'\underline{x}_j)^2$$

optimizasyon probleminin çözümü olup,

$$\hat{\underline{\theta}}_N=(X_N'X_N)^{-1}X_N'\underline{Y}^N$$

dır. Bu tahmin edici için,

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\theta}}_N&=(X_N'X_N)^{-1}X_N'\underline{Y}^N\\ &=(X_{N-1}'X_{N-1}+\underline{x}_N\underline{x}_N')^{-1}(X_{N-1}'\underline{Y}^{N-1}+\underline{x}_NY(N))\end{aligned}$$

olup, $P_N=(X_N'X_N)^{-1}$ gösterimi altında,

$$P_N = (P_{N-1} + \underline{x}_N \underline{x}_N')^{-1} = P_{N-1} - (1 + \underline{x}_N' P_{N-1} \underline{x}_N)^{-1} P_{N-1} \underline{x}_N \underline{x}_N' P_{N-1}$$

olmak üzere,

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \hat{\underline{\theta}}_{N-1} + (1 + \underline{x}_N' P_{N-1} \underline{x}_N)^{-1} P_{N-1} \underline{x}_N \left(Y(N) - \underline{x}_N' \hat{\underline{\theta}}_{N-1} \right)$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. Bir $P_0 = (X_0' X_0)^{-1}$ başlangıç matrisi ve $\hat{\underline{\theta}}_0$ başlangıç tahmin değeri ile başlayıp, gözlemler geldikçe,

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \hat{\underline{\theta}}_{N-1} + K_N \left(Y(N) - \underline{x}_N' \hat{\underline{\theta}}_{N-1} \right) \tag{2.1}$$

$$K_N = (1 + \underline{x}_N' P_{N-1} \underline{x}_N)^{-1} P_{N-1} \underline{x}_N \tag{2.2}$$

$$P_N = P_{N-1} - (1 + \underline{x}_N' P_{N-1} \underline{x}_N)^{-1} P_{N-1} \underline{x}_N \underline{x}_N' P_{N-1} \tag{2.3}$$

algoritması ile indirgemeli tahminler ardışık olarak elde edilebilir (Davis and Winter, 1985).

Başka bir indirgemeli tahmin algoritması da,

$$\underline{Y}^N = X_N \underline{\theta} + \underline{e}^N$$

lineer modelindeki parametre vektörünün bir durum vektörü olarak alınması ve

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\theta}_k + \underline{\xi}_k$$

$$\underline{Y}^k = X_k \underline{\theta} + \underline{e}^k$$

lineer kesikli-zaman durum-uzay modelinde Kalman Filtresinin işletilmesi ile elde edilebilir. $\underline{\xi}_k$ hata vektörü sıfır ortalamalı, örneğin $Cov(\underline{\xi}_k) = Q_k = 10^{-5} I$ kovaryans matrisli ve modeldeki diğer değişkenlerden bağımsız varsayılabilir. $R_k = Cov(\underline{e}^k)$ olmak üzere, Kalman Filtresi

$$\hat{\underline{\theta}}_0 = E(\underline{\theta}_0) = m_0 \tag{2.4}$$

$$P(0) = P_0 \tag{2.5}$$

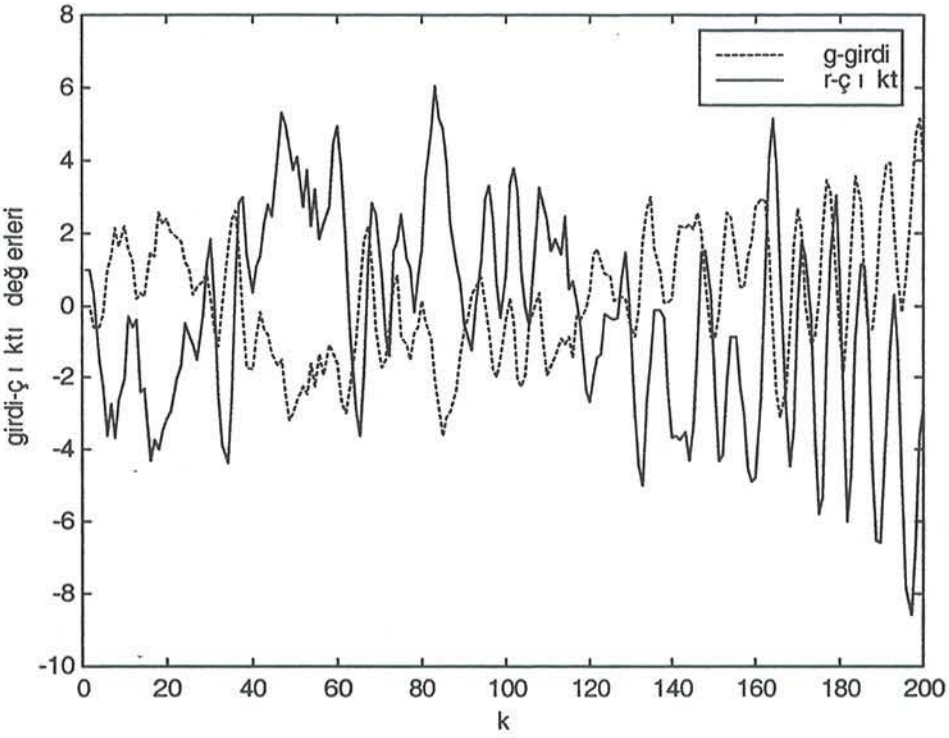
$$\hat{\underline{\theta}}_{k+1|k} = \hat{\underline{\theta}}_{k|k-1} + K_k \left(\underline{Y}^k - X_k \hat{\underline{\theta}}_{k|k-1} \right) \tag{2.6}$$

$$K(k) = P(k) X_k' \left[X_k P(k) X_k' + R_k \right]^{-1} \tag{2.7}$$

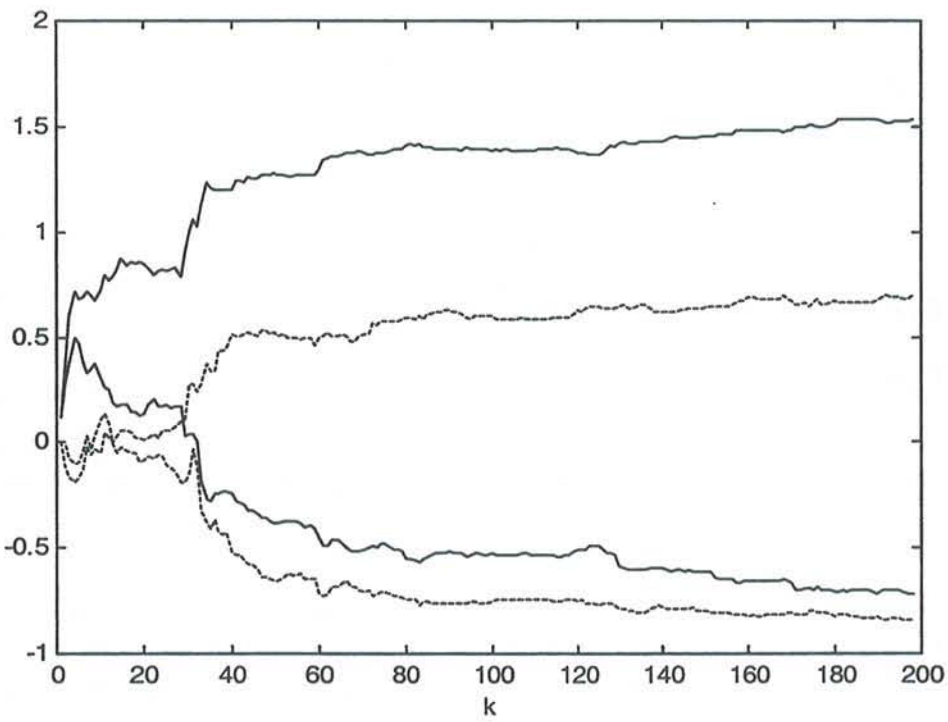
$$P(k+1) = P_k + Q_k - P_k \underline{X}_k' \left[X_k P_k \underline{X}_k' + R_k \right]^{-1} X_k P_k \tag{2.8}$$

olup, burada $P(k) = Cov(\underline{\theta}_k - \hat{\underline{\theta}}_{k|k-1})$ ve K_k Kalman kazanç matrisidir (Grewal and Andrews, 1993).

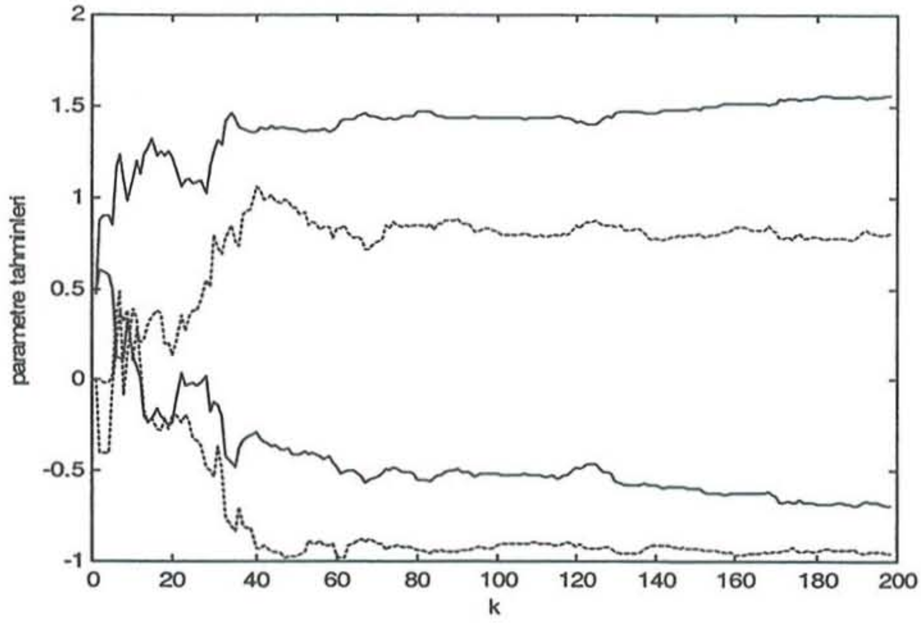
Modelimiz, $Y(k) = 1.5Y(k-1) - 0.56Y(k-2) + u(k-1) + e(k) - 0.5e(k-1)$ olsun. Bu modelde, hatalar (gürültüler) sıfır ortalamalı normal dağılıma sahip olarak üretilip, model yapısına bağlı olarak sistem çıktıları elde edilsin. Sistem girdisi $u(k) = -0.6Y(k-1)$ biçiminde olsun. Elde edilen (sanki gözlenen) sistem çıktılarını kullanarak model parametreleri indirgemeli en küçük kareler (2.1)-(2.3) ve Kalman Filtresi (2.4)-(2.8) ile tahmin edilsin. Bu şekilde yapılan bir simülasyon sonucunda sistem girdisi (kesikli çizgi) ile sistem çıktısı (düz çizgi) Şekil-1 deki gibi olmak üzere parametre tahminleri Şekil-2 (indirgemeli en küçük kareler) ve Şekil-3 (Kalman filtresi) 'deki gibi olmuştur.



Şekil 1. Sistem girdi ve çıktısı



Şekil 2. İndirgemeli en küçük kareler tahminleri



Şekil 3. Kalman filtresi tahminleri

3. ARMAX MODELLERİNDE PARAMETRE TAHMİNİ

ARMAX modeli (1.2) deki gibi olsun ve $C(B) = c_0B^0 + c_1B^1 + c_2B^2 + \ldots + c_nB^n$ polinomundaki katsayılar bilinsin. Model (1.3) biçimine getirilip,

$$\begin{aligned} C(B)Y^*(k) &= Y(k) \\ C(B)u^*(k) &= u(k) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

olmak üzere, $Y^*(k)$ ve $u^*(k)$ cinsinden,

$$\Phi(B)Y^*(k) = \Psi(B)u^*(k) + e(k) \qquad (3.2)$$

olarak ele alınırsa, (3.2) deki ARX modelinde ikinci kısımda anlatıldığı gibi parametre tahmini yapılabilir.

$C(B)$ polinomundaki katsayılar bilinmediğinde aşağıdaki üç aşamalı en küçük kareler yöntemi kullanılabilir:

1) $\Phi(B)Y(k) = \Psi(B)u(k)$ modelindeki parametreler en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir ve $\hat{e}(k) = \hat{\Phi}(B)Y(k) - \hat{\Psi}(B)u(k)$ artıklar dizisi hesaplanır.

2) $\Phi(B)Y(k) = \Psi(B)u(k) + C(B)\hat{e}(k)$ modelinden en küçük kareler yöntemi ile $\hat{\Phi}_1, \hat{\Psi}_1$ ve $\hat{C}_1$ tahminleri elde edilir. $\hat{C}_1$ yardımı ile;

$$\hat{C}_1 Y^*(k) = Y(k)$$

$$\hat{C}_1 u^*(k) = u(k)$$

$$\hat{C}_1 \hat{e}^*(k) = \hat{e}(k)$$

ifadelerinden $Y^*(k)$, $u^*(k)$, $\hat{e}^*(k)$ lar elde edilir.

3) $\Phi(B)Y^*(k) = \Psi(B)u^*(k) + C(B)\hat{e}^*(k)$ modelinden yeniden en küçük kareler yöntemi ile $\hat{\Phi}_2, \hat{\Psi}_2$ ve $\hat{C}_2$ tahminleri elde edilir. Bu üçüncü aşamada elde edilen $\hat{\Phi}_2, \hat{\Psi}_2$, $\hat{C}_2$ değerleri tahmin değeri olarak kullanılır (Mayne and Firoozan, 1982).

4. BİLİNEN PARAMETRELİ ARMAX MODELLERİNDE KONTROL

Bir ARMAX modelindeki çıktıların sıfırlanmasını veya bir referans çıktıya göre farkın küçük tutulmasını amaçlayan basit bir kontrol tarzına en küçük-varyans kontrol (minimum-variance control) denir. Kontrolün amacı $y(k)$ çıktı değerlerini küçük tutmaktır. En küçük-varyans kontrol denmesinin sebebi, her k için $E\left(Y^2(k)\right)$ değerinin en küçük tutulmasının istenmesidir. Bu kısımda, ilk aşamada kontrolün uygulanması ve kontrolün büyüklüğü ile ilgili bir maliyetin söz konusu olmadığı durum ve daha sonra belli bir maliyet fonksiyonu altında kontrol ele alınacaktır.

4.1 En Küçük-Varyans Maliyetsiz Kontrol

ARMAX modeli, $e(k)$ lar sıfır ortalamalı σ^2 varyanslı beyaz gürültü süreci olmak üzere,

$$\Phi(B)Y(k) = B^r\Psi(B)u(k) + C(B)e(k) \tag{4.1}$$

biçiminde olsun. Burada, r $(r \geq 1)$ çıktı ile girdi arasındaki gecikme adımlarının sayısı olup,

$$\Phi(B) = 1 + a_1B^1 + a_2B^2 + ... + a_nB^n$$
$$\Psi(B) = b_0 + b_1B^1 + b_2B^2 + ... + b_{n-r}B^{n-r}$$
$$C(B) = 1 + c_1B^1 + c_2B^2 + ... + c_nB^n$$

dır. Ayrıca, $b_0 \neq 0$, Φ ile C nin kararlı (kökler birim diskin içinde) oldukları varsayılmaktadır.

Kontrol problemine geçmeden önce k. adımda iken çıktının r $(r \geq 1)$ adım ilerisi için öngörü problemini ele alalım. İlk önce $u(k) = 0$ olsun. O zaman $Y(k)$'lar durağan bir zaman serisi oluşturur ve sonsuz dereceli kayan ortalamalı bir süreç olarak,

$$Q(B) = \frac{C(B)}{\Phi(B)}$$

$$Y(k) = Q(B)e(k) = q_0e(k) + q_1e(k-1) + ... \tag{4.2}$$

biçiminde yazılabilir. Sağ taraftaki seri karesel ortalamada yakınsamaktadır. Model tersinir olduğunda $e(k)$'lar geçmiş $y(k), y(k-1),...$ lardan ortaya çıkarılabilir, yani

$$e(k) = \left[Q(B)\right]^{-1} Y(k) \tag{4.3}$$

dır. Bu durumda,

$$Y(k+r)=\sum_{j=0}^{r-1} q_j e(k+r-j)+\sum_{j=0}^{\infty} q_{j+r} e(k-j)$$

olup sağdaki iki terim ilişkisiz ve ikincisi k. adımda bellidir.

$$X=\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e(k-j)$$

gibi lineer bir tahmin edici veya başka bir ifade ile öngörücü (predictor) düşünülsün. Bu öngörücü için hata kareleri ortalaması,

$$E\big(Y(k+r)-X\big)^2=\sigma^2\left\{\sum_{j=0}^{r-1} q_j^{\,2}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_{j+r}-\alpha_j\right)^2\right\}$$

olup, $\alpha_j=q_{j+r}$ için bu hata kareleri ortalaması en küçüklenmektedir, yani

$$\hat{Y}=\sum_{j=0}^{\infty} q_{j+r} e(k-j) \tag{4.4}$$

bu anlamda en iyi öngörücüdür. Bu öngörücü $\hat{Y}_{k+r|k}$ ile gösterilsin. $\hat{Y}_{k+r|k}$ nın, sistem çıktısı olan gözlemlere dayalı olarak değerini hesaplamak için etkili bir yol bulunmalıdır. Bunu aşağıdaki önerme sağlamaktadır.

$$C(B)=\Phi(B)F(B)+B^r D(B) \tag{4.5}$$

olacak şekilde dereceleri sırasıyla $r-1$ ve $n-1$ olan bir tek $F(B)$ ile $D(B)$ polinomları vardır (Davis and Winter, 1985). Buna göre,

$$\Phi(B)Y(k+r)=C(B)e(k)$$

$$Y(k+r)=\frac{1}{\Phi(B)}\left\{\left[\Phi(B)F(B)+B^r D(B)\right]e(k+r)\right\}$$

$$=F(B)e(k+r)+\frac{D(B)}{\Phi(B)}e(k)=F(B)e(k+r)+\frac{D(B)}{\Phi(B)}\frac{\Phi(B)}{C(B)}Y(k)$$

olup, en iyi öngörücü,

$$\hat{Y}_{k+r|k}=\frac{D(B)}{C(B)}Y(k) \tag{4.6}$$

dır. Böylece,

$$C(B)\hat{Y}_{k+r|k}=D(B)Y(k)$$

ARMA modelinden kolayca, $Y(k)$ lara bağlı olarak $\hat{Y}_{k+r|k}$ lar hesaplanır. Burada, $B\hat{Y}_{k+r|k}=\hat{Y}_{k-1+r|k-1}$ dır.

Öngörü hatası,

$$E\left(Y(k+r)-\hat{Y}_{k+r|k}\right)^2=E\big(F(B)e(k+r)\big)^2=\sigma^2\sum_{j=0}^{r-1} f_j^2 \tag{4.7}$$

dir. Burada $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ katsayıları $q_1, q_2, \ldots, q_{r-1}$ ile aynıdır.

Şimdi $u_k \neq 0$ olan kontrol durumuna dönelim.

$$\Phi(B)Y(k+r)=B^r\Psi(B)u(k+r)+C(B)e(k+r) \tag{4.8}$$

olmak üzere, (4.5) göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}\Phi(B)Y(k+r)&=B^r\Psi(B)u(k+r)+\left(\Phi(B)F(B)+B^rD(B)\right)e(k+r)\\&=\left(\Psi(B)u(k)+D(B)e(k)\right)+\Phi(B)F(B)e(k+r)\end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak yazılır. (4.1) den $e(k)$ çekilip (4.9) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}Y(k+r)&=\frac{1}{\Phi(B)}\left[\Psi(B)u(k)-\frac{B^r\Psi(B)}{C(B)}D(B)u(k)+\frac{\Phi(B)}{C(B)}D(B)Y(k)\right]+F(B)e(k+r)\\&=\frac{\Psi(B)F(B)}{C(B)}u(k)+\frac{D(B)}{C(B)}Y(k)+F(B)e(k+r)\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. $u(k)=u\left(Y_k,Y_{k-1},\ldots\right)$ biçiminde bir kontrol düşünülürse, (4.10) in sağ tarafındaki ilk iki terimin toplamı ile üçüncü terim ilişkisiz olup,

$$E\left(Y^2(k+r)\right)=E\left(\frac{\Psi(B)F(B)}{C(B)}u(k)+\frac{D(B)}{C(B)}Y(k)\right)^2+E\left(F(B)e(k+r)\right)^2 \tag{4.11}$$

dır. (4.11) de,

$$\Psi(B)F(B)u(k)+D(B)Y(k)=0$$

yani,

$$u(k)=-\frac{D(B)}{\Psi(B)F(B)}Y(k)$$

alınırsa $E\left(Y^2(k+r)\right)$ en küçük olur. Buna göre en küçük-varyans kontrol,

$$u^*(k)=-\frac{D(B)}{\Psi(B)F(B)}Y(k) \tag{4.12}$$

dır. Bu $u^*(k)$ en küçük-varyans kontrolün uygulanmasıyla kontrol edilmiş süreç,

$$Y(k)=F(B)e(k) \tag{4.13}$$

denklemini sağlar, yani $r-1$ dereceden bir kayan ortalama sürecidir. Bu sürecin varyans fonksiyonu,

$$E\left(Y^2(k)\right)=\left(f_0^2+f_1^2+\ldots+f_{r-1}^2\right)\sigma^2 \tag{4.14}$$

dır.

(4.12) ve (4.13) den en küçük-varyans kontrol,

$$u^*(k)=-\frac{D(B)}{\Psi(B)F(B)}Y(k)=-\frac{D(B)}{\Psi(B)}e(k)$$

olmak üzere, $\Psi(B)$ polinomunun $D(B)$ ile sadeleşmeyen çarpanlarında bulunan kararsız köklerin var olması durumunda $Var\left(u^*(k)\right)$ değerleri sonsuza gidebilir. Kontrolun maliyeti olmadığı için bu durum bir sakınca yaratmamaktadır, ancak alışılmamış bir durumdur. $\Psi(B)$ nin kararsız kökü bulunmadığında kontrol dizisi asimptotik durağan bir süreçtir.

Amaç, sistemi belli bir $\left(y^*(k)\right)_{k=1}^{\infty}$ yörüngesi etrafında tutmak olduğunda,

$$E\left(Y(k+r)-y^*(k+r)\right)^2 = E\left(\frac{\Psi(B)F(B)}{C(B)}u(k)+\frac{D(B)}{C(B)}Y(k)-y^*(k+r)\right)^2 + E\left(F(B)e(k+r)\right)^2$$

olmak üzere, en küçük-varyans kontrol,

$$\Psi(B)F(B)u(k) = C(B)y^*(k+r) - D(B)Y(k)$$

indirgeme bağıntısı ile elde edilir.

Şimdi,

$$Y(k) = 1.5Y(k-1) - 0.56Y(k-2) + u(k-1) + e(k) - 0.5e(k-1)$$

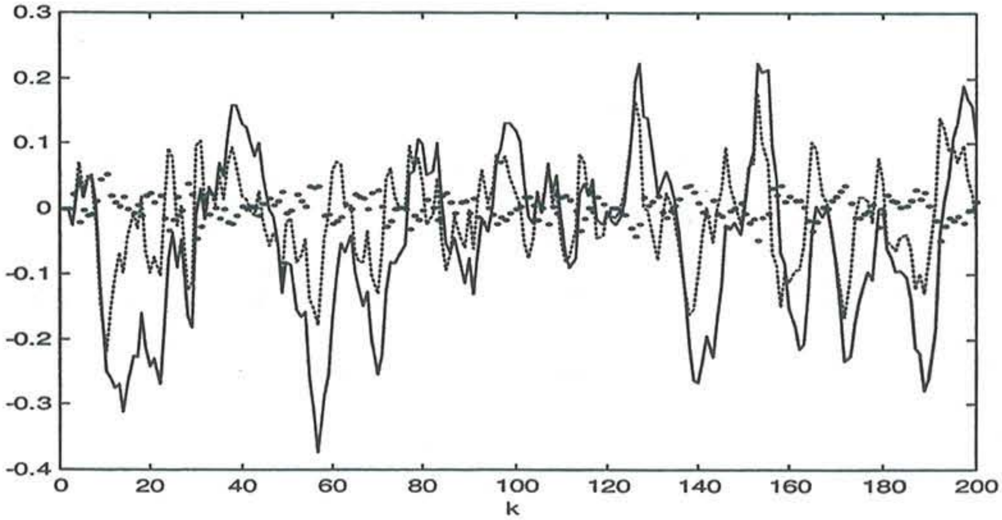
modeli ele alınsın. $r=1$ ve (4.5) denklemi,

$$1-0.5B = (1-1.5B+0.56B^2)f_0 + B(d_0+d_1B)$$

olup, (4.12) ile verilen en küçük-varyans kontrol,

$$u(k) = -\frac{d_0+d_1B}{1.f_0} = -\left[Y(k)-0.56Y(k-1)\right]$$

dır. Bu model üzerinde yapılan simülasyon sonucu Şekil-4 deki gibidir. kesikli çizgi sistem girdisi olan kontrolü, noktalı çizgi sistem çıktısını ve mavi çizgi uygulanan kontrolün etkisini görmek için aynı gürültü altında işleyen ancak kontrol uygulanmayan ikinci bir sistemin çıktısını göstermektedir.



Şekil 4. En küçük-varyans kontrol

4.2 KARESEL MALİYET FONKSİYONU ALTINDA KONTROL

Bir sistemi anlatan ARMAX modeli,

$$Y(k)+a_1Y(k-1)+a_2Y(k-2)+\ldots+a_nY(k-n) = b_0u(k-r)+b_1u(k-(r+1))+\ldots+b_{n-r}u(k-n)$$
$$+e(k)+c_1e(k-1)+\ldots+c_ne(k-n) \quad (4.15)$$

biçiminde olsun. Bu sistemin,

$$J(u)=\lim_{N\to\infty} E\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(Y^2(k)+\lambda u^2(k))\right) \tag{4.16}$$

maliyet fonksiyonu altında kontrolü söz konusu olsun. Burada λ pozitif bir sabit olup kontrolün maliyetini belirtmektedir. λ=0 durumunda en iyi kontrol en küçük-varyans kontroldur. Genel olarak buradaki problem, lineer sistemlerde karesel maliyet fonksiyonu altında bir kontrol problemi olarak ele alınabilir. Bununla ilgili kısa bir hatırlatma yapalım.

Durum vektörü tamamen gözlenebilir,

$$\underline{X}_{k+1}=A\underline{X}_k+B\underline{u}_k+C\underline{W}_k, k=0,1,2,... \tag{4.17}$$

lineer sistemi için,

$$C(\underline{u})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E[\sum_{k=0}^{N-1}\|D\underline{X}_k+F\underline{u}_k\|^2] \tag{4.18}$$

maliyet ($D'D$ pozitif yarıtanımlı, $F'F$ pozitif tanımlı) fonksiyonuna bağlı kontrol probleminde, maliyeti sonlu ve $E\|\underline{X}_k\|^2$ yi sınırlı tutan kontroller kümesindeki optimal kontrol,

$$\underline{u}_k^*=-M\underline{X}_k \tag{4.19}$$

biçimindedir. Burada, $M=(B'SB+F'F)^{-1}(B'SA+F'B)$ olup S matrisi,

$$S=A'SA+D'D-(A'SB+D'F)(B'SB+F'F)^{-1}(A'SB+D'F)' \tag{4.20}$$

Riccati denkleminin çözümüdür (Ljungqvist and Sargent (2000)).

(A,B) kararlı olabilen, $\left(A-B(F'F)^{-1}F'D, D-F(F'F)^{-1}F'D\right)$ ikilisi ortaya çıkarılabilen (teşhis edilebilen) olduğunda, (4.20) denkleminin çözümü olan S matrisi, $S(0)=0$ (veya $S(0)$ pozitif yarı tanımlı isteksel bir matris) olmak üzere, $j=-1,-2,-3,...$ için,

$$S(j)=A'S(j+1)A+D'D-(A'S(j+1)B+D'F)(B'S(j+1)B+F'F)^{-1}(A'S(j+1)B+D'F)'$$

indirgeme bağıntısından elde edilen dizinin limitidir (Davis and Winter, 1985).

Şimdi (4.15) deki ARMAX modeline dönelim. Bu model,

$$X_1(k)=-a_nY(k-1)+b_nu(k-1)+c_ne(k-1)$$
$$X_2(k)=-a_{n-1}Y(k-1)+b_{n-1}u(k-1)+c_{n-1}e(k-1)+X_1(k-1)$$
$$X_3(k)=-a_{n-2}Y(k-1)+b_{n-2}u(k-1)+c_{n-2}e(k-1)+X_2(k-1)$$
$$M$$
$$X_{n-1}(k)=-a_2Y(k-1)+b_2u(k-1)+c_2e(k-1)+X_{n-2}(k-1)$$
$$X_n(k)=Y(k)-e(k)$$

dönüşümü ve

$$\underline{X}_{k+1}=\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \text{M} \\ X_n(k+1) \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ 0 & 0 & \text{L} & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{n-r+1} \\ \text{M} \\ b_1 \\ 0 \\ \text{M} \\ 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_n-a_n \\ c_{n-1}-a_{n-1} \\ \text{M} \\ c_1-a_1 \end{bmatrix}$$

gösterimleri ile,

$$\underline{X}_{k+1}=A\underline{X}_k+Bu(k)+Ce(k)$$
$$Y(k)=[0 \quad \text{L} \quad 0 \quad 1]\underline{X}_k+e(k)$$

durum-uzay modeli olarak yazılabilir (Brockwell and Davis (1996)). Bu durum-uzay modelinde $u(k)=K\underline{X}_k$ gibi durum geri beslemeli bir kontrol uygulandığında, kontrol sadece $e(k-1),e(k-2),...,e(0)$ hata terimlerini içerecektir, halbuki en küçük-varyanslı kontrol $e(k)$ terimini de içermektedir. Bu amaçla, $e(k)$ hata terimi durum vektörüne, $X^0(k)=e(k)$ gibi bir durum değişkeni olarak eklenebilir. $v(k)=e(k+1)$ olarak tanımlanıp,

$$\begin{bmatrix} X^0(k+1) \\ \underline{X}_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}v(k)$$
$$Y(k)=[1 \; 0 \quad \text{L} \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix}$$

genişletilen durum-uzay modelinde durum geri beslemeli kontrol uygulanırsa, böyle kontrollerin sınıfı en küçük-varyanslı kontrolü de içerir. Ayrıca, başlangıç değer dışında durum vektörü tamamiyle çıktıdan hesaplanabilir. O zaman,

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & A \end{bmatrix}, \overline{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, H=[1 \; 0 \quad \text{L} \quad 0 \quad 1], D=\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} X^0(k+1) \\ \underline{X}_{k+1} \end{bmatrix}=\overline{A}\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix}+\overline{B}u(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}v(k) \tag{4.22}$$

lineer sisteminde,

$$J(u)=\lim_{N\to\infty}E\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\|D\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix}+Fu(k)\right\|^2\right)$$

maliyet fonksiyonu altında optimal kontrol,

$$u^*(k)=-M\begin{bmatrix} X^0(k) \\ \underline{X}_k \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

dır. Burada, M matrisi,

$$M=(\overline{B}'S\overline{B}+\lambda)^{-1}\overline{B}'S\overline{A} \tag{4.24}$$

olup, S matrisi,

$$S = \overline{A}'S\overline{A} + H'H + \overline{A}'S\overline{B}(\overline{B}'S\overline{B} + \lambda)^{-1}\overline{B}'S\overline{A} \tag{4.25}$$

Riccati denkleminin çözümüdür. Buradaki sonuçlar, $(\overline{A}, \overline{B})$ ikilisinin kararlı olabilen ve $(D, \overline{A})$ ikilisinin teşhis edilebilir olması durumunda geçerlidir. A matrisinin özdeğerleri birim diskin içinde, yani A kararlı bir matris olduğunda, bu şartlar yerine gelmektedir (Davis and Winter, 1985).

ARMAX modelimiz,

$$Y(k) = 1.5Y(k-1) - 0.56Y(k-2) + u(k-1) + e(k) - 0.5e(k-1)$$

olmak üzere (4.16) ile verilen maliyet fonksiyonu altındaki optimal kontrolü elde etmek için modeli (4.22) 'deki gibi durum-uzay modeli biçiminde yazmak gerekmektedir. İlgili matrisler,

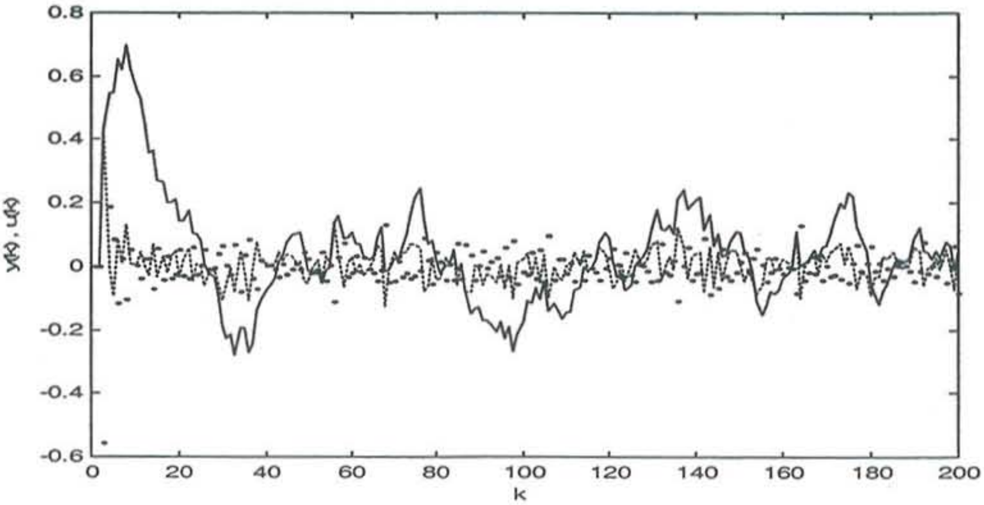
$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.56 & 0 & -0.56 \\ 1 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1\ 0\ 1]$$

olmak üzere, λ=0.2 , 0.5 , 1 , 2, 5 için Riccati denkleminin çözümleri sırasıyla,

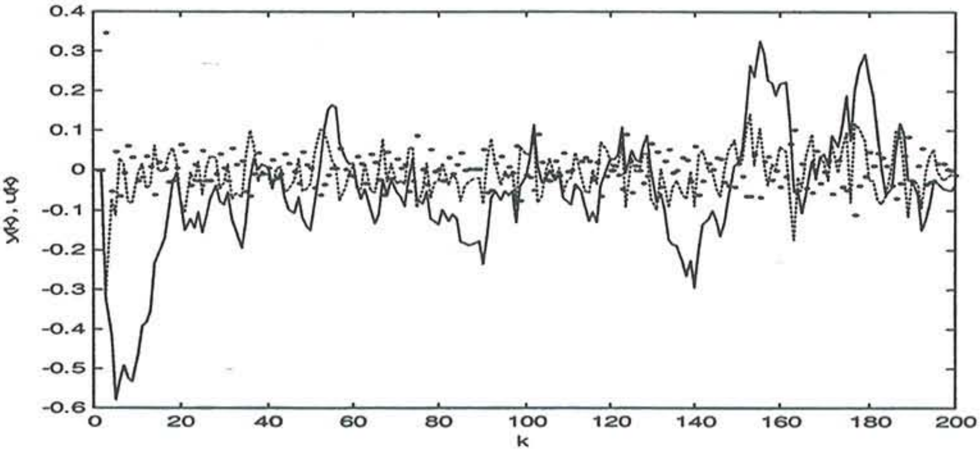
$$S = \begin{bmatrix} 1.17 & 0.18 & 1.26 \\ 0.18 & 0.25 & 0.30 \\ 1.26 & 0.30 & 1.41 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1.34 & 0.40 & 1.55 \\ 2.40 & 2.62 & 0.70 \\ 1.55 & 0.70 & 2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.71 & 2.0 \\ 0.71 & 1.12 & 1.26 \\ 1.94 & 1.26 & 2.57 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.20 & 2.51 \\ 1.20 & 2.00 & 2.20 \\ 2.51 & 2.20 & 3.61 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 2.50 & 2.22 & 3.61 \\ 2.22 & 3.98 & 4.21 \\ 3.61 & 4.21 & 5.71 \end{bmatrix}$$

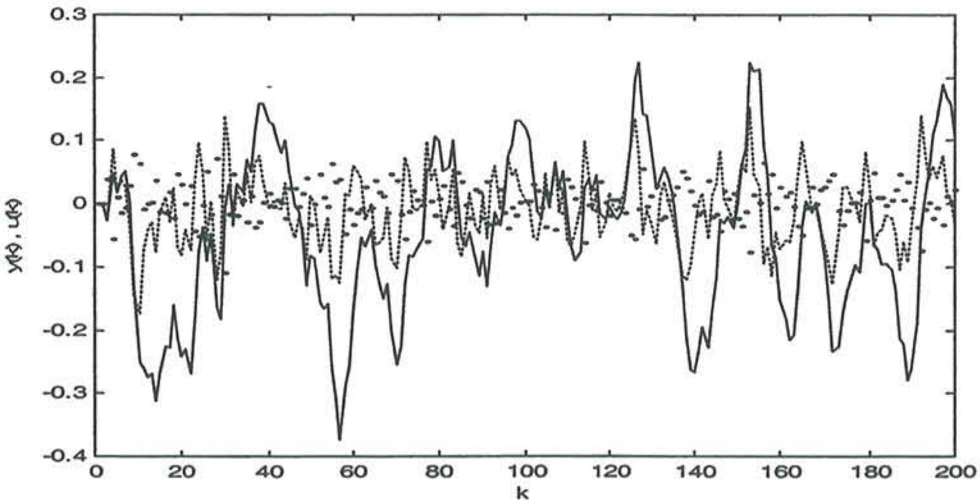
olup, (4.23) de verilen kontrolün (noktalı çizgi) uygulanmasıyla elde edilen simülasyon sonuçları (sistem çıktısı kesikli çizgi) sırasıyla Şekil-5, Şekil-6, Şekil-7, Şekil-8, Şekil-9 dadır.



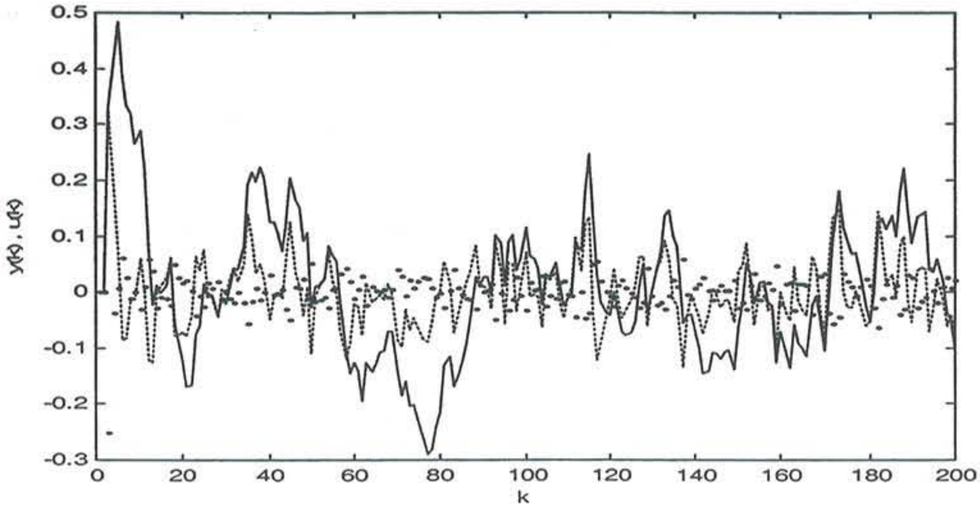
Şekil 5



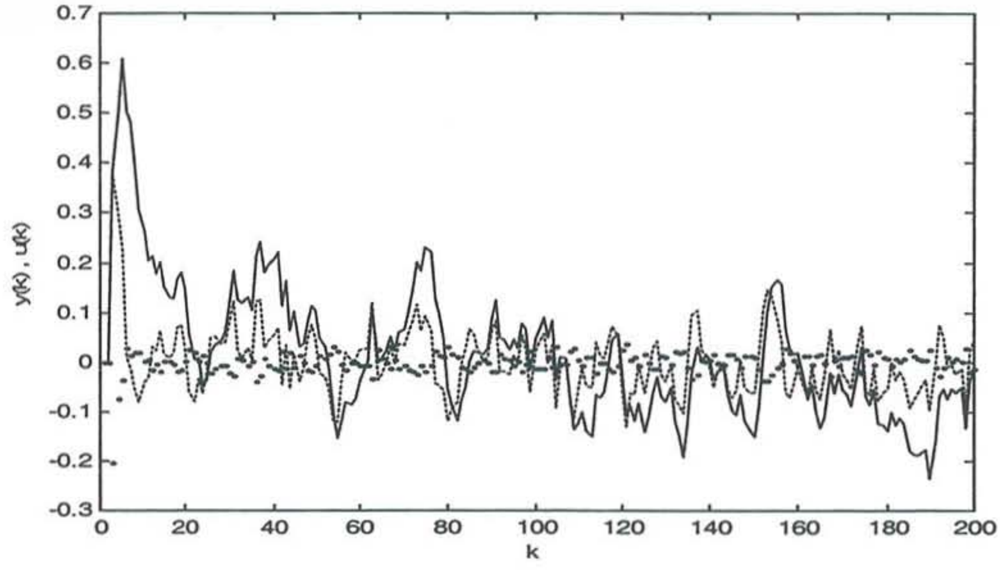
Şekil 6



Şekil 7



Şekil 8



Şekil 9

5. SONUÇ

ARMAX ile modellenen bir sistemde kontrol problemi, arzu edilen bir sistem çıktısının elde edilmesi için gereken girdinin bulunmasıdır. İstenen bir referans çıktı ile gerçek sistem çıktısı arasındaki farkın küçük tutulmasını amaçlayan kontrol tarzına en küçük-varyans kontrol denir. Ölçü aletleri doğrudan referans çıktı ile gerçek sistem çıktısı arasındaki farkı çıktığında amaç bu farkı sıfırlamaktır. Şekil-4 de görüldüğü gibi parametreleri bilinen ARMAX modellerinde uygulanan en küçük-varyans kontrol sonucunda çıktı sıfır etrafında dalgalanmakta olup, aynı şartlarda çalışan kontrolsüz sistem çıktısı gibi aşırı sapmalar ortaya çıkmamaktadır.

Parametreleri bilinmeyen ARMAX sisteminde parametre değerleri zaman ilerledikçe başarılı bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Çıktının sıfırlanması amaçlanıp uygulanan kontrolün büyüklüğü ile ilgili (4.16) daki gibi bir maliyet fonksiyonu altında kontrol söz konusu olduğunda, Şekil-5, Şekil-6, Şekil-7, Şekil-8 ve Şekil-9 da görüldüğü gibi kontrol maliyetini yansıtan λ parametresinin değerleri arttıkça kontrol değerleri mutlak değerce küçülmekte, ancak buna karşılık sistem çıktıları büyümektedir.

Genelde sistem kontrolü kolay bir problem olmamakla birlikte, bir sistemin kontrolünde en önemli etkenin sistemi anlama-anlatma yani modelleme olduğunu unutmamak gerekir.

KAYNAKLAR

BROCKWELL,P.J. and DAVİS,R.A. (1996), *Introduction to Time Series and Forecasting, Springer.*

DAVİS, M.H.A. and WİNTER,R.B. (1985), *Stochastic Modelling and Control, Chapman and Hall.*

DURBIN J. and KOOPMAN, S.J. (2001), *Time Series Analysis by State Space Methods,* Oxford University Press.

GREWAL, .S. and Andrews, A.P. (1993), *Kalman Filtering Theory and Practice,* Prentice Hall.

LJUNGQVIST L. and T. SARGENT (2000), *Recursive Macroeconomic Theory,* MIT Press.

MAYNE, D.Q. and FİROOZAN, F. (1982), *Linear identification of ARMA processes,* Automatica, 18, 461-466.

PARAMETER ESTIMATION AND CONTROL IN ARMAX MODELS

ABSTRACT

This study considers the parameter estimation in ARMAX models with unknown parameters and the control problem of ARMAX systems with known parameters.

Key Words : *ARMAX, Control, State-Space Models.*