Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
Dergisi
http://kutuphane.uludag.edu.tr/Univder/uufader.htm

# Geleceğin Matematik Öğretmenlerinin Rasyonel ve İrrasyonel Sayı Kavramları Konusundaki Bilgileri[1]

Mustafa ÇEVİKBAŞ[1], Ziya ARGÜN[2]

[1]*Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi*, *cevikbasm@gmail.com*
[2]*Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi, Matematik Eğitimi, ziya@gazi.edu.tr*

## ÖZET

Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı bu çalışma, durum çalışması şeklinde tasarlanmıştır. Araştırmanın katılıcılarını 40 ortaöğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmacılar tarafından oluşturulan açık uçlu soru formu ve yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanan verilerin analizi sonucu katılımcıların birçoğunun rasyonel ve irrasyonel sayılar konusundaki kavram bilgilerinin eksik ya da hatalı olduğu belirlenmiştir. Katılımcıların bu konuda bazı kavram yanılgılarına sahip oldukları, rasyonel ve irrasyonel sayıları birbirinden ayırt etmede yeterince başarılı olamadıkları, bir sayının farklı temsillerinin eşitliğinin bilincinde olmadıkları ve rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinalitelerinin belirleme ve birbiri ile mukayese etme konusunda yetersiz kaldıkları belirlenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Rasyonel sayı, irrasyonel sayı, kavram bilgisi, matematik öğretmen adayları.

[1] Bu çalışmanın bir bölümü XVIII. International Congress Amse-Amce-Waer'da sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

# Future Mathematics Teachers' Knowledge of Rational and Irrational Number Concepts


## ABSTRACT

The purpose of the study was to explore prospective mathematics teachers' knowledge of rational and irrational numbers. The study in which qualitative research methods were used were designed as a case study. 40 prospective teachers of secondary mathematics education constituted the participants of the study. The data was collected through the open-ended questionnaire developed by the researchers and semi-structured interviews. Based on the analysis of the data collected, it was figured out that most of the participants lacked concept knowledge regarding rational and irrational numbers. It was also found out that the participants had some misconceptions about that subject, and that they were not successful enough to differentiate between rational and irrational numbers. Moreover, it was determined that they were not aware of equivalent of different representations used for a number, and that they remained incapable of identifying cardinalities of rational and irrational number sets, and of comparing one another.


**Key Words**: Rational number, irrational number, concept knowledge, mathematics prospective teachers.

## GİRİŞ

Sayılar, yüzyıllardan beri matematik ve matematik eğitiminin mihenk taşı olma özelliğini sürdürmektedir (Reys & Nohda, 1994). NCTM (2000) günümüzde temel matematik eğitiminin, sayıların ve işlemlerin anlaşılması ve sayı duyusunun gelişimi etrafında şekillenmesi gerektiği üzerinde durmaktadır. Zira matematik yapma süreci sayılarla hayat bulmakta ve matematiğin anlaşılması sayılarla gerçekleşmektedir (Kaminski, 2002). Bu durum, matematiğin öğretilmesine kılavuzluk eden matematik öğretim programlarına da yansımış durumdadır. Ülkemizdeki matematik öğretim programları incelendiğinde programların önemli bir bölümünün sayılar öğrenme alanına ait olduğu görülmektedir (MEB, 2013a; 2013b; 2015). İlkokul, ortaokul ve ortaöğretim matematik öğretim programlarının tamamında kendine yer bulan sayılar öğrenme alanı, sınıf seviyesine göre çeşitli alt öğrenme alanlarına ayrılmaktadır.

Sayılar öğrenme alanı kapsamında bulunan rasyonel ve irrasyonel sayılar, doğal sayılar ve tamsayılardan daha karmaşık bir yapıya sahiptir (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Peled & Herskovitz, 1999; Sirotic & Zazkis, 2007; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Zazkis & Sirotic, 2010) ve reel sayıların tam olarak anlaşılabilmesi için hayati derecede öneme sahiptir

(Argün, Arıkan, Bulut, & Halıcıoğlu, 2014; Courant, Robbins, & Stewart, 1996; Sirotic & Zazkis, 2007). Bu önem bakımından rasyonel ve irrasyonel sayılar, matematik öğretim programlarında kendine belli oranlarda yer bulabilmiştir. Birinci kademede (1-2-3-4. sınıf) kesirler alt öğrenme alanına geniş yer ayrılmaktadır (MEB, 2015). İkinci kademede (5-6-7-8. sınıf) kesirler önemini yine korurken rasyonel ve irrasyonel sayıların tanıtımı da bu kademede gerçekleşmektedir. Sayıların ifade edilişinde önemli bir yeri olan ondalık gösterim, dördüncü ve altıncı sınıfta ele alınmaktadır. Ayrıca altıncı sınıfta sayıların ondalık gösterimlerini kullanarak sıralama, bu sayıların yerini sayı doğrusu üzerinde belirleme ve bu sayılarla toplama ve çıkarma işlemleri yapma üzerine odaklanılmaktadır. Bunun dışında kesirlerin mukayesesi ve sıralanması, kesirlerde dört işlemin yapılması, ondalık gösterimi verilmiş olan sayıların çözümlenmesi ve bu sayılarda çarpma ve bölme işlemlerinin yapılması hedeflenmektedir. Yedinci sınıfa gelindiğinde ise rasyonel sayılar tanıtılmakta, birbiri ile mukayese edilmekte ve rasyonel sayılarda dört işlem alıştırmaları yapılmaktadır. Reel sayılar ikinci kademenin son sınıfı olan sekizinci sınıfta tanıtılmakta ve bu sınıfta rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar arasındaki ilişkiler incelenmektedir (MEB, 2013a). Üçüncü ve son kademe olan ortaöğretimde (9-10-11-12. sınıf) reel sayılar dokuzuncu sınıfta bir kazanım üzerinden ele alınmaktadır. Dolayısıyla matematik öğretim programlarında rasyonel sayılara ilişkin kazanımların yedi, sekiz ve dokuzuncu sınıfta; irrasyonel sayılara ilişkin kazanımların ise sadece sekizinci ve dokuzuncu sınıfta yer aldığı görülmektedir.

Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (NCTM) tarafından 2000 yılında yayınlanmış olan "Okul Matematiği İçin İlke ve Standartlar"a baktığımızda beş içerik standardından birisinin "sayı ve işlemler standardı" olduğu görülmektedir. Sayı ve işlemler standardı sayılar, sayma, sayı sistemleri ve aritmetiğe ilişkin temel anlayışı ifade etmekte ve bu standardın temelinde sayılara ilişkin kavramsal bilginin gelişiminin sağlanması yatmaktadır. Dolayısıyla matematik öğretiminin amaçlarına uygun olarak matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının sayılar konusunda kavramsal anlama düzeyine sahip olmaları beklenmektedir. Burada kastedilen kavramsal anlamanın, ilgili zaman diliminde sahip olunan bilgiye bağlı olarak birey tarafından içselleştirilmiş ilişkilerden oluştuğu belirtilmektedir (Toluk & Olkun, 2003). Bu durum, kavram tanımının biliniyor olmasının kavramsal bilgiye ulaşmada yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bu açıdan kavramsal anlama için, hem kavramın matematiksel tanımının iyi bilinmesi hem de kavramın tanımı ve özellikleri ile farklı bağlamlar arasındaki ilişkilerin kurulabilmesi gerekmektedir.

Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995) matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarını doğru bir şekilde tanımlayamadıklarını ve bu sayıları başarılı bir şekilde birbirinden ayırt edemediklerini belirlemiştir. Benzer bulguya ulaşan Arcavi, Bruckheimer ve Ben-Zvi (1987) matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımada ve birbirinden ayırt etmede yeterince başarılı olmadıklarını tespit etmiştir. Sirotic ve Zazkis (2007) matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin bilgilerinin sezgisel düzeyde olduğunu ortaya koymuş, işlemsel ve formel bilgilerinde ise tutarsızlıklarla karşılaşıldığını belirtmiştir. Peled ve Hershkovitz (1999) matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların tanımlarını ve özelliklerini bildikleri halde sayıların farklı temsilleri ile ilgili durumların yer aldığı problemlerin çözümünde sorun yaşadıklarını ifade etmiştir. Ayrıca matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerin esnek kullanımında güçlük çektikleri ifade edilmektedir (Haser & Ubuz, 2002; O'Connor, 2001; Peled & Herskovitz, 1999; Şiap & Duru, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Zazkis & Sirotic, 2010). Bu güçlüğün aşılabilesi için kavramlar öğretilirken farklı temsil biçimlerine vurgu yapılması tavsiye edilmektedir (Kieren, 1976; Vergnaud, 1983). Benzer sonuçlara diğer bazı çalışmalarda da ulaşılmış (Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007; Moseley, 2005; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1998; Zazkis, 2005) ve matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin kavramsal anlama düzeyine ulaşamadıkları belirlenmiştir.

Farklı öğrenim seviyelerinden katılımcılar ile gerçekleştirilen birçok çalışmada rasyonel ve irrasyonel sayıların kavramsal olarak öğrenilmesinin zor olduğu ifade edilmektedir (Arcavi vd., 1987; Behr vd., 1992; Desmet, Gregoire, & Mussolin, 2010; Durmuş, 2005; Fischbein vd., 1995; Kieren, 1993; Peled & Hershkovitz, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Bu kavramların öğreniminde yer alan zorlukların altında birtakım sebepler yatmaktadır. Bunlar arasında rasyonel sayıların sahip olduğu anlamsal çeşitlik –parça-bütün, ölçü, oran, bölüm ve işlemci- (Behr vd., 1992; Behr, Lesh, & Post, 1983; Toluk, 2002), rasyonel sayıların öğretiminde sahip olduğu bu anlamlardan sadece birine odaklanılması (Mack, 1995; Moseley, 2005), rasyonel sayıların pay ve paydasının farklı iki tamsayı olarak düşünülmesi (Şiap & Duru, 2004), irrasyonel sayıların karşılaştırılamazlık ve sayılamazlık gibi özelliklere sahip olmasının yanında sınırlı örneklerle tanıtılması (Fischbein vd., 1995), rasyonel ve irrasyonel sayıların çoklu temsilleri ile daha önce karşılaşılmamış olması ve bu temsiller arasında esnek bir geçişin sağlanamaması (Fischbein vd., 1995; Voskoglou & Kosyvas, 2012), rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin sahip olunan kavram yanılgıları ve bu kavramların sınırlı bir süreçte ele alınması (Peled & Hershkovitz, 1999) ve öğretmenlerin söz konusu kavramlara ilişkin pedagojik alan bilgilerinin yetersiz oluşu (Ball, 1988) yer almaktadır. Rasyonel ve irrasyonel sayıların kavramsal anlamda öğrenilmesi zor olduğu gibi öğretilmesi de zordur (Tirosh & Graeber, 1990). O halde sayılar öğrenme alanı içerisinde önemli bir konuma sahip olan rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının öğretiminde oldukça dikkatli olmak gerekmektedir. Aksi halde, bu kavramların öğretiminde yaşanacak problemlerin diğer konuların öğretimini etkilemesi olasıdır. Bu konuda Baykul (2014) matematikte yer alan kavramların birbiri ile bağlantılı olması sebebiyle bazı kavramların öğrenilmesindeki problemlerin ilerideki öğrenmeleri zorlaştıracağına hatta imkânsızlaştıracağına işaret etmektedir.

Rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin kavram yanılgılarının tespit edildiği bazı çalışmalarda (Baki & Bell, 1997; Moseley 2005; Peled & Hershkovitz, 1999; Stafylidou & Vosniadou, 2004) sahip olunan kavram yanılgılarının yukarıda bahsedilen problemlerin sebebi olabileceği üzerinde durulmuştur. Bu çalışmalarda sayıların sıralanması, mukayesesi, basamak değerinin belirlenmesi, farklı temsiller arası ilişkilerin kurulması, sayı kümelerinin yoğunluğu ve sayılarda işlemlere ilişkin kavram yanılgılarının görüldüğü belirtilmektedir. Kavram öğretiminde dikkat edilecek hususların farkında olunması açısından rasyonel ve irrasyonel sayılar konusundaki kavram yanılgılarının belirlendiği bu durumlar önem arz etmektedir.

Dolayısıyla matematik yapma süreçlerinde kritik bir öneme sahip olan reel sayıların tam olarak anlaşılabilmesi için kavram yanılgılarından arınarak rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının iyi bir şekilde yapılandırılmış olması gerekmektedir. Bu yapılandırmanın ne düzeyde gerçekleştiğinin belirlenebilmesi için ise rasyonel ve irrasyonel sayılar konusunda sahip olunan bilgilerin belirlenmesi önem arz etmektedir.

Bu önem üzerine bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin sahip oldukları bilgilerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıları nasıl tanımladıkları ve algıladıkları, bir sayının rasyonel ya da irrasyonel olup olmadığına nasıl karar verdikleri, hangi temsil biçimlerini kullandıkları, farklı temsillerinin eşitliğinin bilincinde olup olmadıkları, rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinalitelerini ve birbiri ile mukayesesini yapıp yapamadıkları ve bu süreçte ne şekilde akıl yürüttükleri ve sınıf düzeyine göre sahip olunan bu bilgilerde bir farklılık olup olmadığı araştırılmıştır. Böylece matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin eksik ve hatalı öğrenmelerinin neler olduğu belirlenmiş ve bu konudaki problemlerin çözümü adına birtakım öneriler getirilmiştir.

Alanyazında rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının öğretiminin zorluğuna vurgu yapılmakta ve bu konuda zorlanılan hususları ve eksiklikleri ortaya çıkarmayı hedefleyen araştırmaların önemi ve gereği üzerinde durulmaktadır (Desmet vd., 2010; Durmuş, 2005; Fischbein vd., 1995; Giannakoulias vd., 2007; Gürbüz & Birgin, 2008; Güven, Çekmez, & Karataş, 2011; Moseley 2005; Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005, Peled & Hershkovitz, 1999; Pesen, 2008; Shinno, 2007; Sirotic & Zazkis, 2007; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Voskoglou & Kosyvas, 2012; Yang, Li, & Lin, 2008; Zazkis & Sirotic, 2010). Ayrıca pek çok çalışmada ilkokul, ortaokul ya da lise öğrencilerinin rasyonel ve irrasyonel sayı kavramına ilişkin bilgilerinin incelendiği fakat, matematik öğretmen adaylarının bu konudaki bilgilerinin araştırıldığı çalışmaların yetersiz olduğu ifade edilmektedir (Durmuş, 2005; Sirotic & Zazkis, 2007; Tirosh vd., 1998; Zazkis & Sirotic, 2010).

Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin bilgilerinin belirlenmesi sayesinde mevcut bilgi eksiklikleri ve anlamaya dayalı problemleri belirlenmiş ve öğrenim seviyesindeki farklılığa göre sahip olunan bilgilerde bir değişiklik olup olmadığı tespit edilmiştir. Böylece lisans eğitimine yeni başlayan matematik öğretmen adayları ile lisans eğitiminin son yılında bulunan matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin bilgi düzeylerinin incelenmesi mümkün olmuştur. Ayrıca araştırmadan elde edilen sonuçlar, öğretmen yetiştiren matematik eğitimcilerinin rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının öğretiminde hangi hususlara dikkat etmeleri konusunda bir fikir vermektedir. Tüm bu hususlar dikkate alındığında çalışmanın alana katkı sunacağı düşünülmektedir.

Tüm bu tartışmaların ışığında araştırmanın problem cümlesi "*matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusundaki bilgileri nedir?*" olarak belirlenmiştir. Ayrıca araştırmada aşağıda belirtilen alt problem cümlelerine de cevap aranmıştır.

- Matematik öğretmen adayları rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarını nasıl tanımlamakta ve algılamaktadır?
- Matematik öğretmen adayları bir sayının rasyonel ya da irrasyonel sayı olduğuna nasıl karar vermektedir?

- Matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların temsil biçimleri konusundaki bilgileri nedir?
- Matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kümesinin ve irrasyonel sayılar kümesinin kardinalitesi konusundaki bilgileri nedir?

## YÖNTEM

### Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusunda sahip oldukları bilgilerin belirlenebilmesi için nitel araştırma yöntemlerinin kullanılmasına karar verilmiştir. Strauss ve Corbin (1990) kişilerin deneyim, bilgi ve düşüncelerinin belirlenmesinin amaçlandığı çalışmalarda nitel araştırma yöntemlerine başvurulmasının önemine işaret etmektedir.

Nitel bir yaklaşımın izlendiği bu araştırma bütüncül çoklu durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Bütüncül çoklu durum çalışmalarında her bir durum, kendi başına bir bütün olarak ele alınır ve daha sonra birbiriyle karşılaştırılır (Yıldırım & Şimşek, 2011). Bu araştırmanın durumlarını birinci sınıf matematik öğretmen adayları ve son sınıf matematik öğretmen adayları; analiz birimini ise rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusuna ilişkin sahip olunan bilgiler oluşturmaktadır. Dolayısıyla araştırmada, öncelikle birinci sınıf ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramı konusundaki bilgileri belirlenmiş ve sonrasında iki durum karşılaştırılmıştır. Nitel durum çalışmalarında bir olay, olgu veya sosyal birimin yoğun ve bütüncül bir şekilde tanımlanarak analiz edilmesinin mümkün olması (Merriam, 2009) bir avantaj olarak görülmektedir. Ayrıca durum çalışmalarında yapılan esnek yorumlar ile derinlemesine bilgilere ulaşılabiliyor olmasının (Yıldırım & Şimşek, 2011; Yin, 2009) oldukça önemli olduğu düşünülmektedir.

### Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını 2014-2015 eğitim-öğretim yılında Ankara ilinde bir devlet üniversitesinde lisans eğitimi almakta olan 40 ortaöğretim matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların 20'si (15 kız, 5 erkek) birinci sınıfta, diğer 20'si (13 kız, 7 erkek) ise son sınıfta öğrenim görmektedir. Katılımcıların bu şekildeki seçiminde sınıf düzeyindeki değişime bağlı olarak rasyonel ve irrasyonel sayılar konusundaki kavram bilgilerinde önemli farklılıkların olup olmadığının tespit edilmek istenmesi etkili olmuştur. Araştırmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemine uygun olarak kendini rahat ifade edebilme yetisi, akademik performans düzeyi (derslere katılımın yüksek olması ve sorumlu olunan derslerden başarılı olma şartı aranmıştır) ve gönüllülük kriterleri dikkate alınarak belirlenmiştir.

Çalışmanın katılımcısı olan son sınıf matematik öğretmen adayları beş yıllık programa tabi iken birinci sınıf matematik öğretmen adayları Yüksek Öğretim Kurulu tarafından alınan karar sonucunda dört yıllık programa tabi tutulmuşlardır. Öğretmen adaylarının öğrenim gördükleri lisans programında beş yıl boyunca verilen dersler arasında sayılar, sayı kümeleri ve sayıların öğretimi ile doğrudan ilişkili konuların yer aldığı dersler Tablo 1 de yer almaktadır.

**Tablo 1.** Matematik öğretmenliği programında yer alan bazı dersler

| Dersin adı | Dersin verildiği yarıyıl |
|---|---|
| Soyut Matematik I ve II | Birinci ve ikinci yarıyıl |
| Özel Öğretim Yöntemleri I ve II | Yedinci ve sekizinci yarıyıl |
| Matematikte Temel Kavramlar I ve II | Dokuzuncu ve onuncu yarıyıl |
| Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi | Dokuzuncu yarıyıl |
| Sayılar Teorisi | Onuncu yarıyıl |

## Verilerin Toplanma Süreci ve Analizi

Araştırmanın katılımcılarının belirlenmesi amacıyla 2014-2015 eğitim öğretim yılı güz döneminin başında lisans birinci sınıf öğrencileri iki hafta boyunca altı saat süreyle gözlenmiştir. Bu gözlemlerde düşüncelerini rahatça ifade edebilen ve sınıf içi etkinliklere aktif katılım sağlayan 20 matematik öğretmen adayı çalışmaya dâhil edilmiştir. Aynı sayıdaki beşinci sınıf matematik öğretmen adayı ise anabilim dalındaki tüm dersleri almış oldukları zaman dilimi olan 2014-2015 eğitim öğretim yılının bahar döneminin son haftasında araştırmaya katılmıştır. Lisans eğitimlerinin sonuna gelen matematik öğretmen adaylarının katılımcı olarak belirlenmesinde kendini ifade edebilme becerisi, aldığı lisans derslerinden başarılı olma durumu ve gönüllülük esası dikkate alınmıştır. Araştırmadan haberdar olan katılımcıların tamamının çalışma için gönüllü olduklarını bildirmeleri üzerine veri toplama sürecine başlanmıştır. Bu süreçte katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayılar konusundaki bilgilerinin belirlenebilmesi için öncelikle 16 sorudan oluşan bir soru formu hazırlanmıştır. Hazırlanmış olan bu form alanda çalışmaları olan iki uzman tarafından incelenmiş ve uygulanabilir olduğu görüşü alınmıştır. Bunun üzerine soru formları katılımcılara dağıtılmış ve cevaplar yazılı olarak alınmıştır. Söz konusu formda yer alan birkaç örnek soru aşağıda paylaşılmıştır.

*Örnek Sorular*

- Rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarını nasıl tanımlarsınız? Açıklayınız.
- Rasyonel ve irrasyonel sayı dediğimizde zihninizde ne canlanıyor? Açıklayınız.
- $\frac{1}{2}, 0, \sqrt{2}$, $0,\overline{9}$, 0,23233233323…, $\frac{53}{83}$, $\frac{22}{7}$ sayıları rasyonel midir yoksa irrasyonel midir? Cevabınızı gerekçelendiriniz.
- Reel sayı doğrusunda [0,1] aralığından bir sayı aldığınızı düşünün. Bu durumda aldığınız sayının rasyonel sayı olma ihtimali nedir?

Bu aşamadan sonra yazılı olarak verilen cevapları detaylandırmak için gönüllü olan birinci ve beşinci sınıf öğretmen adaylarından 10 katılımcı ile yaklaşık bir saat süren görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler katılımcıların kendilerini rahat hissedebilecekleri bir ortamda izinleri alınarak gerçekleştirilmiş ve görüşme süreci kayıt altına alınmıştır. Transkript edilen verilerin analizinde betimleyici bir yaklaşım takip edilerek durum temelli analizden yararlanılmıştır. Araştırma sürecinde çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini artırma adına bir dizi uygulamalar yapılmıştır. Bunlardan bazılarını şöyle sıralamak mümkündür: Öğretmen adaylarından ikisi ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen veriler ve alanda çalışmaları olan iki öğretim üyesinden alınan görüşler doğrultusunda hazırlanmış olan soru formu ve yarı yapılandırılmış görüşme formu düzenlenmiştir. Ayrıca toplanan nitel verilerin bir bölümü alanda çalışmaları olan bir öğretim elemanı tarafından da kodlanarak her iki analiz sonucu arasındaki uyum incelenmiştir. Bu aşamada Miles ve Huberman'ın (1994) önerdiği yöntem kullanılmış ve "Güvenirlik = (Görüş Birliği) / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)" formülü aracılığıyla uzlaşma oranı %91 olarak hesaplanmıştır. Bunun yanında araştırma süreci detaylı olarak betimlenmeye çalışılmıştır. Analizler sonucunda elde edilen bulgular titizlikle raporlaştırılmış ve bulgular paylaşılırken sık sık katılımcılardan alıntılar yapılarak bulgular desteklenmiştir. Son olarak araştırmadan elde bulgular katılımcılar ile paylaşılmış ve katılımcılar tarafından teyit edilmiştir.

## BULGULAR

### Rasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yapılan Tanımlar ve Kavramın Algılanış Biçimi

Araştırmada, katılımcıların bir kısmının rasyonel sayıların a/b tipindeki iki sayının oranı diğer bir kısmının ise denklik sınıfının temsilci bir elemanı olduğu anlayışına sahip oldukları belirlenmiştir. Bazı katılımcıların rasyonel sayıları kesir kavramı ile özdeşleştirdiği tespit edilmiştir. Rasyonel sayı kavramına ilişkin yapılan tanımlar incelendiğinde katılımcılardan birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının kavram bilgilerinin son sınıftakilere göre yetersiz olduğu anlaşılmıştır. Birinci sınıfların yaptığı tanımlarda rasyonel sayıların "a ve b birer tamsayı olmak üzere a/b" tipindeki sayılar olduğu vurgusu ön plana çıkmaktadır. Ayrıca yaptıkları tanımlarda denklik sınıfına değinmedikleri tespit edilmiştir. Son sınıfların yarıya yakınının rasyonel sayı kavramını tanımlamaya çalışırken denklik sınıfı kavramını referans aldıkları diğerlerinin ise birinci sınıfların yaptığı tanımlamalara başvurdukları görülmüştür. Denklik sınıfından bahseden katılımcılar yaptıkları tanımlarda geçen a ile b tamsayılarının aralarında asal olması gerektiğini, bu durumunun denklik sınıfından bir temsilci seçmeyle alakalı olduğunu ve bu hususu lisans derslerinde tartıştıklarını bildirmişlerdir. Ancak bazıları bu konuda derinlemesine bir tartışma yürütemeyeceklerini eklemişlerdir. Bir rasyonel sayının neden bir denklik sınıfı olduğu üzerine yapılan sorgulamalarda katılımcıların çok azı dışındakilerin gerekçe sunmakta zorlandığı belirlenmiştir. Ayrıca yapılan tanımların hiçbirinde rasyonel sayıların farklı anlamlarına vurgu yapılmadığı belirlenmiştir. Aşağıda bu bulguları destekleyen örnek katılımcı ifadelerine yer verilmiştir.

Katılımcı (1. sınıf): *"Rasyonel sayı a/b şeklinde olan sayılar, fakat b nin sıfırdan farklı olması gerekiyor. Bir de a, b nin katı olabilir ve a ve b tamsayılar."*

Katılımcı *(5. sınıf): "... mesela 1/2 ile 2/4 birbirine denk oluyor. Bir kümede aynı eleman 2 kez bulunmaz, hani bu aslında şey olarak gösteriliyor 1/2=2/4 kesirli ifade denklik denk ifade bunlar denk. Ama 2/4 ün sadeleşmiş hali 1/2 olduğu için 2/4 yazmama gerek yok yani o kümede. O onu da kapsamış oluyor, sadece 1/2'yi yazarım. {1/2, 2/4, 3/6, ...} kesirli ifadeler kümesi olur çünkü bunlar birbirine denk. Rasyonel sayı aslında denklik sınıfıdır ama hepsi birbirine denk olduğu için sadece 1/2 almamız yeterli 1/3 için de geçerli hepsinde böyle. O yüzden denklik sınıfından 1 tanesini alırız."*

Katılımcıların rasyonel sayı kavramına ilişkin yaptığı tanımlar Tablo 2 de yer almaktadır.

**Tablo 2.** Katılımcıların yaptığı rasyonel sayı tanımları

| | 1.Sınıf | | 5.Sınıf | |
|---|---|---|---|---|
| **Tanımlar** | **f** | **%** | **f** | **%** |
| **1.** a, b ∈ Z olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde olan sayılardır. | 12 | 60 | 2 | 10 |
| **2.** a, b ∈ Z için b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde olan sayılardır. | 8 | 40 | 6 | 30 |
| **3.** a, b ∈ Z, b≠0 ve (a, b) = 1 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde olan sayılardır. | - | - | 9 | 45 |
| **4.** (a,b) ve (c,d) için b ve d sıfırdan farklı iken $(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow ad = bc$ şeklinde bir bağıntımız olsun. $\overline{(a,b)} = \frac{a}{b}$ denklik sınıfı bir rasyonel sayıdır. | - | - | 3 | 15 |

## İrrasyonel Sayı Kavramına İlişkin Yapılan Tanımlar ve Kavramın Algılanış Biçimi

Araştırmada katılımcıların birçoğunun, irrasyonel sayı kavramını π, e ve √2, √3 gibi sayıları kullanarak kavramı sınırlı sayıda örnekle izah etme gereği duyduğu belirlenmiştir. Zaman zaman ‘köklü sayılar irrasyoneldir’ gibi aşırı genellemeler de yaptıkları tespit edilmiştir. İrrasyonel sayı kavramını sınırlı örnekler bağlamında ele alan katılımcılar bu durumu derslerde irrasyonel sayılara verilen önem, ayrılan süre ve bu sayıların kendilerine tanıtılma biçimi ile bağdaştırmışlardır.

*“Hocam irrasyonel sayılara lisede ya bir saat zaman ayrılır ya da iki saat, bunların üzerinde kimse durmaz derinlemesine. Lisansta da irrasyonel sayılar geçiyor ama kavramı birkaç derste sorguluyoruz. Onlar da zamanla unutulabiliyor.” … “Kafamda belli şekiller var hocam π, √2, √3… gibi bunlar irrasyonel sayıdır. Hep böyle gördük…”*

İrrasyonel sayı kavramını örnekler ile tanımlama eğiliminde olan katılımcılara örneklere bağlı kalmadan bir tanım yapmaları gerektiği ifade edildiğinde katılımcılar, *“rasyonel olmayan sayılar irrasyoneldir*” cevabını vermişlerdir. Yani irrasyonel sayı kavramını rasyonel sayı kavramını referans alarak tanımlamaya çalıştıkları görülmüştür.

Bunun dışında irrasyonel sayı kavramını, sayıların ondalık gösterimini referans alarak tanımlamaya çalışan katılımcılar da olmuştur. Bu katılımcılar, *“sonsuz ondalık açılıma sahip olan, devirli olan, basamakları arasında bir kural veya bir örüntü bulunmayan, ondalık gösterimde sonraki basamaklarda hangi rakamın geldiği bilinmeyen, sonsuza giden …”* şeklinde ifade ettikleri sayıların irrasyonel sayı olduğunu belirtmişlerdir.

Katılımcıların irrasyonel sayı kavramına ilişkin yapmış oldukları tanımlar Tablo 3'te paylaşılmıştır.

**Tablo 3.** Katılımcıların yaptığı irrasyonel sayı tanımları

| | 1.Sınıf | | 5.Sınıf | |
|---|---|---|---|---|
| **Tanımlar** | **f** | **%** | **f** | **%** |
| $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gibi köklü sayılar ya da $e$, $\pi$ gibi sayılardır. | 17 | 85 | 16 | 80 |
| Ondalık açılımı sonsuz olan sayılardır. | 14 | 70 | 12 | 60 |
| Ondalık açılımda basamaklar arasında bir ilişki olmayan ve ondalık açılımın ne şekilde devrettiğini bilmediğimiz sayılardır. | 9 | 45 | 8 | 40 |
| $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edemeyeceğimiz sayılardır. | 8 | 40 | 10 | 50 |
| Rasyonel olmayan sayılardır. | 7 | 35 | 14 | 70 |
| Devirli sayılar irrasyonel sayılardır. | 6 | 30 | 5 | 25 |

Verilen cevaplardan rasyonel sayı kavramını tam olarak yapılandıramayan pek çok katılımcının irrasyonel sayı kavramını da doğru bir şekilde tanımlayamadığı ve irrasyonel sayıların ondalık gösterimine ilişkin bazı kavram yanılgılarına (*sonsuz ondalık açılıma sahip olan sayılar irrasyoneldir, devirli sayılar irrasyoneldir, ondalık gösterimde basamakları arasında bir örüntü bulunmayan sayılar irrasyoneldir)* sahip olduğu belirlenmiştir.

## Bir Sayının Karakterine Karar Verme Süreçleri Hakkında Sahip Olunan Bilgiler

Katılımcıların bir sayının karakterini (rasyonel ya da irrasyonel olup olmadığını) belirlerken nelere dikkat ettikleri araştırılmış ve katılımcıların önemli bir bölümünün bu süreçte rasyonel sayı kavramının tanımını göz önünde bulundurduğu ve sayının kesir formunda yazılıp yazılamadığını inceledikleri anlaşılmıştır. Fakat bu aşamada yaptıkları tanımda yer alan a/b tipindeki sayılar için a ile b'nin aralarında asal olup olmaması konusunda ikilem yaşadıkları belirlenmiştir. Örneğin, *"1/2 ve 2/4 rasyonel midir? 1/2=2/4 ise birbirine eşit iki ifadeden biri rasyonel olurken diğeri nasıl rasyonel olmaz?"* gibi sorular kafalarını karıştırmıştır. Burada 1/2 ve 2/4 ün rasyonel olduğunu ifade eden katılımcılar, çoğunluğu oluşturmuştur. Diğer bazı katılımcılar ise denklik sınıfından dolayı sadece 1/2'nin rasyonel olduğunu 2/4 ün rasyonel olmadığını ifade etmişlerdir. Bu süreçte birinci sınıf matematik öğretmen adayları çok fazla fikir yürütemezken son sınıf matematik öğretmen adaylarının bir kısmı pay ve paydanın aralarında asal olmasının gerekli olduğunu ifade etmiştir. Fakat yine de 1/2=2/4 eşitliğinden dolayı *"Hocam biz bu konuyu aramızda çok tartıştık fakat işin içinden çıkamadık."* diyerek verdiği cevaptan emin olmadığını bildiren katılımcılar olmuştur.

Katılımcıların özellikle farklı sayı temsilleri ile karşılaştıklarında sayıların karakterine karar verme aşamasında zorlandıkları, özellikle ondalık gösterimi verilen sayıların karakterine karar verirken anlam karmaşası yaşadıkları belirlenmiştir. Bazı katılımcıların ise a/b şeklinde gösterilen sayıların rasyonel sayı, ondalık biçimde gösterilen sayıların ise irrasyonel sayı olduğu düşüncesine sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu katılımcıların bir sayının irrasyonel sayı olup olmadığına karar verirken ondalık gösterimi referans aldığı belirlenmiştir. Tüm bu bulgular, bazı katılımcıların bir sayının rasyonel ya da irrasyonel sayı olup olmamasını o sayının temsil biçimiyle ilişkilendirdiğini göstermektedir. *"1/2 rasyoneldir ama 0,5 rasyonel değildir"* şeklindeki örnek katılımcı ifadesi bu bulguyu desteklemektedir.

Bunun yanında bir sayının karakterine sayının ondalık gösteriminden yola çıkarak karar vermeye çalışan katılımcılar arasında *"sonsuz ondalık açılıma sahip olan sayılar irrasyonel sayıdır"* düşüncesinin ağırlık kazandığı tespit edilmiştir. Ayrıca bu katılımcıların sayıların karakterini belirleme sürecinde *"sayının devirli olup olmaması, sayının tüm basamaklarının bilinip bilinememesi ve sayının basamakları arasında bir örüntü bulunup bulunmaması"* biçiminde kendilerince belirlemiş oldukları kriterlere başvurdukları belirlenmiştir. Örneğin, $0,\overline{9}$=0,99999… sayısının karakterini belirlemeye çalışan katılımcılar bu sayının sonsuz ondalık açılıma sahip olduğu gerekçesiyle irrasyonel sayı olduğu şeklinde yanlış cevaplar vermişlerdir. Bu konuda problem yaşayan katılımcılar benzer şekilde 0,23233233323… sayısının karakterini belirlemeye çalışırken de yanlış cevaplar vermişlerdir. Benzer hatalara 22/7 sayısının karakterinin belirlenmesi sürecinde de rastlanmıştır. Bazı katılımcılar 22/7 sayısının kesir formuna bakarak *"22/7 rasyonel olmalı"* derken yine aynı sayının ondalık gösterimine bakarak *"22/7 irrasyonel olmalı"* cevabını vermiş ve bu konuda bilişsel çelişkiye düşmüşlerdir. Bir katılımcı: *"Hocam bu matematiğin bize bir oyunu! Bu nasıl olur?"* diyerek şaşkınlığını gizleyememiştir. Ayrıca bazı katılımcılar 22/7'nin π sayısına eşit olduğunu dolayısıyla irrasyonel olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Zira bazı katılımcılar 22'yi 7 ye bölmüşler ve 3,14… çıktığını görünce bölme işlemini devam ettirmeden 22/7'nin ondalık açılımı için *"bu sonsuza gider π'nin açılımıdır"* diyerek yanlış bir hükme varmışlardır. Katılımcılar bu cevabı verdikten hemen sonra, yaptıkları rasyonel sayı tanımıyla çelişkiye düşmüşler ve yaptıkları tanımı mı yoksa sayının ondalık açılımını mı referans almaları gerektiğine karar verememişlerdir. Sonuç olarak araştırmada hem birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının hem de beşinci sınıf matematik öğretmen adaylarının farklı temsilleri verilen sayıların rasyonel ya da irrasyonel olup olmadığına karar verme konusunda benzer problemlere sahip olduğu tespit edilmiştir.

**Rasyonel ve İrrasyonel Sayıların Farklı Temsil Biçimleri Hakkında Sahip Olunan Bilgiler**

Temsiller ile "kavram bilgileri" arasında önemli bir bağ olduğu bilinmektedir (Lamon, 2001). Katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin bilgilerinin göstergelerinden biri de sayıların farklı temsillerinin kullanımı olduğu için bu konu üzerinde durulmuştur. Araştırmada katılımcıların rasyonel sayıları kesir formunda (a/b) ifade ettiği, bunun dışındaki farklı temsil biçimlerine çok fazla aşina olmadıkları, irrasyonel sayıları ise ondalık biçimde gösterdikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte bir önceki başlık altında paylaşılan bulgularda görüldüğü gibi katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerinin eşitliğinin farkında olmadıkları belirlenmiştir. Bu sebeple katılımcılar bir sayının rasyonel ya da irrasyonel olup olmadığına karar verirken yanlış cevaplar vermişlerdir. Verilen cevaplar katılımcıların bazılarının bir sayının ondalık açılımının sonsuz ya da sonlu olmasının o sayının karakterine karar vermede yeterli olacağı düşüncesine sahip olduklarını göstermektedir. Buradan katılımcıların sayıların temsil biçimleri konusunda yeterli bilgiye sahip olmadıkları anlaşılmaktadır. Bu tespit, hem birinci sınıf matematik öğretmen adayları hem de son sınıf matematik öğretmen adayları için söz konusudur.

**Rasyonel ve İrrasyonel Sayı Kümelerinin Kardinalitesine İlişkin Sahip Olunan Bilgiler**

Matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayılar kümelerinin kardinalitesine ilişkin sahip olduğu bilgileri belirlemek için katılımcılara temel üç soru sorulmuştur.

**Soru1:** Rasyonel sayılar kümesinin eleman sayısı nedir?

Tablo 4'te katılımcıların birinci soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdelik dağılımı paylaşılmıştır.

**Tablo 4.** Rasyonel Sayılar Kümesinin Eleman Sayısına İlişkin Cevaplar

| | **1.Sınıf** | | **5.Sınıf** | |
|---|---|---|---|---|
| | **f** | **%** | **f** | **%** |
| **1.** Sonsuzdur | 13 | 65 | 17 | 85 |
| **2.** Sayılamaz sonsuzdur | - | - | 4 | 20 |
| **3.** Alef sıfırdır, sayılabilir sonsuzdur | - | - | 13 | 65 |
| **4.** Sonludur | 2 | 10 | 0 | 0 |
| 5. Fikrim yok | 5 | 25 | 3 | 15 |

Buna göre birinci sınıflardan 13 kişi, beşinci sınıflardan ise 17 kişi rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin "sonsuz" olduğunu belirtmiştir. Birinci sınıflar sonsuzluğun ne tip bir sonsuzluk olduğu konusunda fikir beyan etmezken son sınıfların yarıdan fazlası rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin "alef sıfır" olduğunu belirtmişlerdir. Fakat alef sıfırın nasıl bir çokluk olduğu konusunda fikirlerinin berrak olmadığı anlaşılmıştır. Zira bazı katılımcılar rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin alef sıfır olduğunu söylerken açıklamalarında bunun sayılamaz sonsuz olduğunu belirtmişlerdir. Bu konudaki öğrenmenin bilgi düzeyinde kaldığı ve sayılamaz sonsuz kavramının yeterince içselleştirilemediği anlaşılmaktadır.

Katılımcı (5.sınıf): *"Doğal sayıların eleman sayısı geldi aklıma... Alef sıfır mıydı ve rasyonel sayıların kardinalitesi de buna eşitti. Bunu hatırlamasaydım rasyonel sayılara sayılamaz derdim ama bunu hatırladım sanki cebirde gördük. Şimdi bir dakika diğer dersten başka bir şey hatırladım doğal sayılar sayılabilir sonsuzdu ama rasyonel sayılar sayılamaz. Çünkü 1 ile 2'yi düşündüğümde bu iki sayı arasında sonsuz rasyonel sayı sıkıştırabilirim yani bir sürü. Sayılamaz sonsuz diye hatırladım. Yanlış hatırlıyor olabilirim. Sayılamaz sonsuz diyeceğim."*

Bunun yanında beşinci sınıflardan dört kişi aranan cevabın "sayılamaz sonsuz" olduğunu birinci sınıflardan iki kişi ise "sonlu" olduğunu iddia etmiştir. Toplamda sekiz katılımcı ise bu konuda fikir beyan etmemiştir.

Sonuç olarak Tablo 4'te de görüldüğü gibi son sınıf matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin ne olduğuna ilişkin soruya daha başarılı cevaplar verdiği, fakat sonsuzluğun farklı tiplerini yorumlamakta zorlandıkları belirlenmiştir.

**Soru 2:** İrrasyonel sayılar kümesinin eleman sayısı nedir?

Tablo 5'te katılımcıların ikinci soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdelik dağılımı paylaşılmıştır.

**Tablo 5.** İrrasyonel Sayılar Kümesinin Eleman Sayısına İlişkin Cevaplar

| | **1.Sınıf** | | **5.Sınıf** | |
|---|---|---|---|---|
| | **f** | **%** | **f** | **%** |
| **1.** Sonsuzdur | 13 | 65 | 15 | 75 |
| **2.** Sayılamaz sonsuzdur | - | - | 6 | 30 |
| **3.** Alef sıfırdır, sayılabilir sonsuzdur | - | - | 9 | 45 |
| **4.** Sonludur | 4 | 20 | 3 | 15 |
| **5.** Bilemeyiz | - | - | 1 | 5 |
| **6.** Fikrim yok | 3 | 15 | 1 | 5 |

Buna göre birinci sınıflardan 13 kişi, beşinci sınıflardan ise 15 kişi rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin "sonsuz" olduğunu belirtmiştir. Birinci sınıflar ilk soruda olduğu gibi irrasyonel sayılar kümesinin sonsuzluğunun ne tip bir sonsuzluk olduğu konusunda fikir beyan etmezken, son sınıfların bir kısmı bu soruya "sayılamaz sonsuz" diğer bir kısmı da "alef sıfır" cevabını vermişlerdir. İrrasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin sonlu olduğunu düşünen katılımcıların, rasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin sonlu olduğunu düşünenlerden fazla olduğu görülmektedir. İrrasyonel sayılar kümesinin kardinalitesinin sonlu olduğunu düşünen katılımcıların, bildikleri irrasyonel sayıların sayısının sonlu sayıda olması ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi$ $gibi$) sebebiyle bu düşünceye kapıldıkları tespit edilmiştir.

**Soru 3:** Aşağıda gördüğünüz sayı doğrusu üzerindeki her bir nokta bir reel sayıyı temsil etmektedir. Sizden bu sayı doğrusu üzerinde yer alan herhangi bir noktayı seçmeniz isteniyor. Seçtiğiniz bu noktanın temsil ettiği sayının rasyonel sayı olma olasılığı nedir?

Tablo 6'da katılımcıların üçüncü soruya verdikleri cevapların dağılımı paylaşılmıştır.

**Tablo 6.** Üçüncü soruya verilen cevapların dağılımı

| | 1.Sınıf | | 5.Sınıf | |
|---|---|---|---|---|
| | **f** | **%** | **f** | **%** |
| **1.** 0 (sıfır, 1/sonsuz) | 1 | 5 | 1 | 5 |
| **2.** 1/2 (%50) | 12 | 60 | 8 | 40 |
| **3.** sonsuz/sonsuz (bilemeyiz) | 6 | 30 | 11 | 55 |
| **4.** Sonsuz (∞) | 1 | 5 | - | - |
| **5.** Bir cevap veremem | 14 | 70 | 11 | 55 |

Katılımcıların bu soruya cevap vermekte oldukça zorlandıkları ve fikirlerini sürekli değiştirdikleri belirlenmiştir. Cevapların büyük bir bölümünün "%50" ile "sonsuz/sonsuz olduğundan bilemeyiz" şeklinde olduğu belirlenmiştir. Rasyonel ve irrasyonel sayılar kümelerinin kardinalitelerinin ne olduğundan tam emin olmadıkları için sürekli birbirinden farklı cevaplar öne sürerek bunların doğru olup olmadığını anlamaya çalışmışlar, kesin bir sonuca varamadıkları durumda da bu soruya bir yanıt veremediklerini ifade etmişlerdir. Bu tespit hem birinci sınıfların hem de son sınıfların söz konusu sayı kümelerinin kardinaliteleri konusunda bilgi eksikliklerinin olduğunu göstermektedir.

Katılımcı (5.sınıf): *Hocam "sonsuz/sonsuz"u soruyorsunuz bana. Yani sonsuz bölü sonsuza benim limitle yaklaşmam lazım yani bir fonksiyon olması lazım onun oranına bakmam lazım ama sonsuz bölü sonsuz tanımsız yani. Limitte onu çok açıklayamıyor ortada bir fonksiyon yok bir şey yok.*

Katılımcı (1.sınıf): *1/2, %50'dir. Yani ya irrasyoneldir ya rasyoneldir. Çünkü reel sayılar rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların birleşiminden oluşur. O zaman seçtiğimiz şey ya rasyonel olacak ya da irrasyonel olacak.*

Bu bölümde son olarak, elde edilen bulgular bütüncül bir şekilde değerlendirilmiştir. Buna göre, rasyonel sayı kavramını doğru bir şekilde yapılandıramayan katılımcıların irrasyonel sayı kavramını da yapılandırmakta zorlandığı belirlenmiştir. Ayrıca irrasyonel sayı kavramını tanımlarken bir irrasyonel sayının bir denklik sınıfının temsilcisi olduğunu aktaran katılımcıların dahi bu bilgiyi içselleştiremediği, bu konuda sadece derslerde duyduklarını aktardıkları anlaşılmıştır. Bu katılımcılar özellikle irrasyonel sayıları özel örneklerle açıklama girişiminde oldukları belirlenmiştir. Rasyonel ve irrasyonel sayı kavramının uygun tanımını yapamayan bu katılımcıların bir sayının karakterine karar verirken sık sık hataya düştüğü, hatta azımsanamayacak orandaki uygun tanımı yapan katılımcıların dahi bu konuda yeterince başarılı olamadığı tespit edilmiştir. Bu durum, katılımcıların önemli bir bölümünün rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusundaki bilgilerinin işlemsel düzeyde kaldığına işaret etmektedir. Dolayısıyla bu katılımcıların bir sayının karakterine karar verirken o sayının gösterim biçimine odaklandığı anlaşılmıştır. Sayıların sadece gösterim biçimini referans alarak sayının karakterine karar veren katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayılar konusunda kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiş ve farklı temsillerin eşitliğinin farkında olmadıkları görülmüştür. Bunun yanında katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinalitesi konusundaki bilgileri ile kavram tanımına ilişkin bilgileri arasında bir bağlantı tespit edilememiştir. Zira hem rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarını uygun bir şekilde tanımlayanların hem de tanımlayamayanların rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinaliteleri konusunda yüzeysel düzeyde bilgiye sahip oldukları belirlenmiştir. Doğal olarak rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinaliteleri arasında bir mukayese yapmaları istendiğinde söz konusu katılımcıların çok büyük bir bölümünün cevap veremediği belirlenmiştir. Bu katılımcıların sonsuzluk kavramı ve rasyonel ve irrasyonel sayıların sayı doğrusu üzerindeki dizilişleri konusunda da bilgi eksiklerinin bulunduğu görülmüştür. Araştırmadan elde edilen bulgular dikkate alındığında genel olarak son sınıf matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayı kavramını birinci sınıf matematik öğretmen adaylarından daha doğru bir şekilde tanımladığı ve rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinaliteleri ve sonsuzluk kavramı konusunda daha fazla bilgiye sahip olduğu anlaşılmıştır. Fakat irrasyonel sayı kavramının formel tanımını yapma, bir sayının karakterine karar verme ve sayıların farklı temsil biçimlerini bilme ve farklı temsillerin eşitliğinin farkında olma hususunda her iki öğrenim düzeyindeki katılımcıların da sahip olduğu bilgiler arasında ciddi bir farklılık görülmemiştir. Araştırmada ulaşılan bu bulgular, matematik öğretmeni yetiştiren kurum ve eğitimcilerin üzerinde durması gereken bir tablo ortaya koymaktadır.

## SONUÇ ve TARTIŞMA

Araştırmada, birinci sınıf matematik öğretmen adaylarının hemen hemen tamamının rasyonel sayıları, '*a/b şeklinde yazılabilen sayılar*' olarak algıladığı ve kavramı bu yönde tanımladığı belirlenmiştir. Son sınıf matematik öğretmen adaylarının bir kısmının da benzer tanımı yaptığı, yarıdan fazlasının ise birinci sınıfların göz ardı ettiği rasyonel sayıların bir denklik sınıfı olduğu ve a/b nin de bu denklik sınıfının bir temsilcisi olduğunun farkında oldukları belirlenmiştir. Bu sonuç, son sınıf matematik öğretmen adaylarının yaptığı rasyonel sayı tanımlarının daha ileri düzeyde olduğunu göstermektedir. Buna karşın, rasyonel sayı kavramının tanımını doğru bir şekilde ifade edebilen son sınıf matematik öğretmen adaylarının büyük bir bölümünün dahi rasyonel sayı kavramının neden bu şekilde yapılandırıldığı konusunda derinlemesine bilgi sahibi olmadığı anlaşılmıştır. Alanyazında, bu araştırmanın sonuçlarına paralel olarak rasyonel sayıların kavramsal olarak öğretilmesinde zorluklarla karşılaşıldığı ve çeşitli öğrenim kademesindeki öğrencilerin ve matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayı kavramına ilişkin işlemsel düzeyde bilgiye sahip oldukları belirtilmektedir (Ball, 1990; Birgin & Gürbüz, 2009; Gürbüz & Birgin, 2008; Haser & Ubuz, 2000; İpek, Işık, Albayrak, 2005; Mack, 1995; Orfanos & Kalavassis, 2002; Şiap & Duru, 2004; Tirosh & Graeber, 1990; Toluk, 2002; Yanık, Helding, & Flores, 2008; Sirotic & Zazkis, 2010).

Katılımcıların önemli bir kısmının rasyonel sayı kavramını *'a bir tamsayı ve b de sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere a/b şeklindeki sayılar'* şeklinde tanımlaması üzerinde bazı ortaokul ve lise matematik ders kitaplarında yer alan bu şekildeki tanımlamaların etkili olduğu söylenebilir. Bunun yanında, katılımcıların rasyonel sayı kavramına ilişkin yaptıkları tanımların sınıf düzeyine göre bir farklılık arz etmesi üzerinde son sınıf matematik öğretmen adaylarının almış olduğu lisans derslerinin etkili olduğu söylenebilir. Bu konuda lisans derslerinin matematik öğretmen adaylarının bu husustaki gelişimi adına etkili fakat yeterli olmadığı söylenebilir. Rasyonel sayı kavramının farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerce farklı şekillerde yapılandırıldığı yönünde benzer sonuçlara ulaşan Gürbüz ve Birgin (2008) ve Birgin ve Gürbüz (2009), zihinsel gelişimin olgunlaşmasının etkili olduğunu ve bu bağlamda öğrenim seviyesi arttıkça olumlu yönde bir gelişimin gözlendiğini belirtmektedir.

İrrasyonel sayı kavramına ilişkin katılımcıların yapmış olduğu tanımlar incelendiğinde ise tanımların birçoğunun özel örnekler üzerine kurulu olduğu anlaşılmaktadır. Yakın gelecekte öğretmen olacak olan katılımcıların irrasyonel sayı kavramını bu şekilde tanımlamalarının önemli bir eksiklik olduğu düşünülmektedir. Çünkü irrasyonel sayı kavramının sadece özel örnekler bağlamında tanıtılmasının, kavramsal anlamaya istenen düzeyde katkı sunmayacağı düşünülmektedir. Zira öğretmenlerin kavramsal ve işlemsel bilgilerindeki yeterliliklerin öğrencilerin rasyonel sayıları ve dolayısıyla irrasyonel sayıları anlamaları üzerinde önemli bir rol oynadığı ifade edilmektedir (Durmuş, 2005). Bu sebeple, matematik öğretmen adaylarının irrasyonel sayı kavramını sınırlı sayıda örnek üzerinden açıklama girişimini bir ileri seviyeye taşımasının gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu konudaki eksikliğin nedeni, irrasyonel sayı kavramının ve bir sayının irrasyonelliğinin yazılı kaynaklarda sınırlı örneklerle izah edilmesi (Çiftçi, Akgün, & Soylu, 2015) ve öğretmen adaylarının da bu kaynaklardan yararlanması olabilir. Burada her ne kadar rasyonel ve irrasyonel sayıların sadece özel örneklere bağlı kalınarak tanıtılmasını doğru bulmasak da bu kavramların öğretiminde zengin örnek çeşitlerinden faydalanılmasının öğrenenlerin bu konudaki kavramsal anlama düzeyine pozitif yansımalarının olacağı düşünülmektedir. Alanda çalışmaları olan birçok araştırmacı bu düşünceyi desteklemektedir (Fischbein vd., 1995; MacHale, 1980; Mason & Pimm, 1984).

Araştırmada irrasyonel sayı kavramına yönelik yapılan diğer tanımlarda ise irrasyonel sayıların rasyonel olmayan sayılar olduğu vurgusunun ön planda olduğu ve dolayısıyla bu aşamada rasyonel sayı kavramının referans alındığı belirlenmiştir. Bu yaklaşım irrasyonel sayı kavramının anlaşılması üzerinde rasyonel sayı kavramına ilişkin sahip olunan bilgilerin belirleyici olacağının bir göstergesidir. Benzer bir tespit Voskoglou ve Kosyvas (2012) ve Toluk (2016) tarafından da yapılmış ve rasyonel sayı anlayışındaki eksikliklerin irrasyonel sayıların tanımlanması ve anlaşılmasında etken olduğu ifade edilmiştir. Dolayısıyla rasyonel sayı kavramını uygun bir şekilde yapılandıramayan öğrencilerin irrasyonel sayı kavramını anlama ve algılama konusunda zorlanması kaçınılmazdır. Alanyazında öğrencilerin hem rasyonel hem de irrasyonel sayı kavramını anlamada ve bu sayıları kullanarak işlem yapmada zorluk çektikleri belirtilmektedir (Desmet vd., 2010; Durmuş, 2005; Fischbein vd., 1995; Giannakoulias vd., 2007; Gürbüz & Birgin, 2008; Güven vd., 2011; Moseley 2005; Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005, Peled & Hershkovitz, 1999; Pesen, 2008; Shinno, 2007; Sirotic & Zazkis, 2007; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Voskoglou & Kosyvas, 2012; Yang, Li, & Lin, 2008; Zazkis & Sirotic, 2010). Rasyonel ve irrasyonel sayılara ilişkin karşılaşılan zorlukların temelinde rasyonel sayıların tam olarak anlaşılamamış olmasının etkili olabileceği ifade edilmektedir (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Bunun yanında karşılaşılan zorlukların diğer nedenleri arasında, bazı öğrencilerin bu kavramları anlamak yerine belli formülleri ve kavramlarla ilgili çözüm sistemlerini ezberleme eğiliminde olmaları (Gürbüz & Birgin, 2008; Şiap & Duru, 2004), sayıların çoklu temsilleri ile karşılaşmamış olmaları (Voskoglou & Kosyvas, 2012), kavramların sınırlı bir süreçte öğretilmeye çalışılması (Peled & Hershkovitz, 1999), rasyonel sayıların doğal sayılardan daha farklı ve karmaşık özelliklere sahip olması ve farklı anlamlarının olması (Behr, Lesh & Post, 1983; Durmuş, 2005; Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Toluk, 2002; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010) ve irrasyonel sayıların oransızlık, ölçülemezlik ve sayılamazlık özelliklerine sahip olması (Fischbein vd., 1995; Güven, Çekmez, & Karataş, 2011; Peled & Hershkovitz, 1999; Shinno, 2007; Sirotic & Zazkis, 2007; Voskoglou & Kosyvas, 2012; Zazkis & Sirotic, 2010) gösterilmektedir. Bu araştırmada her iki öğrenim seviyesindeki matematik öğretmen adaylarının da rasyonel ve irrasyonel sayı kavramına ilişkin teorik bilgileri içselleştirilemediği ve önemli bilgi eksikliklerinin bulunduğu anlaşılmıştır. Bu sonuç alanyazınca da desteklenmektedir (Çiftçi vd., 2015; Güven, Çekmez, & Karataş, 2011; Peled & Hershkovitz, 1999; Moseley 2005; Sirotic & Zazkis, 2007; Temel & Eroğlu, 2014; Voskoglou & Kosyvas, 2012; Zazkis & Sirotic, 2010).

Araştırmadan elde edilen diğer önemli bir sonuç ise matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerini kullanma ve farklı temsillerin eşitliğinin bilinmesine ilişkin bilişin kazanılmasındaki eksikliklerinin olduğu yönündedir. Bazı katılımcıların aynı matematiksel nesneleri (rasyonel ve irrasyonel sayıları) karşılayan farklı temsil biçimlerine ilişkin yanlış anlamalara (kesir gösterimi olan sayılar rasyoneldir, ondalık gösterimi olan sayılar irrasyoneldir gibi) sahip oldukları görülmüştür. Bazı katılımcıların 0,5 in irrasyonel, 1/2' nin ise rasyonel olduğunu düşünmesi bu durumu örneklendirmektedir. Bu katılımcılar, bir sayının gösterim biçiminin o sayının karakterini belirleyeceğini düşünmekte ve bir sayının farklı gösterimlerini farklı sayılar olarak algılamaktadırlar. Toluk'un (2016) öğretmen adaylarının rasyonel sayıları genellikle kesir gösterimi ile irrasyonel sayıları ise kök temsili ile ilişkilendirdikleri yönündeki tespiti benzer bir sonucu ortaya koymaktır. Bu durum, sayı kavramlarının öğretiminde çoklu temsil kullanımındaki eksikliğe işaret etmektedir. Katılımcıların irrasyonel sayıların ondalık gösterim dışındaki temsil biçimlerinin farkında olmaması bu konudaki problemin daha derin olduğunu ortaya koymaktadır. Benzer sonuçlara diğer bazı çalışmalarda da ulaşılmış ve öğrencilerin bir sayının farklı temsillerinin kullanımı konusunda başarısız oldukları ve bu temsiller arasında esnek bir geçiş yapmakta güçlük çektikleri ifade edilmiştir (Aktaş, Apaydın, & Aktaş 2014; Haser & Ubuz, 2002; Şiap & Duru, 2004; O'Connor, 2000; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Araştırmada, sadece rasyonel ve irrasyonel sayı kavramının tanımlarını ve temel özelliklerini bilme konusunda eksiklikleri bulunan katılımcıların değil, bu konuda yetkin olan katılımcıların dahi farklı temsillerin kullanımı ve farklı temsillerin eşitliği konusunda başarısız oldukları belirlenmiştir. Bu sonuç diğer bazı çalışmalar tarafından da desteklemektedir (Peled & Hershkovitz, 1999; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Şandır, Ubuz & Argün, 2007; Temel & Eroğlu, 2014). Bunun yanında rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerinin bilinmesi ve kullanımı konusunda elde edilen sonuçlar bakımından öğrenim seviyesine göre bir farklılık olmadığı belirlenmiştir. Bu durum, rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsilleri ve farklı temsillerin eşitliğinin hem lisans öncesi dönemde hem de lisans aşamasında çok fazla üzerinde durulan bir konu olmadığı yönünde yorumlanabilir. Gürbüz ve Birgin (2008) araştırmadan elde edilen bu sonuçtan farklı olarak, öğrencilerin öğrenim seviyeleri arttıkça rasyonel sayıların farklı temsil biçimlerini kullanarak işlem yapma becerilerinin arttığı sonucuna ulaşmıştır. Sayı kavramlarının anlaşılmasında çoklu temsil kullanımının önemi düşünüldüğünde (Zazkis & Sirotic, 2004) katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerine ilişkin bilgilerindeki eksikliğin giderilmesi önem arz etmektedir. Zira Moseley (2005), sayılara ilişkin kavram bilgisi ve temsil biçimleri konusundaki bilgi eksikliklerinin kavram yanılgılarına sebep olduğunu belirtmektedir. Bu araştırmada da bu konuda bilgi eksikliğine sahip olan katılımcıların “devirli sayılar irrasyoneldir, ondalık açılımında basmaklar arasında bir örüntü olmayan sayılar irrasyoneldir, sonsuz ondalık açılımı olan sayılar irrasyoneldir, $0,\overline{9}$=0,99999… ve 22/7 irrasyoneldir, ondalık gösterimi olan sayılar irrasyoneldir, irrasyonel sayılar kümesi sonludur, köklü sayılar irrasyoneldir, rasyonel sayılar sayılamazdır, rasyonel sayılar kümesi sonludur, rasyonel sayıların ondalık açılımı yoktur” şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmüştür. Benzer sonuca bazı çalışmalarda da ulaşılmış ve kavram yanılgılarının temelde sayıların temsil biçimleriyle ilişkili olduğu ifade edilmiştir (Burroughs & Yopp, 2010; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Weller, Arnon & Dubinsky, 2009; Dubinsky, Arnon & Weller, 2013). Bunun dışında öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımı (Güven vd., 2011; Sirotic & Zazkis, 2007), karşılaştırılması, sıralanması ve sayı doğrusu üzerinde gösterilmesi (Peled & Hershkovitz, 1999; Pesen, 2008; Seyhan & Gür, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004) konusunda kavram yanılgılarına sahip oldukları belirtilmektedir.

Araştırmada rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının eksik yapılandırılmasının ya da yapılandırılamamasının veya farklı temsillerin kullanımına ilişkin bilişin yetersiz olmasının ve bu konuda kavram yanılgılarının bulunmasının, katılımcıların bir sayının karakterine karar verme becerisini doğrudan etkilediği belirlenmiştir. Bu sonucu destekleyen çalışmalarda (Peled & Hershkovitz, 1999; Sirotic & Zazkis, 2007; Toluk 2016) öğretmen adaylarının bir sayının karakterine karar verme aşamasında sayının temsil biçiminin etkili olduğu belirlenmiştir. Bu aşamada öğretmen adaylarının oldukça zorlandığı belirtilmektedir (Fischbein vd., 1995; Tirosh vd., 1998; Toluk 2016). Bu konuda zorluk çeken öğretmen adayları Toluk’a (2016) göre tanım ve formel bilgilerinden ziyade geçmiş deneyimlerine göre karar vermekte, Güven, Çekmez ve Karataş (2011) ile Voskoglou ve Kosyvas'a (2012) göre de teorik bilgilerinden çok sezgilerine göre hareket etmektedirler. Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının bir sayının karakterine karar verirken daha çok o sayının temsil biçimine dikkat ettikleri ve bu konuda öğrenim seviyesine göre önemli bir farklılık olmadığı belirlenmiştir. Katılımcılar, çok karşılaşılan tipik rasyonel ve irrasyonel sayı örneklerini bilmelerinin sorumlu oldukları sınavlardan başarılı olmaları ve aldıkları dersleri geçmeleri için yeterli olduğunu dile getirmişlerdir. Merkezi sınavlara girecekleri dönemlerde bu kavramların kavramsal temelleri üzerine kafa yormanın zaman kaybı olacağı görüşünün öğrenciler arasında hâkim olduğunu belirten katılımcılar söz konusu kavramların özel örneklerle tanıtılmasını bu sebebe bağlamışladır. Bu durum eğitim sistemimiz ve uyguladığımız ölçme değerlendirme yöntemlerinin rasyonel ve irrasyonel sayıların kavramsal düzeyde öğretilmesinin önünde bir engel teşkil ettiği söylenebilir.

Araştırmanın bir diğer sonucu, rasyonel ve irrasyonel sayılar kümesinin kardinalitesi konusundaki son sınıf öğretmen adaylarının bilgi düzeylerinin birinci sınıflara göre daha ileride olduğu, fakat ele alınan sayı kümelerinin kardinaliteleri ve aralarındaki ilişkiyi kavramsal anlamda tam olarak yapılandıramadıkları belirlenmiştir. Ayrıca sonsuzluk kavramının ifade ettiği anlam konusunda katılımcıların oldukça sığ bilgilere sahip oldukları tespit edilmiştir. Dolayısıyla söz konusu sayı kümelerinin kardinalitesini belirleme, birbirleri ile mukayese etme ve bu konuda tartışma yürütme konusunda her iki sınıf düzeyinde de problemlerin olduğu belirlenmiştir. Bu sonuca paralel olarak Fischbein vd. (1995) sayı sistemleri ve sayı kümeleri konusunda öğretmen adaylarının sahip oldukları bilgilerin tutarsız, belirsiz ve tam olmadığını ifade etmektedir.

Katılımcılar rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarına ilişkin bilgi eksiklerinin ve kavram yanılgılarının ve bu kavramlar üzerinde etkili bir muhakeme ortaya koyamamalarının sebebinin, çeşitli öğrenim seviyelerinde bu kavramlar üzerinde yeterince tartışma yapılmaması ve bu kavramların öğretimi için ayrılan sürenin yetersizliği olduğunu ifade etmişlerdir. Matematik öğretim programlarında rasyonel sayılar konusunun öğretimine ilişkin yedinci sınıf seviyesinde dokuz kazanım belirlenmiş 30 ders saati süre tavsiye edilmiştir. İrrasyonel sayı kavramına ilişkin ise sekizinci sınıf seviyesinde yaklaşık üç ders saatine karşılık gelen bir kazanım belirlenmiş bulunmaktadır (MEB, 2013a). Ortaöğretime geçildiğinde durum pek farklı değildir. Rasyonel ve irrasyonel sayılar konularına sadece dokuzuncu sınıf seviyesinde "gerçek sayılar" başlığı altında dört saatlik bir kazanım ayrılmış bulunmaktadır (MEB, 2013b). Bu durum, sayılar öğrenme alanının kendine geniş yer bulduğu matematik öğretim programlarında rasyonel sayıların özellikle de irrasyonel sayıların geri planda kaldığını göstermektedir. Lisans seviyesinde standartlaştırılmış bir öğretim programı olmadığı için rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının ele alınacağı derslerin içeriğinin ve sayısının belirlenmesi konusunda öğretmen yetiştiricilere önemli görevler düşmektedir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların öğretimine gereken süreyi ayırmamak ve aceleci davranmak bu konudaki kavrayışı olumsuz etkileyebilmektedir (Bezuk & Bieck, 1993. Bu sebeple rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının öğretiminde öğrencilere uzun süreli deneyimler yaşatılması gerekmektedir.

## ÖNERİLER

Araştırmada, rasyonel ve irrasyonel sayıların kavramsal temellerinin tartışıldığı derslerin sayısının ve bu derslerde ayrılan sürenin oldukça sınırlı olduğu belirlenmiş ve bunun sonucunda matematik öğretmen adaylarının eksik ve hatalı bilgilere sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu durum göz önüne alınarak rasyonel ve irrasyonel sayıların öğretimine daha fazla zaman ayrılması önerilebilir. Ayrıca öğretmenlerin/öğretim üyelerinin derslerinde bu sayıların kavramsal düzeyde tartışıldığı etkinliklere yer vermeleri ve böylece öğrencilerin bu kavramlar üzerinde daha fazla düşünmelerinin sağlanması önerilebilir.

Bunun yanında araştırma sonuçları dikkate alındığında, rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının sadece tanımı verilerek geçilecek ya da birkaç sayı örneği ile tanıtılacak kavramlar olmadığı anlaşılmıştır. Bu sonuçlardan yola çıkarak, yapılan tanımlarda rasyonel sayıların denklik sınıfının bir temsilcisi olduğunun, rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerinin bulunduğunun, bir sayının farklı temsillerinin eşitliğinin söz konusu olduğunun ve bir sayının karakterine sadece temsil biçimini göz önüne alarak karar vermenin her zaman uygun bir yöntem olmadığının vurgulanması önerilebilir. Ayrıca rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin kardinalitelerinin ne olduğu konusunda, dolayısıyla sonsuzluk kavramı ve çeşitleri hakkında farkındalık kazandırılması faydalı olabilir.

İleriki çalışmalarda matematik öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları ile ilgili yanlış, hatalı ya da eksik bilgilerinin kaynağının tam olarak ne olduğu ve lisans eğitiminin son yılına kadar var olan bazı problemlerin neden hala çözümlenemediği boylamsal araştırmalarla ele alınabilir. Böylece sebepleri belirlenen problemler için etkili çözüm stratejileri geliştirme fırsatı doğmuş olur.

## KAYNAKÇA


Aktaş, M. C., Apaydın, Z., & Aktaş, D. Y. (2014). 9. Sınıf Öğrencilerinin Rasyonel Sayılar Kümesinin Yoğunluğunu Anlama Düzeyleri. *Eğitim ve Bilim, 39*(171).

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics, 7*(2), 18-23.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramlarının künyesi.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Baki, A. & Bell, A. (1997). *Ortaöğretim matematik öğretimi* 1. Cilt, YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 8, 40-48.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, 132-144.

Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8 sınıflar)* (2.Baskı). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Behr, M. J., Lesh, R., & Post, T. R. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (pp.91-125). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.296-333). New York: Macmillan.

Bezuk, N. S. & Bieck, M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom-Middle grades mathematics* (pp.118-136). New York: Macmillan.

Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 22*(2), 529-550.

Burroughs, E. A., & Yopp, D. (2010). Prospective teachers' understanding of decimals with single repeating digits. *Investigations in Mathematics Learning, 3*(1), 23-42.

Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics?: An elementary approach to ideas and methods.* OUP Us.

Çiftçi, Z., Akgün, L., & Soylu, Y. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılarla ilgili anlayışları. *Journal of Kırsehir Education Faculty*, 16(1).

Desmet, L., Gregoire, J., & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction, 20,* 521-532.

Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13*(3), 232-258.

Durmuş, S. (2005). İlköğretim öğretmen adaylarının rasyonel sayıları anlama düzeylerinin belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *5*(2), 639-666

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in high school student and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29,* 29-44

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21*, 27–37

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. *In Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (pp.416-425).

Gürbüz, R., & Birgin, O. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin rasyonel sayıların farklı gösterim şekilleriyle işlem yapma becerilerinin karşılaştırılması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(23), 85-94.

Güven, B., Çekmez, E., & Karataş, I. (2011). Examining preservice elementary mathematics teachers' understandings about irrational numbers. *PRIMUS, 21*(5), 401-416.

Haser, Ç., & Ubuz, B. (2002). Kesirlerde kavramsal ve işlemsel performans. *Eğitim ve Bilim, 27*(126).

İpek, A. S., Işık, C., & Albayrak, M. (2005). Sınıf öğretmeni adaylarının kesir işlemleri konusundaki kavramsal performansları. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 1*, 537-547.

Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal, 14*(2), 133-149.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and ınstructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp.101-144). Columbus, Oh: Ohio State University, EEIC, SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient field to recursive understanding. In T.P. Carperten, E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.49-84). Hillsdade, NJ: Erlbaum

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.41-52). Reston,VA: NCTM.

MacHale, D. (1980). The predictability of counterexamples. *American Mathematical Monthly, 87*(9),752

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concept when building on informal knowledge. *Journal for Research Mathematics Education, 26*(5), 422-441.

Mason. J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277–289.

MEB, (2013a*). Ortaokul matematik dersi (5,6,7 ve 8.Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı, Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

MEB (2013b). *Ortaöğretim matematik dersi (9,10,11 ve 12.Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı, Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

MEB (2015). *İlkokul matematik dersi (1,2,3 ve 4.Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı, Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation: Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education.* San Franscisco: Jossey-Bass.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.* (2nd Edition). California: SAGE Publications.

Moseley, B. (2005). Students’ early mathematical representaion knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* 60, 37–69.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How students learn: History, math, and science in the classroom,* 309-349.

NCTM, (2000). *National council of teachers of mathematics. Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA.: NCTM

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

O'Connor, M. C. (2001). Can any fraction turned into a decimal? A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics, 46,* 143-185.

Orfanos, S., & Kalavassis, F. (2002). THALIS-A representation system for utilization in teaching and learning fractions. *In ICTM2 conference Crete.*

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulty in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39–46.

Pesen, C. (2008). Kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde öğrencilerin öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(15).

Reys, R. E., & Nohda, N. (Eds.) (1994). *Computational alternatives for the twenty-first century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Seyhan, G. & Gür, H., (2004). *İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık sayılar konusundaki hataları ve kavram yanılgıları.* Matematikçiler Derneği. www.matder.org.tr

Shinno, Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers. *In Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185-192).

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 49-76.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research* (Vol. 15). Newbury Park, CA: Sage.

Şandır, H., Ubuz, B., & Argün, Z. (2007). 9. sınıf öğrencilerinin aritmatik işlemler, sıralama, denklem ve eşitsizlik çözümlerindeki hataları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 32*(32).

Şiap, İ., & Duru, A. (2004). Kesirlerde geometriksel modelleri kullanabilme becerisi. *Gazi Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi, 12*(1), 89-96.

Temel, H., & Eroğlu, A. O. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırmaları üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 22*(3), 1263.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., & Wilson, J. W. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.*

http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html adresinden 16.07.2014 tarihinde alınmıştır.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore pre-service teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, 98-108.

Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi, 19(*2), 81-101.

Toluk Uçar, Z. (2016). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayıları kavrayışlarında temsillerin rolü. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 24*(3), 1149-1164.

Toluk, Z, & Olkun, S. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453–467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction, 28*(2), 181-209.

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. D. (2012). Analyzing students difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education, 1*(3), 301-336.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 9*(1), 5-28.

Yang, D. C., Li, M. N., & Lin, C. I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(4), 789-807.

Yanik, H. B., Helding, B., & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online, 7*(3), 693-705.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8.Baskı) Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yin, R. K. (2009). *Doing case study research,* (4th ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2–3), 207–217.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation, in *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Norway, 4, 497–505.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education,* 16, 1-27.

## EXTENDED ABSTRACT

Numbers are defined as concepts obtained from symbols and counting. In fact, there is not only one definition of number. In the course of time, the scope of number concept has broadened in consequence of emergence of natural numbers, integers, rational numbers, irrational numbers, real numbers and complex numbers. Following the construction of natural numbers, it was realized that not every measurement could be performed with natural numbers, which brought about the discovery of rational numbers. As for irrational numbers, they were found out after a long time following the discovery of rational numbers. Even though centuries passed after their discovery, numbers have continued to be the basis of mathematics and mathematics education. As the mathematics curricula that have still been implemented or were implemented before in the world and our country are investigated, it is clearly seen that a considerable part of the mathematics curricula is related to the field of learning numbers. In addition, when the “Principles and Standards for School Mathematics” which were published by National Council of Teachers of Mathematics are examined, it can be seen that the standard of number and operations is one of the five content standards. This standard reflects the basic understanding in relation to numbers, counting, number system and arithmetic. The development of number concept underlies this standard. Therefore, it is expected that students and especially the prospective mathematics teachers are necessary to have an advanced level of number perception in order for mathematics curricula to achieve the target goals.

In the study, case study which is one of the qualitative methods was used so as to determine the participant’s rational and irrational number knowledge. 20 first grade students and 20 fifth grade students in 2014-2015 school year, who were also prospective mathematics teachers, constituted the participants of the study. The aim of selecting some of the participants among the ones who just started undergraduate education and selecting some of them among the ones who were about to finish undergraduate education was to determine whether there is a difference based upon grade level. As regards to determining the participants, the ones who had the ability of expressing themselves well and were successful were selected as the participants of the study. The data of the study was collected through semi-structured interviews and students' written answers to the questionnaire developed by the researchers. The data collected was analyzed by means of descriptive analysis.

The results of the study showed that the participants had difficulties in stating the definitions of the concepts and also they reflected that they did not think critically while learning those concepts, which reveals the deficiency about this issue. Additionally, teaching rational and irrational numbers only by means of examples could have a negative effect on developing perception of numbers. That is because, the students who came across contradictory examples wavered in deciding whether a number is rational or irrational since they lacked in conceptual knowledge. Apart from this, it was determined that the students who explained rational and irrational number concepts only through examples instead of definition of concepts did not regard these numbers as significant. In this regard, although the idea of introducing the concepts only by means of examples is not supported, it is thought that using various examples in order to teach the concepts can have a positive impact on knowledge of rational and irrational numbers. The results of the study also showed that the individuals whose knowledge of rational and irrational numbers were not developed enough had difficulties in deciding whether a number is rational or irrational and in internalizing a concept. Concerning this issue, the participants convicted their teachers as they engaged in rational numbers and especially irrational numbers too little throughout their education life. This finding requires questioning effectiveness of the courses related to teaching the rational and irrational concepts. Moreover, it was indicated that there were some deficiencies in raising awareness with respect to representation of rational and irrational numbers as well as knowing the equivalent of different representations. In parallel with this finding, O'Connor (2001) indicates that students describe the different representations of the same number as different numbers. Regarding that representations play an important role in how numbers are perceived (Zazkis & Sirotic, 2004), it is necessary to have the students reach to this awareness level. All in all, it was found out that the participants in the fifth grade had a more improved level of concept knowledge compared to those in the first grade but that they had similar errors for some questions.

Başvuru: 28.12.2016 Yayına Kabul: 07.06.2017