İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ANALİZ ALANINDA YAPTIKLARI İSPATLARIN ÖZELLİKLERİ[1]

THE CHARACTERISTICS OF PROOFS PRODUCED BY PRESERVICE PRIMARY MATHEMATICS TEACHERS IN CALCULUS

Muhammet DORUK[2] Abdullah KAPLAN[3]

Başvuru Tarihi: 11.04.2017 Yayına Kabul Tarihi: 12.11.2017 DOI: 10.21764/maeuefd.305605

Özet: Çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Bu amaca ulaşmak için öğretmen adaylarının analizin temel konularındaki teoremlere yönelik ürettikleri ispatlar incelenmiştir. Nitel araştırma yaklaşımın benimsendiği bu çalışma bir durum çalışmasıdır. Çalışmanın araştırma grubunu Türkiye'de bulunan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Her öğretmen adayı ile dört kez görüşülmüştür. Mülakat formlarında sırasıyla fonksiyonlar, diziler, limit-süreklilik ve türev konularında doğru önermeler ve ispatlarda öğretmen adaylarına gerekli olan formel tanımlar yer almıştır. Öğretmen adaylarından önermelerin doğru olup olmadığı hakkında bir karara varmaları ve verdikleri kararları doğrulamaları istenmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının önermelerin doğruluklarını belirlemede güçlük yaşamamalarına rağmen doğru ispat yapma konusunda zorluk çektikleri görülmüştür. Öğretmen adayları tarafından yapılan ispatların doğru ispat, kısmen doğru ispat, geçersiz ispat, açıklama, örnekle doğrulama, tanımları manipüle etme, tanımları kopyalama, tamamlanmamış ispat ve hipotez yazma olmak üzere dokuz faklı özellik taşıdığı ortaya çıkmıştır. Ayrıca akademik başarı düzeyi yüksek olan öğretmen adayları çoğunlukla dedüktif ispat şemasına sahip iken ortalama başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının ise dedüktif, tümevarımsal ve dışsal ispat şemalarında oldukları tespit edilmiştir.

Anahtar sözcükler: *Matematiksel ispat, analiz, matematik öğretmeni adayı, matematik eğitimi.*

Abstract: The aim of the study is to reveal the characteristics of proofs produced in calculus area by preservice primary mathematics teachers. In order to achieve this aim, proofs produced for the theorems on the basic issues of the calculus of preservice teachers were examined. This study, adopted qualitative research approach, is a case study. The research group of the study consisted of eight junior preservice teachers studying in the program of primary mathematics education at a state university in Turkey. The data of the study was collected with the help of task-based clinical interviews. Each preservice teachers were interviewed four times. The interview forms include true mathematical prepositions and formal definitions which are required for preservice teachers in proving process in functions, sequences, limit-continuity, and derivative concepts, respectively. Preservice teachers were asked to make a decision about whether the propositions were true or not and to verify decisions they made. It was seen that preservice teachers had difficulty in the producing correct proof although they hadn't had any difficulty in choosing true prepositions. It was emerged that the proofs produced by preservice mathematics teachers had nine distinctive features: correct proof, partially correct proof, invalid proof, explanations, validation with the example, manipulation of definitions, copying definitions, incomplete proof and hypothesis writing. Moreover, while the preservice teachers with high academic success level had mostly the deductive proof scheme, preservice teachers with the average success level were in deductive, inductive and external proof schemes.

Keywords: *Mathematical proof, calculus, preservice mathematics teachers, mathematics education.*

[1] Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazarın danışmanlığında hazırladığı doktora tezinden üretilmiştir.

[2] Yrd. Doç. Dr., Hakkari Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi, mdoruk20@gmail.com ORCID ID orcid.org/0000-0003-3085-1706

[3] Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, K.K.E.F., İlköğretim Matematik Eğitimi, akaplan@atauni.edu.tr ORCID ID orcid.org/0000-0001-6743-6368

Giriş

İspatın kelime anlamı Oxford (2010) sözlüğünde bir şeyin doğru olduğunu gösteren bilgi ve dokümanlar olarak yer alırken Cambridge (2013) sözlüğünde bir iddianın doğru ya da gerçek olup olmadığını test etme süreci, bir şeyin varlığını ve doğruluğunu gösteren bir gerçek ya da bir kısım bilgi olarak tanımlanmıştır. *Türkçe Süzlük*'te ise ispat, tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma olarak ifade edilmiştir (Türk Dil Kurumu [TDK], 2015). Matematikçiler ve matematik eğitimcileri ispatlara farklı anlamlar yükleyerek ve ispatın farklı özelliklerine vurgu yaparak tanımlamaya çalışmışlardır.

Matematiksel ispat üzerine yapılan araştırmalara bakıldığında araştırmacıların üzerinde uzlaştıkları bir tanımın bulunmadığını söylemek mümkündür. Yapılan tanımlamalarda araştırmacılar kendi bakış açılarına göre ispatın bazı özelliklerini ön plana çıkarmışlardır. Bazı araştırmacıların yaptıkları ispat tanımlarında ispatın sözlük anlamından farklı olarak, matematiksel ispatın matematiksel bir ifadenin ya da önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek olduğu açıkça vurgulanmıştır (Baki, 2014; Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Yıldırım, 2014). Yapılan bazı tanımlarda, ispatın matematiksel bilgilerin doğruluğuna önce kendisinin daha sonra başkalarının ikna olma süreçlerini içerdiği ifade edilmiştir. Matematiksel ispatlar sayesinde, matematiksel iddiaların doğruluğu üzerindeki şüphelerin tamamen ortadan kalktığı belirtilmiştir (Bell, 1976; De Villiers, 1999; Harel ve Sowder, 2007; Stylianou, Chea ve Blanton, 2006). Bazı ispat tanımlarında, ispatların genel anlamda önceden kabul edilen bilgilerin kullanıldığı, mantıksal birtakım çıkarımlar ile ilerlediği, dedüktif yapıdaki muhakemenin bir çeşidi olduğu dikkati çekmektedir (Almeida, 2003; Dede ve Karakuş, 2014; Griffiths, 2000; Hanna, Bruyn, Sidoli ve Lomas, 2004; Weber, 2005). Bazı araştırmacılar ispatın sosyal bir eylem olduğunu ve matematiksel topluluklar tarafından ispat olarak kabul edildikten sonra ispat değeri kazandığını ifade etmişlerdir (Dede, 2013; Edwards, 1997; Stylianides ve Stylianides, 2009). İspatların özel bir argümantasyon aktivitesi (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009) ve ispatlama sürecinin problem çözmenin özel bir durumu (Furinghetti ve Morselli, 2009) olduğuna vurgu yapan araştırmacılar da olmuştur.

Almeida'ya (2003) göre matematiksel ispat; bir sonucu doğrulamak, iletişim kurmak ve diğerlerini bu sonuca ikna etmek, bir sonuç keşfetmek ve elde edilen bu sonuçları dedüktif bir sistem içine yerleştirmek için yapılmaktadır. Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran (2016) matematiksel ispatı bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunu göstermeyi amaç edinen, formel elemanları kullanarak aksiyomatik bir yapıda ilerleyen, mantıksal muhakemenin ön planda olduğu, kendine has bir gösterim şekli olan sosyal bir süreç olarak tanımlamışlardır.

Stylianides (2007) ispatın bir matematiksel argüman, matematiksel iddianın doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek için üretilen savların birebiriyle ilişkili olan dizisi olduğunu ifade etmiş ve aşağıdaki karakteristiğe sahip olduğunu belirtmiştir.

- Sınıfça kabul edilen ifadeler kullanılır (Kabul edilen ifadeler kümesi). Bu ifadeler doğrudur ve daha fazla doğrulamaya gerek kalmadan kullanılır.
- İspatlar muhakeme formlarını kullanır (Argümantasyonun bir çeşidi). Bu muhakemeler geçerlidir, öğrenciler tarafından bilinir ya da kavramların içinden ulaşılır.
- Özel bir ifade şekli ile aktarılır (Argüman sunumunun bir şekli). Bu ifade matematik topluluğu tarafından uygundur ya da bilinir.

Bu ortak özelliklerden hareket ederek çalışmada doğru yapılmış bir ispat, bir önermenin doğruluğunu (ya da yanlışlığını) göstermek için yapılan, herkes tarafından bilinen matematiksel elemanların kullanıldığı (tanım, teorem ve aksiyom), hipotezlerden yola çıkılarak aksiyomatik bir yapıda ilerleyen, matematiksel ve mantıksal olarak genel, doğru ve ikna edici argümanlar olarak değerlendirilmiştir.

Matematik eğitimcileri matematiksel ispatın öğrenciler üzerinde birçok olumlu etkisi olduğunu ifade etmişlerdir. Matematiksel ispatları matematiksel kavramların anlaşılmasında, matematiksel bilgilerin gelişip olgunlaşmasında önemli bir araç ve ana eleman olarak görmüşlerdir (Knuth, 1999; Ross, 1998; Schoenfeld, 1994, 2009; Stylianides, 2007; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar, matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yoludur (Hersh, 1993; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümü için stratejiler, yöntemler, araçlar ve kavramlar gibi önemli matematiksel bileşenler sunar (Mariotti ve Balacheff, 2008; Rav, 1999). Problem çözümünde ispatların sağladığı bu yeni matematiksel anlayış, kavramsal ilişkiler ve yöntemler, ispatlara matematiksel önermelerin doğruluğunu göstermekten daha çok değer kazandırır (Hanna ve Barbeau, 2008). Ayrıca, matematiksel ispatlar matematikçilerin yaptıklarının öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (İmamoğlu, 2010; Tucker, 1999). Dede ve Karakuş (2014) ispat yapma sürecinde öğrencilerin denemeler yaparak keşfetme sürecine girdiklerini, matematiğin estetik yönünü fark ettiklerini ve analitik düşünme becerilerini geliştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Güven ve diğerleri (2005) de ispatlama etkinlikleri yoluyla, öğrencilerin bir yandan matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı yakalarken bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirebileceklerini dile getirmişlerdir.

Türkiye'de 2013 yılında düzenlenen Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda doğrudan ispatlama sürecine yönelik bir beceri bulunmamaktadır. Programda ispatlama süreci ile ilgili becerilere, doğrudan olmasa da matematiksel süreç becerileri başlığı altındaki akıl yürütme becerisi içerisinde yer verilmiştir. Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle, matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, *vb.*) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, *vb.*) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak tanımlanmıştır (MEB, 2013). Öğretim programında öğrencilere akıl yürütme becerisi kazandırılması için dikkate alınması gereken göstergeler arasında "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunma", "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma" ve "bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma" gibi beceriler yer almaktadır (MEB, 2013). Bu beceriler ispatın "doğrulama" ve "açıklama" fonksiyonları ile ilişkili olup ispatlama sürecinin matematiksel bir ifadenin doğru olduğuna önce kendini daha sonra başkalarını ikna etme gibi iki alt süreci olduğu görüşüyle (Harel ve Sowder, 2007) uyumlu olduğu düşünülebilir. Bu nedenle, Aylar'ın (2014) da belirttiği gibi, ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı da olsa bir ilişki kurmak mümkündür.

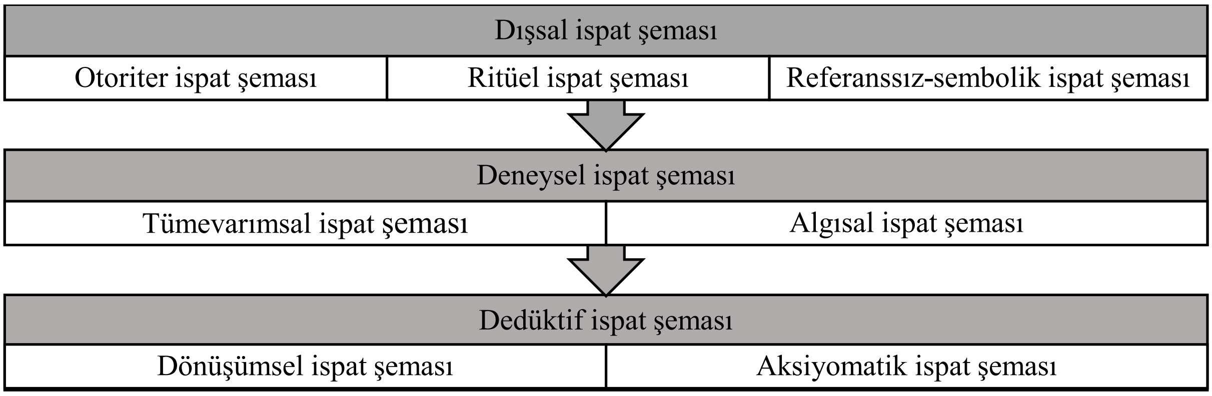
Araştırmacılar tarafından ispatın matematik ve matematik eğitimi için önemi vurgulanmasına rağmen üniversite öğrencileri ve matematik öğretmenlerinin ispat yapmada başarısız oldukları tespit edilmiştir (Cusi ve Malara, 2007; Doruk ve Kaplan, 2015; Ko ve Knuth, 2009; Weber, 2001). Öğrencilerin bu başarısızlıklarını tespit eden araştırmacılar, öğrencilerin ispatlama sürecine yoğunlaşmışlardır. Öğrencilerin ispatlama sürecine etki eden faktörleri bulmaya çalışmışlardır. Bu bağlamda Weber (2001) öğrencilerin ispat yaparken yaptıkları hataları anlayabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir. Bu amaçla üniversite öğrencilerinin ispatlama süreçlerine yönelik yapılan çalışmalara bakıldığında, öğrencilerin ispatlarının sınıflandırılmasına (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Raman, 2003; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Weber, 2005) ve ispat yaparken yaşadıkları güçlüklere (Doruk ve Kaplan, 2015; Moore, 1994; Riley, 2003) odaklanıldığı görülmüştür.

Öğrencilerin ispatlarının sınıflandırılmasına yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde Harel ve Sowder'ın (1998) yapmış olduğu çalışmayı ayrı bir yere koymak gerekmektedir. Araştırmacılar tarafından ortaya atılan ispatlama şeması ilgili alanda bir başyapıt halini almış ve sonraki çalışmalarda sıklıkla kullanılmıştır. Harel ve Sowder (1998) yaptıkları çalışmada ispatın, kişinin kendini ve başkalarını ikna etme süreçlerini içerdiğini belirtmiş ve ispat şeması kavramını ortaya atmışlardır. Bir kişinin ispat şeması, kendini ve başkalarını nasıl ikna ettiği ile ilgilidir. Öğrencilerin yaptıkları ispatlar dışsal, deneysel ve dedüktif (tümdengelimsel) olmak üzere üç ana şemaya ayrılmıştır (Harel ve Sowder, 2007).

Dışsal ispat şeması otoriter, ritüel ve referanssız-sembolik ispat şemalarından oluşmaktadır. Otoriter ispatta kişi, bir kitap ya da öğretmen gibi bir otoriteye dayalı olarak ikna olur. Ritüel ispatta argümanın içeriğinden çok görüntüsüne dayalı olarak ikna olunur. Referanssız-sembolik ispat şemasına sahip kişi ise, referansı olmayan sembolik manipülasyonlara bağlı olarak ikna olur.

Deneysel ispat şeması, tümevarımsal (indüktif) ve algısal ispat şemalarından oluşur. Tümevarımsal ispat şemasına sahip öğrenciler, bir iddianın doğru olduğuna kendini ve diğerlerini ikna etmek için bir ya da birkaç özel durumda iddianın doğruluğunu niceliksel olarak değerlendirirler. Tümevarımsal ispat şemasındaki bir öğrenci iddianın doğru olduğunu bir ya da birkaç örneğin sonuçlarını değerlendirerek karar verir ya da cebirsel bir ifadenin doğruluğunu birkaç özel sayıyı ifadede yerine yazarak elde edilen sonuçlara göre ikna olur. Algısal ispat şemasına sahip öğrenci, ikna olmak için gelişmemiş zihinsel imajlarını kullanır. Gelişmemiş zihinsel imajın en önemli özelliği, nesneler üzerindeki dönüşümlerin ihmal edilmesi ya da dönüşümlerin sonuçlarının tam olarak ve doğru bir şekilde tahmin etmede başarısız olunmasıdır.

Dedüktif ispat şeması kısaca bir varsayımın mantıksal çıkarımlar vasıtasıyla geçerliğinin gösterilmesidir (Harel ve Sowder, 1998). Dedüktif ispat şeması dönüşümsel ve aksiyomatik ispat şemalarından oluşmaktadır. Dönüşümsel ispat şemasına sahip kişiler argümanın tüm durumlar için geçerli olması gerektiğine, işlemsel düşüncenin mevcut olmasına ve mantıksal çıkarımlara dayalı olmasına dikkat ederler. Aksiyomatik ispat şeması, dönüşümsel ispat şemasının özelliklerine sahiptir. Bu şemanın özelliklerine sahip kişiler, matematiksel doğrulamanın temelde tanımsız terimler ve aksiyomlardan başladığını fark ederler (Harel ve Sowder, 1998, 2007; Sarı vd., 2007). Şekil 1'de Harel ve Sowder'ın (2007) ispatlama şeması özetlenmiştir.



Şekil 1. Harel ve Sowder'ın (2007) ispatlama şeması

Harel ve Sowder'ın (1998) dışında Weber (2005) ve Raman (2003) tarafından yapılan sınıflandırmalar da araştırmacılar tarafından kullanılmıştır. Weber (2005) öğrencilerin ispatlarının prosedürel, sentaktik ve semantik ispatlar olduğunu belirtmiştir. Raman (2003) ispatın hem özel hem de genel argümanlar içerdiğini ifade etmiştir. Üniversite öğrencileri ve öğretmenlerin ispatlarını yaparlarken heuristik, prosedürel ve anahtar olmak üzere üç düşünme tipine sahip olduklarını belirtmiştir. Sarı, Altun ve Aşkar (2007) çalışmalarında lisans matematik öğrencilerinin ispata yönelik görüşleri ve ispatlama süreçlerini incelemişlerdir. Öğrencilerin türev kavramına yönelik bir teoremi ispatlarken sahip oldukları ispat şemaları Weber (2005) ve Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları kullanılarak tespit edilmiştir. Çalışma sonucunda, başarılı olan öğrencinin tanımları açma ve sembolleri ilerletmeye dayalı olan sentaktik şema ile tanım ve teoremleri kullanarak ispat yapma olan dönüşümsel şemaya sahip olduğu tespit edilmiştir. Orta seviyede başarılı olan öğrencinin zihnindeki daha önceden oluşmuş yöntemi takip etme yaklaşımı olan prosedürel yaklaşıma, özel örnekleri kullanarak ispat yapma olan tümevarımsal şemaya ve tanım ve teoremlerden hareketle ispat yapma olan dönüşümsel şemaya sahip olduğu belirlenmiştir. Düşük başarıya sahip olan öğrenci ise prosedürel yaklaşıma, öğretmenin gösterdiği ya da kitapta bulunan ispatları hatırlamaya çalışarak ispat yapma olan otoriter şemaya ve yetersiz zihinsel gösterimler kullanılarak ispat yapma olan algısal şemaya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Ko ve Knuth (2009) sürekli fonksiyonlar konusunda yaptıkları çalışmada öğrencilerin doğru önerme için ürettikleri ürünlerin yanıt yok, yeniden ifade etme, ters örnek, deneysel, referanssız sembolik ve yapısal kategorileri altında toplandığını tespit etmişlerdir.

Üniversite düzeyinde matematik müfredatının en önemli derslerin biri analiz dersidir (Hartter, 1995). Buna rağmen, yapılan literatür incelemesinde analiz alanına özel yapılmış ispat çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmüştür. Analiz alanında yapılan çalışmalarda da çoğunlukla özel bir konu ile sınırlandırılmış bir ya da birkaç teorem kullanıldığı dikkati çekmiştir. Ayrıca öğrencilerin mevcut ispat şemalarını da içine alabilecek detaylı bir sınıflamanın ilgili alana önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Analiz alanına özel olarak yapılacak bu tarz çalışmaların sonucunda ilgili dersin öğretiminden sorumlu olan eğitimciler, öğrencilerin ispat algıları ve ispatlama süreçlerinde yaşadıkları güçlükler konusunda bilgi sahibi olacaklardır. Öğrencilerin sahip oldukları güçlükleri ve düşünce yapıları dikkate alınarak yapılacak öğretimin mevcut öğretimden daha yararlı olacağı açıktır. Öte yandan ortaokul öğrencilerinin "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunma" ve "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma" gibi becerileri (MEB, 2013) kazanabilmeleri için öncelikle öğretmenlerinin matematiksel bir önermenin doğruluğunun nasıl gösterileceği konusunda bilgili olmaları gerekmektedir. Bu bakımdan matematik öğretmeni adaylarının öğretmen yetiştiren kurumlarda söz konusu becerilere sahip olup olmadığı sorgulanmalıdır. Elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarına gerekli eğitim verilmelidir. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki ispatlama süreçleri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının bu süreçte yaptıkları ispatların ne tür özellikler taşıdıkları ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Yöntem

Araştırmanın modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çalışma nitel araştırma desenlerinden bir durum çalışmasıdır. Çünkü nitel araştırmalarda araştırılan olay ya da durum kendi doğal kapsamında yer ve zamanla sınırlı olarak araştırılır (Kaleli Yılmaz, 2015). Bu çalışma, durum çalışması desenlerinden bütüncül çoklu durum deseninin bir örneğidir. Çünkü bu desende, birden fazla kendi başına bütüncül olarak algılanabilecek durum söz konusudur. Her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınır ve daha sonra birbiriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu çalışmada da öğretmen adaylarının analiz alanındaki ispatlama süreçleri bütüncül olarak ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Araştırma grubu

Bu çalışmanın araştırma grubunu 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Türkiye'nin Doğu Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören toplam 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Araştırma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınmıştır. Ölçüt örneklemenin mantığı, daha önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirmedir (Patton, 2014). Çalışmada öğretmen adaylarının analiz alanında doğru olduklarını düşündükleri önermelere yönelik ne tür ispatlar yaptıkları araştırılmak istenmiştir. Bu bakımdan araştırma grubu seçiminde, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu, nasıl yapıldığı, bir argümanın nasıl savunulması gerektiği ya da matematikte "çürüten" yani ters örneklerin varlığı ve kullanımı hakkında bilgi sahibi oldukları Soyut Matematik dersi ile analiz konularının öğretiminin yapıldığı Genel Matematik, Analiz-I, Analiz-II ve Analiz-III derslerini almış ve başarı ile geçmiş olmaları dikkate alınmıştır. Analizin temel konuları olarak fonksiyonlar, diziler, limit-süreklilik ve türev kavramları dikkate alınmıştır. Araştırma grubunun seçilmesinde daha ayrıntılı bilgi elde edebilmek için öğrencilerin hazırlanan etkinliklerin ilgili olduğu derslerdeki başarıları (Analiz-I, Analiz-III, Soyut Matematik) ve ağırlıklı genel not ortalamaları (AGNO) incelenmiştir.

Yapılan değerlendirmeler sonucunda öğrenciler ilgili derslerdeki başarıları ve AGNO'larına göre iki gruba ayrılmıştır. İlk grup ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerdir. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin arasından gönüllülük esasına ve kolay ulaşılabilme olanağı olan dört öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerin AGNO'ları 2.5/4 ile 3.0/4 arasındadır. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin bir kısmı araştırma etkinliklerinin ilgili olduğu dersleri (Soyut Matematik, Analiz-I, Analiz-III) ilk seferinde, bir kısmı da bu dersleri tekrara düşerek ortalama bir başarı ile geçmişlerdir. Çalışmanın yürütüldüğü diğer grup başarı düzeyi yüksek öğrencilerden oluşmuştur. Bu gruptaki öğrencilerin AGNO'ları 3.0/4 ile 4.0/4 arasında ve ilgili dersleri ilk seferinde yüksek bir başarı ile geçmişlerdir. Bu grup arasından da gönüllü olmaları ve kolay ulaşılabilmeleri göz önünde tutularak dört öğrenci araştırma grubuna dâhil edilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler öğrenim gördükleri bölümlerin en başarılı öğrencileridir. Örneğin, bu gruptaki öğrenciler arasında ilgili derslerin hepsini alabileceği en yüksek harf notu (AA) ile geçen ve öğrenim gördüğü dört yıllık bölümü üç senede başarılı bir şekilde bitiren öğrenciler bulunmaktadır.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır. İlk grup olan ortalama düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Barış, Belma, Bilge ve Buse'dir. Başarı düzeyi yüksek öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir

Çalışmada başarı düzeyi farklı iki grubun incelenmesinin sebebi farklı görüşlerin elde edilmesini sağlamaktır. Bu sayede öğretmen adaylarından araştırılan konuya yönelik çeşitli ve derinlemesine bilgi alınabileceği düşünülmüştür. Amaçlı örneklem seçiminde de mantık, araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi açısından zengin durumları seçmektir. Bilgi açısından zengin durumlar, araştırmacının araştırmanın amacı açısından mümkün olduğunca fazla bilgi elde edebileceği durumlardır. Bilgi açısından zengin durumları çalışma, ampirik genellemelerden ziyade derinlemesine anlama imkânı sağlar (Patton, 2014).

Veri toplama aracı

Öğretmen adaylarının analiz alanındaki ispatlama süreçlerini ortaya çıkarılmasında dört adet yarı yapılandırılmış etkinlik temelli klinik mülakatlardan yararlanılmıştır. Mülakatlar sırasıyla analizin temel konularından olan fonksiyonlar, diziler, limit-süreklilik ve türev konularındaki ispatlama süreçlerini ortaya çıkarmak için yapılmıştır. Mülakat formlarında doğru önermeler ve ispatlama sürecinde onlara gerekli olabilecek formel (biçimsel) tanımlar yer almıştır. Bireysel yapılan mülakatlarda öğretmen adaylarından önermenin doğru olup olmadığı konusunda karar vermeleri ve verdikleri kararların doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. Mülakat formalarında yer alan formel tanımları istedikleri zaman kullanabilecekleri ifade edilmiştir.

Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde geçerlik çalışmaları kapsamında altı uzman akademisyenin görüşüne başvurulmuş ve pilot uygulama yapılmıştır. Bu uzmanlar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik ve ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanında doçent ve yardımcı doçent olarak görev yapmaktadırlar. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda formda bulunan yazım hataları ve matematiksel hatalar düzeltilmiştir. Tablo 1'de çalışmada kullanılan teoremler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 1
Çalışmada Kullanılan Teoremler

Mülakat konuları	Teoremler
Fonksiyonlar	*Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise, o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur*
Diziler	*Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.*
Limit-süreklilik	$A \subset R$, $f: A \to R$ *ve* $g: A \to R$ *şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir.*
Türev	*Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır.*

Verilerin analizi

Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların özelliklerini ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarına her mülakatta bir adet doğru önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarından önermelerin doğruluk değerlerini belirtmeleri ve verdikleri kararları savunmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru önermeler için ürettikleri ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adayları ürünlerini yazılı olarak vermişlerdir. Gerekli görüldüğü durumlarda öğretmen adaylarına soru sorularak ispatlarını nasıl yaptıkları hakkında bilgiler alınmıştır.

Öğretmen adaylarının ürettikleri ispatlar özelliklerine göre içerik analizi uygulanarak gruplara ayrılmıştır. Nitel verilerin analizinde genellikle içerik analizi yapılmakta ve toplanan verilerin düzenlenmesi, özetlenmesi ve yorumlanması analizin temel süreçleri arasında yer almaktadır (Büyüköztürk vd., 2012). Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Veriler yazıya dökülürken anlaşılamayan ifadeler için öğretmen adaylarıyla görüşülerek ilgili ifadeler aydınlatılmıştır. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından araştırmacı tarafından ham verilerden kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Kod ve kategoriler belirlenirken öğretmen adaylarının yazılı ve sözlü beyanları ortak olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispatlama sürecinde sahip oldukları ispatlama şemaları Harel ve Sowder'ın (2007) terminolojisi kullanılarak değerlendirilmiş ve yorumlar yapılmıştır. Öğretmen adaylarının yazılı ifadeleri ile araştırmacı ile aralarında geçen diyaloglar sıklıkla üzerinde değişiklik yapılmadan, betimsel olarak sunulmaya çalışılmıştır. Bu sayede araştırma verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir. Çalışmada elde edilen kategoriler iki uzman akademisyenin kontrolünden geçmiştir. Uzmanlar çalışmadan elde edilen kategorilerin öğretmen adaylarının ispatlarının özelliklerini yansıttığını belirtmişlerdir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının ispatlarının özelliklerine göre dokuz kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 2'de, okuyuculara kolaylık olması açısından, bu çalışmada tespit edilen öğretmen adaylarının ürettikleri ispatların özellikleri hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 2.
Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

İspatlar	*Göstergeler*
Doğru ispat	*Doğru ispatlarda tanımlar ifade edilip açılarak teoremin hipotezinden hükmüne ulaşılır. İspatta bir bütünlük vardır. Matematiksel olarak doğru ifadeler kullanılır. İspatlar matematiksel ve mantıksal olarak genel, doğru ve ikna edicidir.*
Kısmen doğru ispat	*Kısmen doğru ispatlar, doğru ispatlar gibi bir bütünlük içerisinde matematiksel olarak ifade edilmiştir. İspatın genelliğini ya da matematiksel olarak doğruluğunu temsil eden ifadeler açıkça belirtilmemiştir. İspatta bulunan bu kilit ifadeler bulunmadığı için ispatın geçerli olup olmadığı hakkında bir sonuca varılamamaktadır. Bu tür ispatlarda eksikliklerin olduğu söylenebilir.*
Geçersiz ispat	*Geçersiz ispatlar doğru ispatlar gibi bütünlük içerisinde matematiksel olarak yazılan ispatlardır. Bu ispatların içerisinde bulunan bazı yanlış ifadeler ispatın genelliğini bozmaktadır. Uygun bir ters örnek yardımıyla bu ifadelerin doğruluğu çürütülebilir. Yazım yanlışlığının dışındaki, bilinçli olarak yapılan, önemli matematiksel notasyonel hataları bulunan ispatlar bu gruba girer.*
Açıklama	*Bu ispatlar da bir bütünlük içerisinde tamamlanmış ispatlardır. Kullanılan dil geneldir. Matematiksel kavramların altında yatan sezgisel düşünceler kullanılarak açıklama yapılır. İspatın neden doğru olması gerektiği ifade edilir. Kullanılan ifadeler matematiksel ya da dedüktif tarzda değil günlük konuşma dilindedir.*
Örnekle doğrulama	*Bu ispatlarda önermenin doğru olduğu, bir örnek üzerinden gösterilir. Önermeyi doğrulayan bir ya da birkaç durum göz önünde bulundurularak doğrulama yapılmaya çalışılır. Kullanılan argümanlar, tümevarımsal argümanlardır. Bu şekilde yapılan ispatlar bütünlük içinde, matematiksel olarak doğru ifadeler kullanılsa bile genel argüman olmaktan uzaktır.*
Tanımları manipüle etme	*Bu ispatlar da bir bütünlük içerinde tamamlanmış ispatlardır. İspatlar incelendiğinde öğretmen adayları kendilerine verilen formel tanımların anlamlarını bilmeden kullanıldığı görülmektedir. Tanımlarda bulunan sembolik ifadeleri çoğu zaman matematiksel temeli olmayan bir şekilde değiştirerek arzu edilen sonuca ulaşılmaya çalışılır.*
Tanımları kopyalama	*Bu ispatlarda öğretmen adayları, kendilerine verilen formel tanımları ispatlarına kopyalayarak ispat yapmaya çalışırlar. Tanımları manipüle eden öğretmen adaylarından farklı olarak tanımları açarak ilerletmeye çalışmazlar. İfadeler arasında derin mantıksal boşluklar vardır. Bu öğretmen adayları bu şekilde ya ispat yaptıklarını iddia ederler ya da daha fazla ilerleyemeyerek ispatlarını yarım bırakırlar.*
Tamamlanmamış ispat	*Bu ispatlarda tanımlar kullanılarak ilerlemeye çalışılmış fakat ispatta ileriye gidilemeyerek yarım bırakılmıştır.*
Hipotezi yazma	*Bu ispatlarda sadece ispatlanmak istenen teoremin hipotezi tekrar yazılmış ve öylece bırakılmıştır.*

Uygulama süreci

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla dört haftada toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmelere başlamadan önce çalışma hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin gizli tutulacağı ve takma isimlerin kullanılacağı belirtilmiştir. Çalışmanın video kaydı altına alınması planlanmış fakat pilot uygulamadan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğretmen adaylarının bu durumdan tedirgin olacakları ve dikkatlerini çalışmaya veremeyecekleri düşüncesiyle çalışma ses kaydı altına alınmıştır.

Görüşmeler araştırmacı ile öğretmen adaylarının dışsal faktörlerden etkilenmeyeceğine inanılan bir ortamda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Öğretmen adayları da genellikle düşüncelerini sesli olarak ifade etmişlerdir. Görüşmeler sırasında araştırmacı, öğretmen adaylarını yönlendirici davranışlardan kaçınmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının düşüncelerini anlamak için sıklıkla "Yazdığın ifade ne anlama geliyor?", "Burada ne düşündün?", "Bu ifadeden diğerine nasıl geçiş yaptın?", "İspatı nasıl yaptın?" gibi sorular sorulmuştur. Görüşmelere başlamadan önce araştırmacı tarafından sorulacak olan soruların onların ne düşündüklerini anlamak için olduğu, kesinlikle yönlendirici bir nitelik taşımadığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına da araştırmacıdan bir onay beklememeleri ve buna yönelik soru sormamaları istenmiştir.

Bulgular ve Yorum

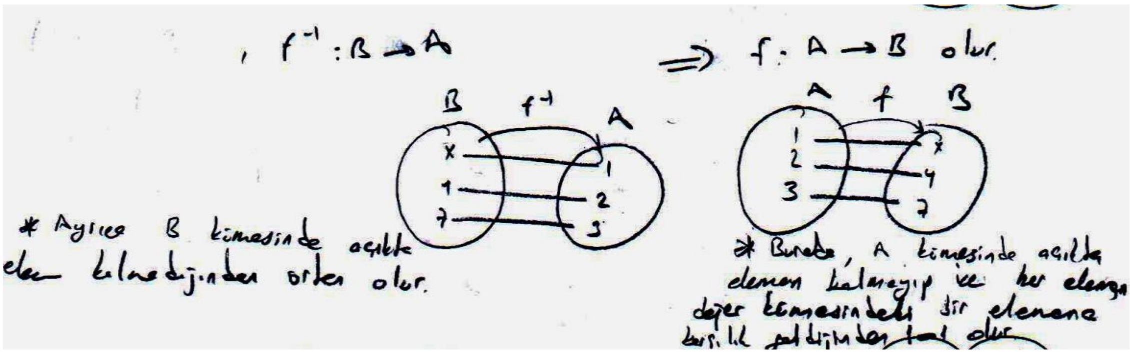
Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda ispat yapma süreçlerini ortaya çıkarmak için *"Bir fonksiyonun tersi de bir fonksiyon ise, o zaman fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyondur."* önermesi için yaptıkları ispatlar incelenmiştir. Önermenin doğru olduğunu ispatlamak için verilen yanıtların beş kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 3'te öğretmen adaylarının ispat yapma durumları sunulmuştur.

Tablo 3
Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓						
Örnekle doğrulama					✓			✓
Tanımları kopyalama							✓	
Tanımları manipüle etme				✓		✓		
Açıklama	✓		✓					

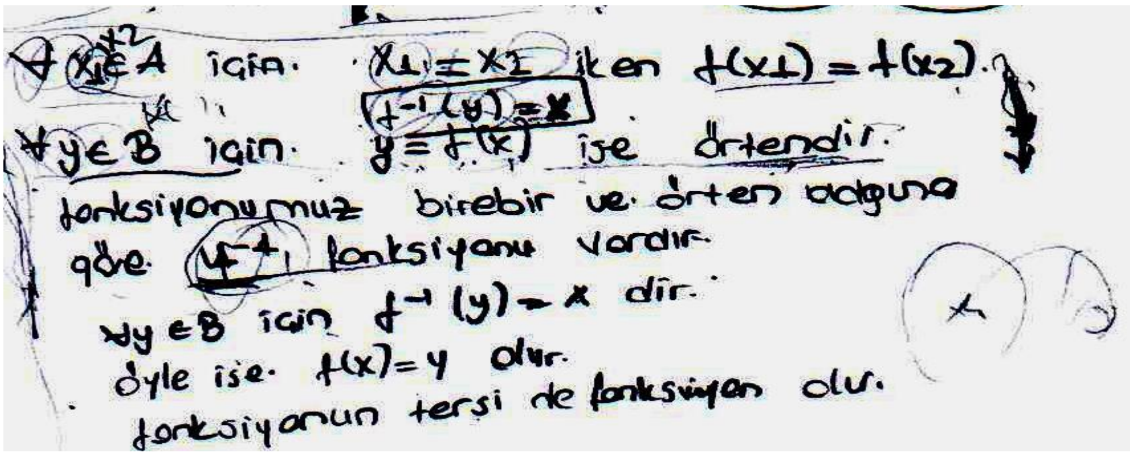
Tablo 3 incelendiğinde sadece bir öğretmen adayının (Adem) geçerli bir ispat yapabildiği belirlenmiştir. İki öğretmen adayı (Barış, Belma) ispatında özel örnekler kullanmıştır. İki öğretmen adayı (Aysun, Bilge) tanımlarda bulunan matematiksel notasyonları manipüle ederek sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Öğretmen adaylarından ikisi (Ahu, Aziz) ispatta bulunan mantığı açıklamaya çalışmıştır. Bir öğretmen adayı (Buse) tanımları kopyalayarak kullanma yolunu seçmiştir.

Barış ve Belma özel örnekler kullanarak geçerli bir ispat yapmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları fonksiyonun birebir ve örten olduğunu örnek ve şekil kullanarak göstermek istemişlerdir. Bu bakımdan Barış ve Belma'nın Harel ve Sowder'ın (2007) tümevarımsal ispat şemasında olduğunu söylemek mümkündür. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatına yer verilmiştir.



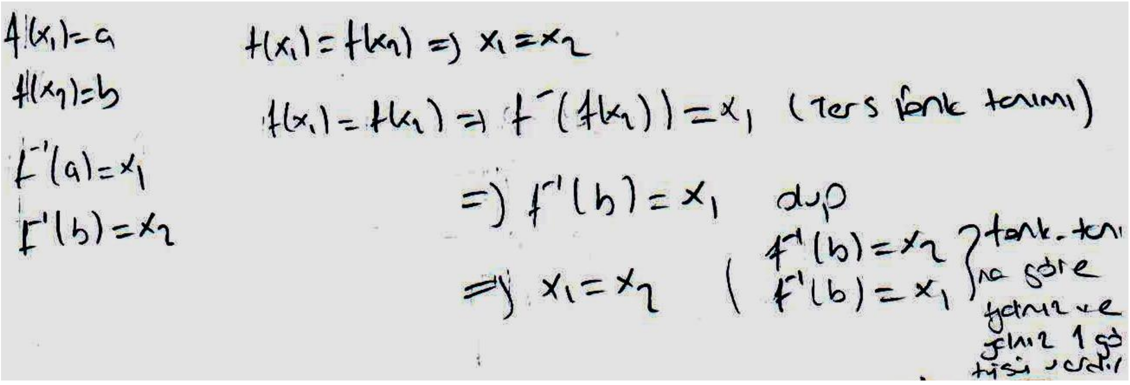
Şekil 2. Barış'ın ispatı

Buse ise ispatında mülakatın başında verilen tanımları kopyalayarak ispatında kullanmış ve bu şekilde ispat yapmaya çalışmıştır. Buse geçerli bir ispat yapamamıştır. Buse'nin ispatı mantıksal olarak yetersiz bir gösterim olarak değerlendirilmiştir. Buse kendilerine verilen tanımları içerisindeki ifadelerin anlamını bilmeden kullanmaya çalışmıştır. Tanımların içerisindeki sembolleri manipüle etmeye çalışarak ispatının matematiksel görünmesine odaklanmıştır. Buna göre Buse'nin Harel ve Sowder'ın (2007) sembolik ispat şemasında olduğu söylenebilir. Ayrıca Buse'nin ispatında birebir fonksiyon kavramına yönelik bir yanılgı olan "$x_1 = x_2$ *ise* $f(x_1) = f(x_2)$" koşullu önermesinin birebir fonksiyona karşılık geldiğini düşünmüş ve kullanmıştır. Aşağıda Buse'nin ispatı sunulmuştur.



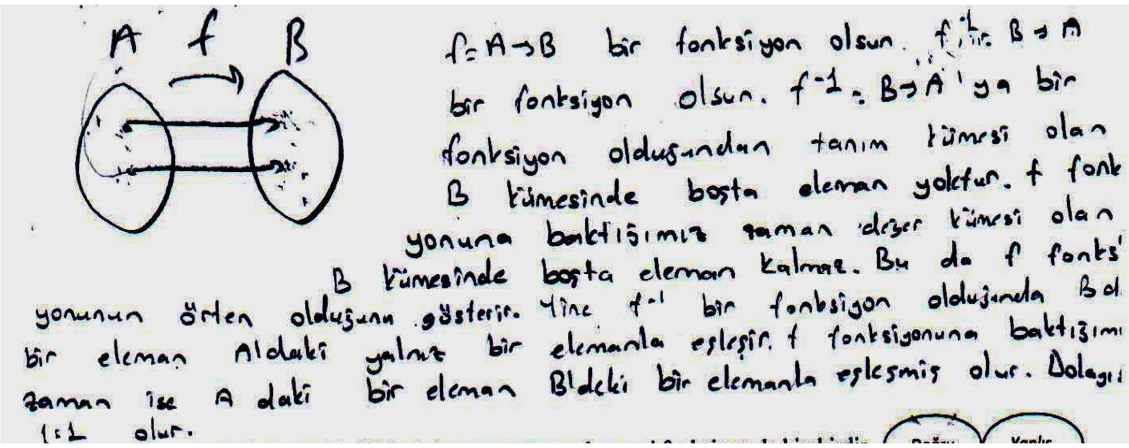
Şekil 3. Buse'nin ispatı

Aysun ve Bilge ise ispatını yaparken Buse gibi tanımları yazmış ve tanımda bulunan notasyonları manipüle etmeye odaklanarak ispat yapmaya çalışmıştır. Aysun ve Bilge başarıya ulaşamamıştır. Bu öğretmen adaylarının tanımları açıp ilerleyerek sonuca ulaşmaya çalıştıkları için Harel ve Sowder'ın (2007) dönüşümsel ispat şemasında oldukları belirlenmiştir. Aşağıda Aysun'un ispatı sunulmuştur.



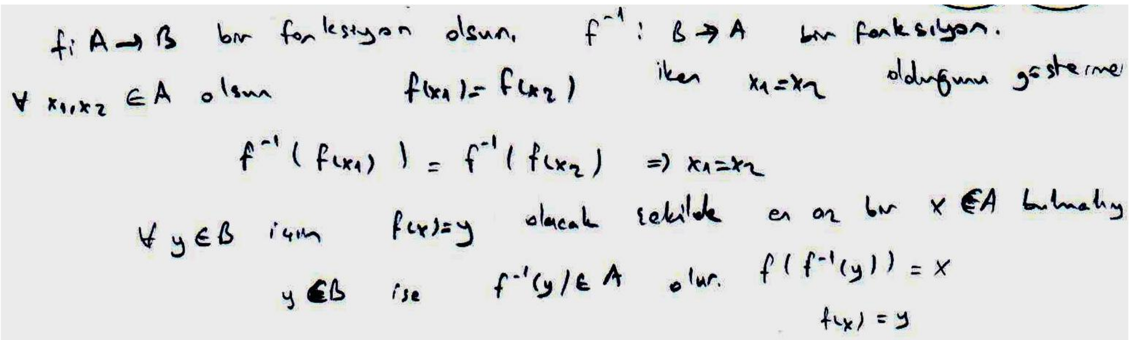
Şekil 4. Aysun'un ispatı

Ahu ve Aziz ise yaptıkları ispatlarda, teoremin ispatında yer alan matematiksel mantığı yansıtmışlardır. Bu öğretmen adayları fonksiyon, ters fonksiyon, birebir ve örten fonksiyon kavramları üzerinden açıklamalar yaparak ispat yapmaya çalışmışlardır. Ahu ve Aziz'in ispatlarındaki eksiklik, matematiksel düşünceleri notasyona dönüştürememeleridir. Bu ispatlar ikna edicidir fakat matematiksel gösterimden uzaktır. Öğretmen adaylarının matematiksel kavramlarla ilişki kurarak ispat yaptıkları söylenebilir. Buna göre bu öğretmen adaylarının Harel ve Sowder'ın (2007) dedüktif ispat şemalarından dönüşümsel ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aziz'in ispatına yer verilmiştir.



Şekil 5. Aziz'in ispatı

Son olarak Adem, yaptığı ispatta, Ahu ve Aziz'de olduğu gibi ispatın mantığını yansıtmıştır. Adem matematiksel düşüncelerini notasyonlara yansıtmada başarılı olmuştur. İspatını yaparken matematiksel tanımlardan yola çıkmıştır. Kavramlar arasında ilişkiler kurarak geçerli bir ispat yapmıştır. Aşağıda Harel ve Sowder'ın (2007) dönüşümsel ispat şemasında olan Adem'in ispatına yer verilmiştir.


$f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f^{-1}: B \to A$ bir fonksiyon.
$\forall x_1, x_2 \in A$ olsun $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğunu göstermeli
$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$
$\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ bulmalıy
$y \in B$ ise $f^{-1}(y) \in A$ olur. $f(f^{-1}(y)) = x$
$f(x) = y$

Şekil 6. Adem'in ispatı

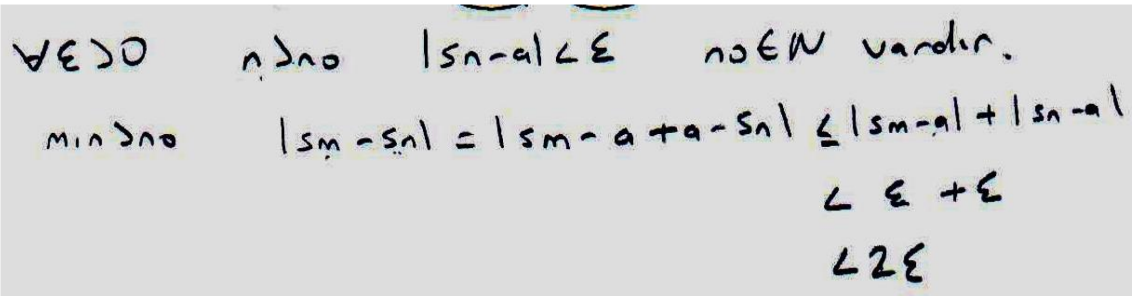
Öğretmen adaylarının diziler konusundaki ispat yapma süreçlerini ortaya çıkarmak için *"Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir"* önermesi için yaptıkları ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarının dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4'de kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4
Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat			✓	✓				
Kısmen doğru ispat								✓
Tamamlanmamış ispat							✓	
Tanımları kopyalama					✓	✓		
Boş	✓	✓						

İki öğretmen adayı (Aziz, Aysun) doğru ispatlar üretmiştir. Diğer öğretmen adaylarından ikisi (Ahu, Adem) önermenin yanlış olduğunu ifade etmiş fakat ters bir örnek bulamayarak ispatı boş bırakmışlardır. İki öğretmen adayı (Barış, Bilge) ise ispatlarında sadece tanımlara yer vermişlerdir. Bir öğretmen adayı (Buse) ispatını tamamlayamamış ve yarım bırakmıştır. Bir öğretmen adayı (Belma) da kısmen doğru bir ispat yapmıştır.

Aziz ve Aysun yakınsak dizi tanımından yola çıkarak Cauchy dizisi tanımına ulaşmışlardır. Bu öğretmen adayları ispatlarını yaparken yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramlarını düşünerek birbiri arasında ilişki kurmuşlardır. Buna göre öğretmen adaylarının dönüşümsel ispat şemasında oldukları söylenebilir. Örnek olarak Aziz, ispatına teoremin hipotezi olan yakınsak dizi tanımını yazarak başlamıştır. Yakınsak dizi tanımından hareketle Cauchy dizisi tanımına nasıl ulaşacağı konusunda düşünce sürecine girmiştir. Cauchy dizisi ile yakınsak dizi arasındaki kavramsal ilişkileri kullanarak ispatını sonuçlandırmıştır. Aşağıda Aziz'in ispatına ve ifadelerine yer verilmiştir.



$\forall \varepsilon > 0$ $n > n_0$ $|s_n - a| < \varepsilon$ $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$m, n > n_0$ $|s_m - s_n| = |s_m - a + a - s_n| \leq |s_m - a| + |s_n - a|$

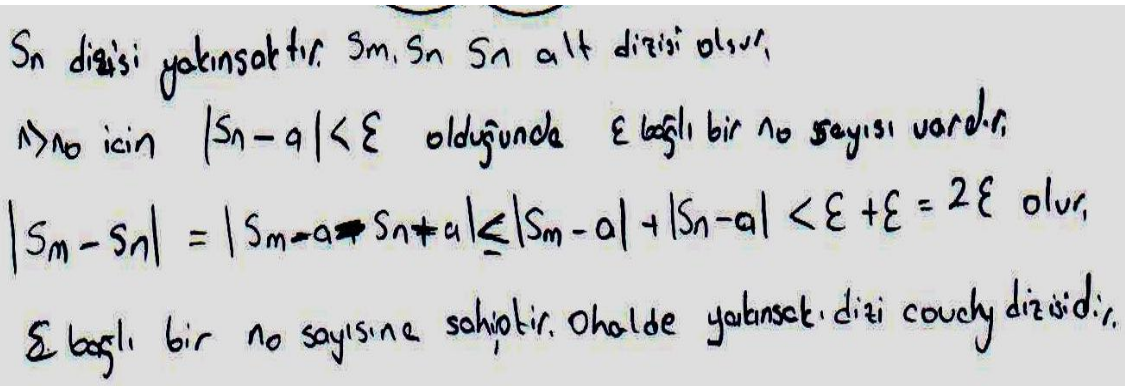
$< \varepsilon + \varepsilon$

$< 2\varepsilon$

Şekil 7. Aziz'in ispatı

Aziz: *Şimdi elimde yakınsak bir dizi var [yakınsak dizinin tanımını yazıyor]. Bu, yakınsaklığın tanımı. Şimdi Cauchy dizisi için farklı bir m terimini alayım. Şimdi yine m ve n de dizinin* n_0 *dan sonraki iki farklı terim olsun.* $|s_m - s_n|$ *nin* ε *dan küçük olduğunu bulmaya çalışıyorum… Şimdi ben* $|s_m - s_n|$ *ifadesine a ekleyip çıkarsam, buradan da üçgen eşitsizliğinden* $|s_m - a|$ *ile* $|s_n - a|$ *olur. Zaten m ve n de* n_0 *dan sonraki terimler olduğu için bunlar komşuluğun içinde kalır. Buradan büyük olan* ε *yazdığım zaman eşitlik kalkar.* $< 2\varepsilon$ *olur. Bu da* $|s_m - s_n|$ *nin komşulukta kaldığını gösterir. O zaman Cauchy dizisidir.*

Belma'nın ispatı incelendiğinde, yapı olarak doğru bir ispat gibi görünse de ispatta bazı eksiklikler olduğu görülmüştür. Bu eksikliklerden biri Cauchy dizisi tanımına yönelik kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklanan bir eksiklik olduğu düşünülmektedir. Belma, Cauchy dizisinde bulunan $|s_m - s_n|$ ifadesinde yer alan ve dizinin n_0'dan sonraki iki farklı terimini temsil eden s_m ve s_n terimlerini dizinin iki alt dizisi olarak görmüştür. Belma'nın ispatındaki ikinci eksiklik ise, Cauchy dizisinin kesme noktasının açıkça belirtilmemesidir. Kesme noktasının belirtilmesi Cauchy dizisi için kullanılan eşitsizliklerin geçerliliğinin de bir garantisidir. Belma'nın ispatındaki eksiklikler düşünülerek bu ispat, kısmen doğru olarak değerlendirilmiştir. Bu durumun sebebi olarak, Belma'nın ispatı daha önce yaptığını hatırladığı için zihnindeki belli bir algoritmayı takip ettiği düşünülmektedir. Belma prosedürel bir yaklaşım sergilemiştir. Aşağıda Belma'nın ispatına ve ifadelerine yer verilmiştir.



S_n dizisi yakınsaktır. S_m, S_n S_n alt dizisi olsun,

$n > n_0$ için $|S_n - a| < \varepsilon$ olduğunda ε bağlı bir n_0 sayısı vardır.

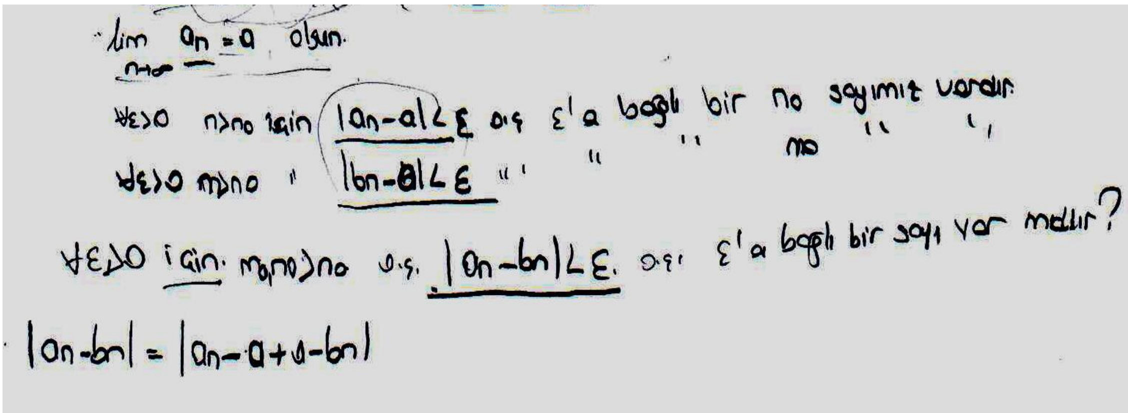
$|S_m - S_n| = |S_m - a - S_n + a| \leq |S_m - a| + |S_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ olur,

ε bağlı bir n_0 sayısına sahiptir. O halde yakınsak dizi cauchy dizisidir.

Şekil 8. Belma'nın ispatı

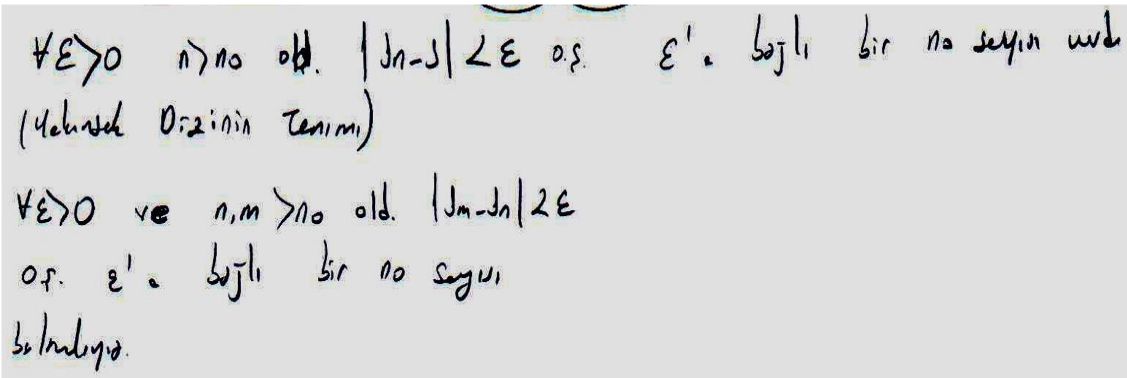
Belma: *Bu doğru çünkü ispatını yapmıştık… s_n yakınsak dizi dedim. Daha sonra yakınsaklık tanımını yazdım. Daha sonra Cauchy dizisi olması için iki alt dizisi seçtim ve bunların yakınsak olduklarını göstermeye çalıştım. Bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır diyerek oradaki işlemleri yaptım. a ekleyip çıkarttım. Daha sonra alt dizileri ayırt ettim. ε a bağlı bir n_0 sayısı buldum. O halde dedim yakınsaktır. Cauchy dizisidir.*

Buse ispatını tamamlayamamıştır. Buse tıpkı Belma gibi, Cauchy dizisi tanımındaki farklı terimleri, farklı alt diziler olarak dikkate almıştır. Bu bakımdan Buse’nin de Cauchy dizisi tanımına yönelik kavramsal bilgilerinde eksikliklerin olduğu söylenebilir. Ayrıca Buse’nin ispatında notasyonları kullanma konusunda güçlük yaşadığı da görülmüştür. Aşağıda Buse’nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 9. Buse’nin ispatı

Barış ve Bilge ispatlarında sadece yakınsak dizi ve Cauchy dizisi tanımını ifade etmişler ve ispatlarını tamamlayamamışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış’ın ispatına yer verilmiştir.



Şekil 10. Barış’ın ispatı

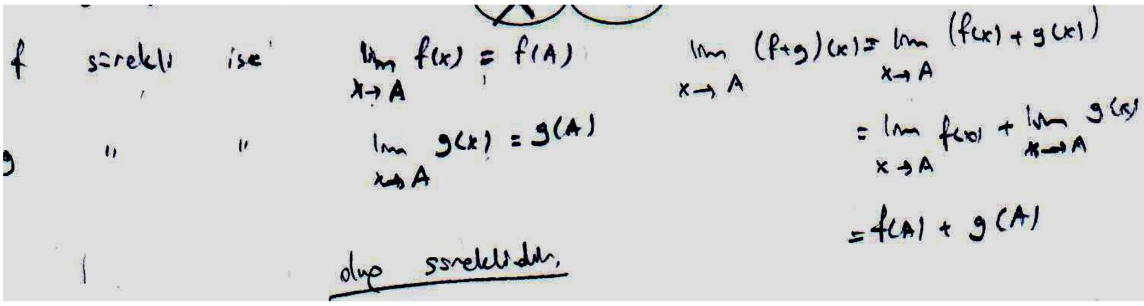
Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki ispat yapma süreçlerinin ortaya çıkarılması amacıyla öğretmen adaylarının *“$A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f+g fonksiyonu da A kümesi üzerinde süreklidir”* doğru önermesi için ürettikleri ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarının dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 5'te bu kategorilere yönelik bilgiler sunulmuştur.

Tablo 5
Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓						
Kısmen doğru ispat						✓		
Geçersiz ispat	✓		✓	✓			✓	✓
Örnekle doğrulama					✓			

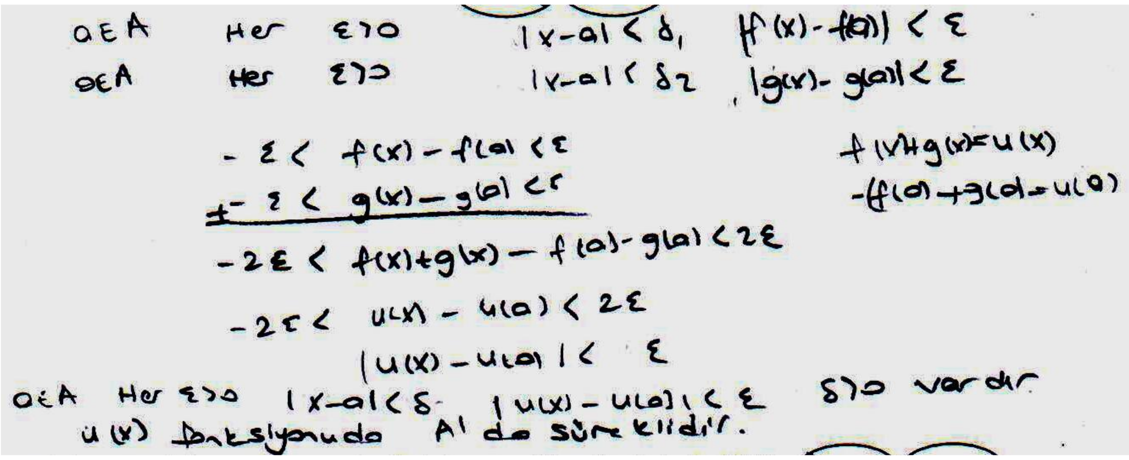
Tablo 5 incelendiğinde, sadece bir öğretmen adayının (Adem) doğru bir ispat yapabildiği görülmüştür. Bir öğretmen adayı (Bilge) kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Öğretmen adaylarının yarısından fazlasının (Ahu, Aziz, Aysun, Buse, Belma) ispatları geçersiz olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını formel süreklilik tanımını kullanarak ispatı ilerletmeye çalışmış ve tamamlamışlardır. Buna göre öğretmen adaylarının bu önermenin ispatı için dönüşümsel ispat şemasında oldukları söylenebilir. Bir öğretmen adayı (Barış) ise önermenin doğru olduğunu bir örnek üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu öğretmen adayının tümevarımsal ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır.

Adem ispatında süreklilik tanımını ve limit işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmıştır. Aşağıda doğru bir ispat üreten Adem'in ispatı yer almıştır.



Şekil 11. Adem'in ispatı

Bilge ise sürekliliğin formel tanımını kullanarak kısmen doğru bir ispat yapmıştır. Bilge'nin ispatının kısmen doğru olarak değerlendirilmesinin sebebi f+g fonksiyonunun A kümesi üzerinde sürekliliğini sağlayacak bir δ sayısının varlığını ifade etmesine rağmen onun varlığını teoremin hipotezindeki bilinenlerden hareketle garanti altına alamamasıdır. Söz konusu δ sayısının varlığı ifade edilmiş fakat açık bir şekilde belirtilmemiştir. Aşağıda Bilge'nin ispatı sunulmuştur.



$a \in A$ Her $\varepsilon > 0$ $|x-a| < \delta_1$ $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$a \in A$ Her $\varepsilon > 0$ $|x-a| < \delta_2$, $|g(x)-g(a)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x)-f(a) < \varepsilon$ $f(x)+g(x)=u(x)$

$+\; -\varepsilon < g(x)-g(a) < \varepsilon$ $-f(a)+g(a)=u(a)$

$-2\varepsilon < f(x)+g(x)-f(a)-g(a) < 2\varepsilon$

$-2\varepsilon < u(x)-u(a) < 2\varepsilon$

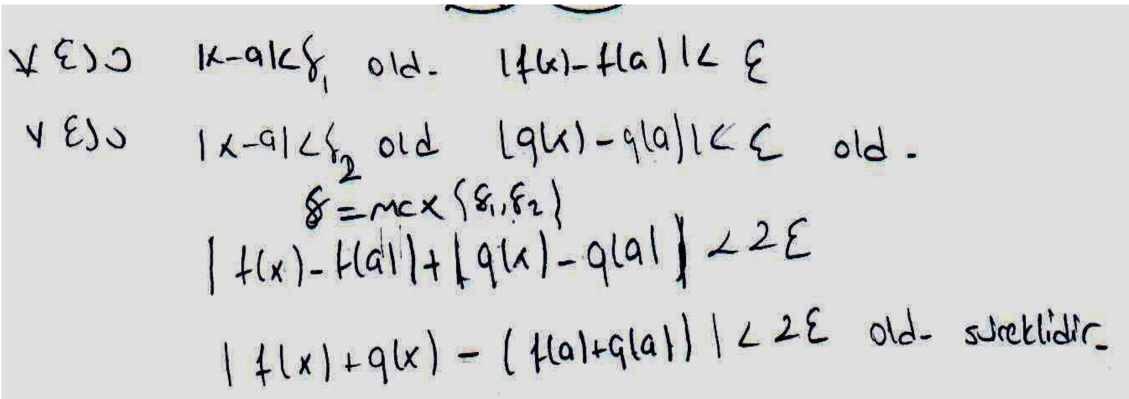
$|u(x)-u(a)| < \varepsilon$

$a \in A$ Her $\varepsilon > 0$ $|x-a| < \delta$ $|u(x)-u(a)| < \varepsilon$ $\delta > 0$ vardır

$u(x)$ fonksiyonuda A'da süreklidir.

Şekil 12. Bilge'nin ispatı

Ahu, Aziz, Aysun, Buse ve Belma'nın ispatları incelendiğinde geçersiz ispatlar yaptıkları ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adayları süreklilik tanımından yararlanarak ispatını tamamlamaya çalışmışlardır. Bu ispatlar Bilge'nin yaptığı ispattan farklıdır. Bilge'nin ispatında, ispatta kullanılan işlemlere olanak verecek bir δ sayısının varlığı ifade edilmiş fakat açıkça belirtilmemiştir. Bu ispatlarda ise δ sayısı bilinenlerden hareketle açıkça belirtilmiş fakat belirtilen δ sayısı ispatta kullanılan işlemlerin doğruluğunu ve geçerliğini tehlikeye düşürmektedir. Bu ispatların ters örnek yardımıyla geçersizliğini göstermek mümkündür. Aşağıda bu ispatlara bir örnek olarak Aysun'un ispatı sunulmuştur.



$\forall \varepsilon > 0$ $|x-a| < \delta_1$ old. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $|x-a| < \delta_2$ old $|g(x)-g(a)| < \varepsilon$ old.

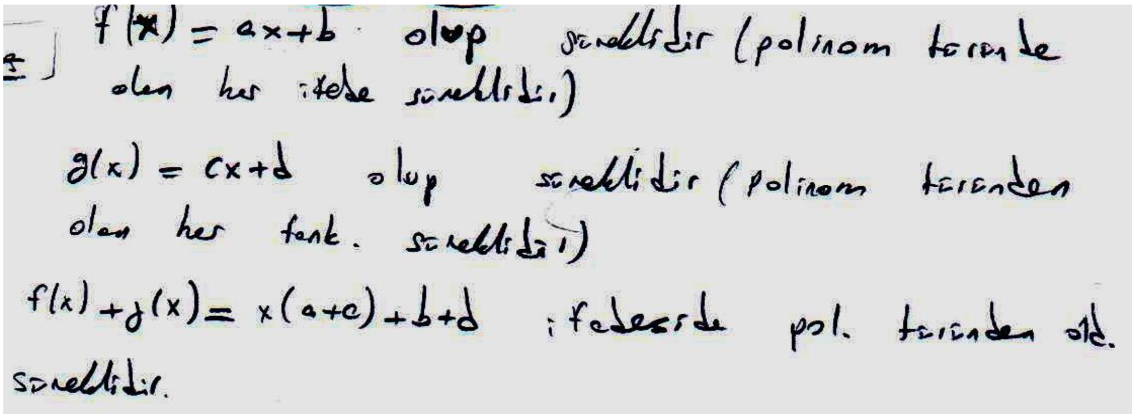
$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$

$|f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < 2\varepsilon$

$|f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))| < 2\varepsilon$ old. süreklidir.

Şekil 13. Aysun'un ispatı

Barış ise tümevarımsal bir yaklaşım ile ispatını bir örnek kullanarak yapmıştır. Barış ispatında iki genel doğrusal fonksiyon ele alarak toplamlarının sürekli olduğunu göstermeye çalışmıştır. Aşağıda Barış'ın ispatı sunulmuştur.


$f(x) = ax+b$ olup süreklidir (polinom formunda olan her ifade süreklidir)
$g(x) = cx+d$ olup süreklidir (polinom formdan olan her fonk. süreklidir)
$f(x)+g(x) = x(a+c)+b+d$ ifadesinde pol. formdan old. süreklidir.

Şekil 14. Barış'ın ispatı

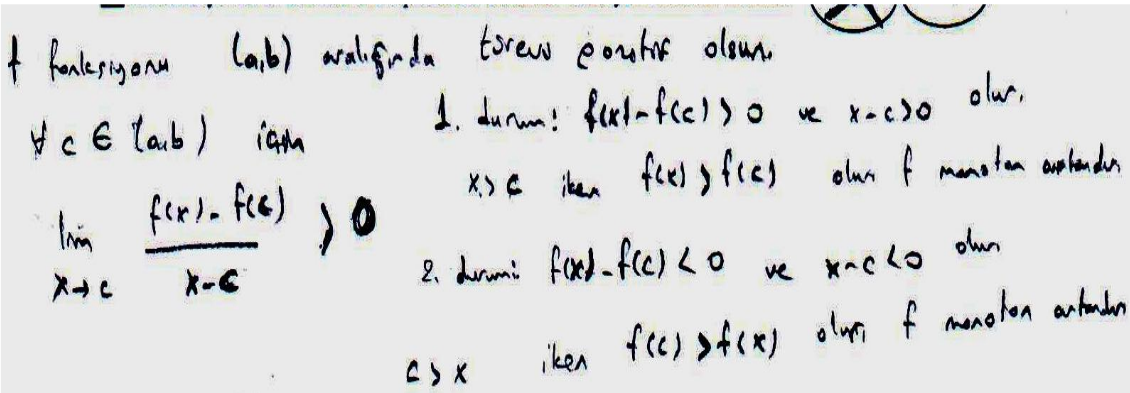
Çalışmada son olarak, öğretmen adaylarının türev konusunda ispat yapma becerilerini ortaya çıkarmak için reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için "*Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon monoton artandır*" doğru önermesine yönelik yaptıkları ispatlar incelenmiştir. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların dört kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 6'da bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 6
Öğretmen Adaylarının İspatı Yapma Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ispat		✓		✓				
Hipotezi yazma						✓		
Açıklama yapma	✓		✓					
Örnekle doğrulama					✓		✓	✓

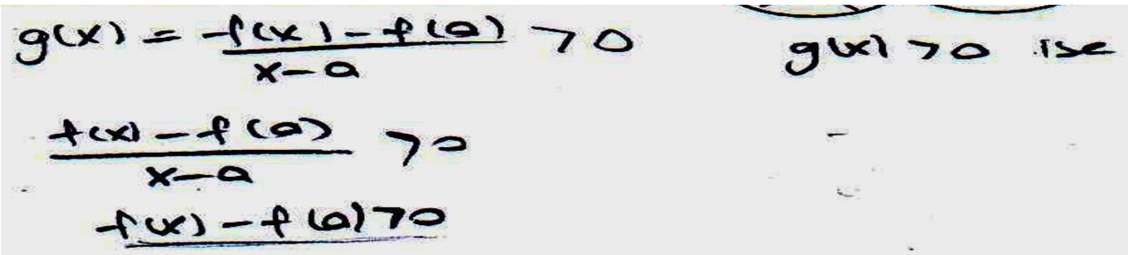
Tablo 6 incelendiğinde sadece iki öğretmen adayının (Adem, Aysun) doğu bir ispat ürettiği tespit edilmiştir. Diğer öğretmen adaylarından üçü (Barış, Buse, Belma) ispatlarında örnekleri kullanmış, iki öğretmen adayı (Ahu, Aziz) tanım ve şekiller üzerinden açıklama yaparak ispat yapmaya çalışmıştır. Bir öğretmen adayı (Bilge) da teoremin hipotezini yazmış ve ispatını tamamlayamamıştır.

Adem ve Aysun ispatlarını yaparken teoremin hipotezini kullanmışlardır. Türev tanımından hareket etmişler, bu tanımı monoton artan fonksiyon tanımı ile ilişkilendirerek ispatlarını tamamlamışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatı yaparken dönüşümsel ispat şemasında oldukları tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem'in ispatına yer verilmiştir.



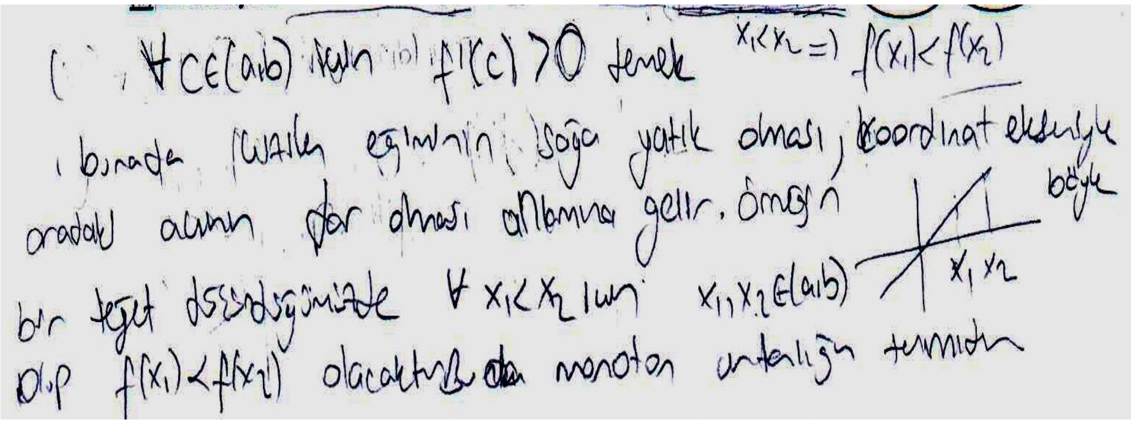
Şekil 15. Adem'in ispatı

Bilge ise ispatını tamamlayamayarak sadece teoremin hipotezini yazmıştır. Bilge ispatını yaparken daha önce böyle bir ispat yapıp yapmadığını hatırlamaya çalıştığını ifade etmiştir. Buna göre Bilge'nin otoriter ispat şemasında olduğu söylenebilir. Aşağıda Bilge'nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 16. Bilge'nin ispatı

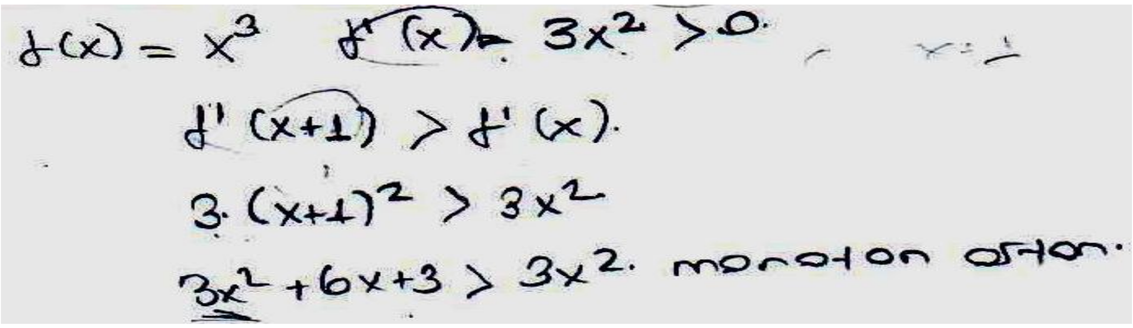
Ahu ve Aziz ispatlarını yaparken türev kavramından yola çıkmışlardır. Türev kavramına uygun olarak bir şekil çizmiş ve o şekilden yararlanarak monoton artan fonksiyon tanımına ulaşmaya çalışmışlardır. Ahu ve Aziz'in ispatları türev tanımından hareket edilerek monoton artan fonksiyon tanımına uygun olduğunun açıklanması şeklindedir. Ahu ve Aziz'in bu gösterimi yetersiz zihinsel gösterim olarak değerlendirilmiştir. Buna göre bu öğretmen adaylarının tanımlar ve kavram imajları üzerinden hareket ettikleri ve şekillerden yardım aldıkları için algısal şemada oldukları söylenebilir. Aşağıda Ahu'nun ispatı örnek olarak sunulmuştur.



Şekil 17. Ahu'nun ispatı

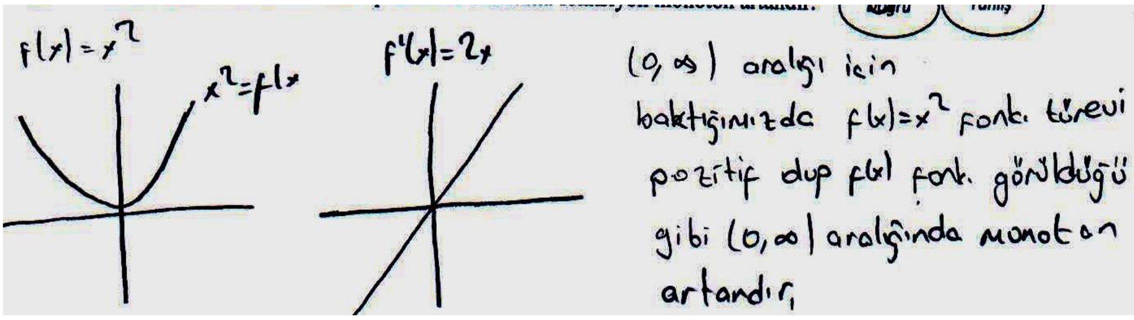
Buse, Barış ve Belma önermenin doğru olduğunu, yeterli olacağını düşünerek bir örnek üzerinden göstermeye çalışmışlardır. Buna göre Buse, Barış ve Belma'nın tümevarımsal ispat şemasında oldukları söylenebilir.

Buse'nin ispatı incelendiğinde, monoton artan fonksiyon tanımı ile monoton artan dizi tanımlarını birbiri ile karıştırdığı belirlenmiştir. Buse fonksiyonun monoton artan olduğunu göstermek için monoton artan dizi tanımını uygulamıştır. Ayrıca Buse'nin önermenin ifadesini anlamada güçlük yaşadığı ortaya çıkmıştır. İspatında kullandığı fonksiyonun monoton artan olduğunu göstermesi gerekirken türev fonksiyonunun monoton artan olduğunu göstermeye çalışmıştır. Aşağıda Buse'nin ispatı sunulmuştur.



Şekil 18. Buse'nin ispatı

Belma ispatını yaparken örnek üzerinden hareket etmiştir. Bir örnek üzerinden önermenin doğru olduğunu göstermiştir. Belma kullandığı örneğin önermedeki özellikte olduğunu açıklamak için şekilleri kullanmıştır. Aşağıda Belma'nın ispatı sunulmuştur.



Şekil 19. Belma'nın ispatı

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmada öğretmen adaylarından kendilerine sunulan önermelerin doğruluğunu değerlendirmelerinin ardından verdikleri kararlara göre söz konusu önermelerin doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu göstermek için yaptıkları ispatlar incelenmiştir.

Öğretmen adayları dört doğru önerme için toplam 30 ispat üretmişlerdir. İki öğretmen adayı (Ahu, Adem) diziler konusunda önermenin yanlış olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının önermenin doğru olduğunu göstermek için ürettikleri ürünler incelendiğinde, sadece altı adet doğru ispat üretildiği ortaya çıkmıştır. Buna göre öğretmen adaylarının doğru ispat yapma konusunda güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu sonuç, öğretmen adaylarının ispat yapma konusunda başarısız olduklarını belirten araştırma sonuçlarını desteklemektedir (Doruk ve Kaplan, 2015; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994; Riley, 2003).

Doğru ispatları üreten öğretmen adayları incelendiğinde, Adem'in yaptığı ispatların hepsinin doğru olduğu, Aysun'un yaptığı ispatların yarısının doğru olduğu ve Aziz'in ürettiği ispatların sadece bir tanesinin doğru olduğu belirlenmiştir. Buna göre ispat yapma becerisi en yüksek öğretmen adayının Adem olduğu ortaya çıkmıştır. Aysun ise ortalama bir başarı sergilemiş, Aziz'in başarısının oldukça düşük olduğu görülmüştür. Üretilen iki ispat ise kısmen doğru olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının ürettikleri ispatların çoğunlukla matematiksel olarak geçerli olmadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının doğru ispat olarak sunduğu fakat matematiksel olarak geçerli olmayan ispatların çoğunda kilit ifadelere dikkat edilmeyerek yanlışlıklar yapılmış ya da ispatın mantığını yansıtan fakat matematiksel gösterimden uzak ifadeler kullanılmıştır. Geçerli olmadığı şeklinde değerlendirilen bazı ispatların ise tanımların anlamlarını bilmeden kopyalama ya da tanımlardaki ifadeleri manipüle etmekten ibaret olduğu tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adayları (Barış, Bilge, Buse) ise ispatlarını tamamlayamamışlardır. İspatlarında sadece tanımları ifade etmişler, önermenin hipotezini yazmış veya ispata başlayarak yarım bırakmışlardır.

Önermenin doğru olduğunu göstermek için üretilen 30 ispattan altısının tümevarımsal argümanlar olduğu belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları ispatlarında özel örneklere yer vermişlerdir. Öğretmen adaylarından Barış, ispatların çoğunda tümevarımsal argümanlar üretirken Belma ise ispatlarının yarısında bu şekilde argümanlar üretmiştir. Buna göre özellikle Barış'ın Harel ve Sowder'ın (2007) belirttiği tümevarımsal ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır. Tümevarımsal ispat şemasındaki bir öğrenci iddianın doğru olduğunu bir ya da birkaç örneğin sonuçlarını değerlendirerek karar verir ya da cebirsel bir ifadenin doğruluğunu birkaç özel sayıyı ifadede yerine yazarak elde edilen sonuçlara göre ikna olur (Harel ve Sowder, 1998). Coe ve Ruthven (1994) de çalışmalarına katılan öğrencilerin yaptıkları ispatları deneysel zayıf dedüktif ve güçlü dedüktif kategorilerinde incelemişlerdir. Yaptıkları incelemelerin sonucunda öğrencilerin çoğunluğunun ispatlarında deneysel argümanlar kullanırken çok azının dedüktif ispat yapabildiklerini tespit etmişlerdir.

Çalışmada öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğunu göstermek için ürettikleri ispatların doğru ispat, kısmen doğru ispat, geçersiz ispat, açıklama, örnekle doğrulama, tanımları manipüle etme, tanımları kopyalama, tamamlanmamış ispat ve hipotezi yazma kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Ko ve Knuth (2009) benzer bir çalışma yürütmüşlerdir. Ko ve Knuth (2009) çalışmalarında üniversite öğrencilerinin doğru önermeler için ürettikleri ispatların tamamlanmış, yapısal (geçerli ispat oluşturmak için geçerli tanım, teorem ve aksiyomların kullanıldığı fakat mantıksal hataların bulunduğu ispatlar), referanssız-sembolik (mantıksal hatalı, ispat oluşturmayan, anlamlarını bilmeden sembollerin manipüle edilmesi), deneysel, ters örnek ve yeniden ifade etme kategorileri altında toplandığını tespit etmişlerdir. Buna göre çalışmadan elde edilen kategorilerin Ko ve Knuth'un (2009) tespit ettiği kategoriler ile büyük oranda örtüştüğü söylenebilir. Literatürdeki mevcut kategoriye ek olarak açıklama kategorisi tespit edilmiştir. Bu kategorideki ispatlarda (Ahu ve Aziz'in fonksiyonlar ve türev konusundaki ispatları) ispatın mantığı geçerli kavramsal bilgiler, şekiller ile ispata yansıtılmaktadır fakat yeterli matematiksel dil kullanılarak ispat oluşturulamamaktadır. Açıklama kategorisindeki ispatların Raman'ın (2003) belirttiği ve kişinin ispata kendisinin ikna olması ile ilgili olan özel argüman olduğu fakat matematiksel toplulukları ikna edecek genel bir argüman olmadığı söylenebilir. Çalışmada elde edilen kategorilerin Harel ve Sowder'ın (2007) ispatlama şemalarından referanssız-sembolik, tümevarımsal, algısal, dönüşümsel ispat şemaları ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Ayrıca bu çalışmada doğru ispat; bir önermenin doğruluğunu (ya da yanlışlığını) göstermek için yapılan, herkes tarafından bilinen matematiksel elemanların kullanıldığı (tanım, teorem ve aksiyom), hipotezlerden yola çıkılarak aksiyomatik bir yapıda ilerleyen, matematiksel ve mantıksal olarak genel, doğru ve ikna edici argümanlar olarak değerlendirilmiştir. Çalışmada dikkate alınan bu ispat anlayışı literatürde yer alan ispata yönelik görüşlerle örtüşmektedir (Kaplan vd., 2016; Güven vd., 2005; Stylianides, 2007; Weber, 2005).

Farklı akademik başarıya sahip olan grupların sahip oldukları ispat şemalarının da farklılık gösterdiği ortaya çıkmıştır. Akademik başarısı yüksek olan öğretmen adaylarının ürettikleri ispatlarda genellikle dedüktif ispat şemasına sahip oldukları tespit edilmiştir. Ortalama başarıya sahip öğretmen adaylarının ise dedüktif, tümevarımsal ve dışsal ispat şemalarında oldukları ortaya çıkmıştır. Akademik başarısı yüksek olan öğretmen adaylarının çalışmadaki performansları incelendiğinde, öğretmen adaylarından bazılarının ispat yapmada başarılı olamadıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmada tespit edilen bu durum Weber'in (2001) lisans öğrencilerinin ispat yapmak için gerekli olan doğru bilgileri bilmelerine ve önermeyi ispatlayabilmek için uygulayabilmelerine rağmen ispat yapmada başarısız olduklarını belirttiği çalışmasının sonuçları ile benzerlik göstermiştir.

Sarı ve diğerleri (2005) çalışmalarında başarılı öğrencinin dedüktif ve sentaktik ispat yapısına sıkı sıkıya bağlı iken başarı seviyesi düştükçe öğrencilerin deneysel ve dışsal yapılarda olduklarını tespit etmiştir. Öğrencilerin akademik başarı seviyesi düştükçe dedüktif ve sentaktik yapılardan uzaklaşıldığı belirlenmiştir. Bu çalışmada da akademik başarısı yüksek olan öğretmen adaylarının genellikle dedüktif ispat şemasında olduğu belirlenmiştir. Akademik başarıları daha düşük öğretmen adaylarının da dedüktif ispat şemasının yanında çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarında oldukları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının akademik başarı düzeyi düştükçe dedüktif olmayan gerekçeleri ikna edici buldukları ve dedüktif olmayan argümanları ispat olarak kabul etme eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için ispat ağırlıklı derslerin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanları öğrencilerin ispat yapabilmeleri için fırsat vermelidir. Söz konusu derslerde geçerli ispatlarda bulunması gereken özelliklere yönelik tartışmaların yapılması, öğrencilerin geçerli ispat yapabilmeleri ve doğru ispat imajlarının gelişmesi adına faydalı olabilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının doğru ispat üretmede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının yaşadıkları bu güçlüğün sebebi olarak literatürde farklı görüşler vardır. Bu konuda Moore (1994), lisans öğrencilerinin kavram imajlarının yeterince gelişmiş olmasına rağmen tanımları ve sembolleri formel matematiksel bir dil ile yerleştiremedikleri için hala ispat yaparken zorluk yaşadıklarını belirtmiştir. Weber (2001) de ispatlardaki bu başarısızlığın sebebinin, öğrencilerin sahip oldukları sentaktik bilgileri ispat yaparken kullanamamaları olduğunu ifade etmiştir. Sentaktik bilgi, ispat yapmak için tanımları açarak ve sembolleri işe koşarak mantıksal manipülasyonlar yapma olarak tanımlanabilir (Weber, 2001). Ayrıca sentaktik bilginin önemli olmakla beraber ispat yapmak için yeterli olmadığını, aynı zamanda stratejik bilgiye de ihtiyaç olduğunu ifade etmiştir. Stratejik bilgiler ispatlama yönteminin seçimi, özel teorem ya da gerçekler ile sentaktik bilginin ne zaman kullanılıp kullanılamayacağı bilgisidir (Weber, 2001). Buradan hareketle öğrencilerin ispatlarda güçlük yaşamalarının sebepleri araştırılabilir. Bu bağlamda öğrencilerin ispatlama sürecinde notasyonları kullanma becerileri ile stratejik bilgileri sorgulanabilir.

Kaynaklar

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488.

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Cambridge University. (2013). *Cambridge advenced learner's dictionary*. (4th edition). McIntosh, C. (Ed.). UK: Cambridge University Press.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). *Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions*. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress ofthe European Societyfor Research in Mathematics Education (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (ed.) *Rethinking Proof with Sketchpad*, pp. 3-10.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 15-34). Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(7), 47-71.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(2), 315-328.

Edwards, L.D. (1997). Exploring the territory before proof: Student‘s generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(3), 187-215.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 71-90.

Griffiths, P.A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly, 107*, 1-14.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 316,* 35-45.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 345–353.

Hanna, G., Bruyn, Y., Sidoli, N., & Lomas, D. (2004). Teaching proof in the context of physics. *ZDM Mathematics Education, 36(3),* 82–90.

Harel, G, & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. InA. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Hartter, B.J. (1995). *Concept image and concept definition for the topic of the derivative* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9603516)

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kaleli Yılmaz, G. (2015). Durum çalışması. Mustafa Metin (Ed.). *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* içinde (s. 261-285). Ankara: Pegem Akademi.

Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M., & Duran, M. (2016). Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır?. *Journal of Human Science*, *13*(3), 6020-6037.

Knuth, E. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers*' *conceptions of proof*. (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9938829)

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors’ writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education, 40*, 341–344.

Mejia-Ramos, J.P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof?. *Research in Mathematics Education, 11*(1), 77-78.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8 Sınıflar Öğretim Programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics. 27*, 249-266.

Oxford University. (2010). *Advenced Learner's Dictionary (International students' edition).*(8th edition). New York: Oxford University Press

Patton, M.Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52(3),* 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia Mathematica, 7(1),* 5–41.

Riley, K.J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proofand refutations* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3083484)

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(2)*, 295–319.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Schoenfeld, A.H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proofacross the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 237-253.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In *Alatorre, S. Cortina, J. and Mendez A.(Eds, 2006). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapters of the International Group of the Psychology of Mathematics Education. Merida, Mexico*.

Tucker, T.W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, *36*, 31-35.

Türk Dil Kurumu [TDK]. (2015). *Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-1 19.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24,* 351-360.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme. (10. Baskı).* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Extended Abstract

Purpose of the study

It is a well-known fact that undergraduates have been unsuccessful and had many difficulties in proof activities. In order to reveal the cause of these difficulties, it is necessary to focus on the proving processes of the students. It is useful to deeply investigate the process of proving the students in areas where they have difficulty and what they have experienced in these processes. We have reached the result in the literature review that researches focusing on students' proving process in the domain of Calculus are very limited. Moreover, the detailed classification involving students' proof schemes is expected to provide significant contributions to the related literature. On the other hand, mathematics teachers primarily need to have knowledge about how the truth of a mathematical statement is shown in order to gain skills like "presenting truth and validity of arguments" and "making rational generalizations and arguments" to their students. So, pre-service mathematics teachers should be asked whether they have essential skills mentioned above at teacher training departments of universities. Necessary education could be given to preservice teachers according to the results of these examinations. In this sense, preservice primary mathematics teachers' proving process in the domain of calculus was examined in this study. The aim of this study is to reveal what characteristics preservice teachers' proofs have in proving process.

Method

Qualitative research approach was adopted in this study. The study was a case study which is one of the qualitative research designs. The research group of the study consist of eight junior preservice mathematics teachers who were studying in the department of primary mathematics education at a state university located eastern Anatolia region of Turkey in spring term of the 2013-2014 academic year. In addition, the pilot study was carried out with ten senior pre-service mathematics teachers studying in the same department and at the same university in the fall term of 2013-2014 academic year.

Criterion sampling method which is one of the purposive sampling methods was taken into consideration in selecting the research group. In this study, the characteristics pre-service mathematics teachers' proofs in domain of Calculus has been investigated. For this reason, in selecting the research group, pre-service mathematics teachers who took and successfully passed Abstract Mathematics course in which pre-service teacher had knowledge about what proofs are, how proofs are generated, how an argument must be mathematically defended or about existences and usage of contra-examples for refuting statements and General Mathematics, Analysis I, Analysis II and Analysis III courses in which calculus concepts were taught. Functions, sequences, limit-continuity and derivative were taken into consideration as the fundamental concepts of calculus in the study. Since these concepts used in task-based interviews and logic of proving were taught in Analysis I, Analysis III and Abstract Mathematics courses, pre-service teachers' academic achievement in related courses and their cumulative grade point averages (CGPA) were examined in order to get more detailed information.

Pre-service teachers having required criteria were separated into two groups according to academic achievements in mentioned courses and CGPA. The first group consisted of successful pre-service teachers at average level. Four pre-service teachers were selected among successful pre-service teachers at average level through voluntary basis and easy accessibility. The CGPA of these participants were between 2.5/4 and 3.0/4. The other group had the same number of participants as in the first group. Pre-service teachers in the second group had high CGPA between 3.0/4 and 4.0/4 and passed related courses with a high level success at the first time. Four pre-service teachers were included in the second research group through voluntary basis and easy access as well. These participants were the most successful students in the department. Nicknames were used instead of names of the participants. Nicknames of pre-service teachers having average success in the first group were Barış, Belma, Bilge and Buse according to their success ranking. Similarly, pre-service teachers with high success had Adem, Ahu, Aysun and Aziz nicknames with respect to their success ranking.

Four semi-structured task-based clinical interviews were used to elucidate the proving process of pre-service teachers. Interviews were made for extracting their proving process in functions, sequences, limit-continuity and derivative concepts, respectively. True prepositions and formal definitions which required to prove them were presented in the interview forms. It was requested from pre-service teachers to decide if the propositions were correct or false, and to show the correctness of their decisions. It was said that they could use the formal definitions in the interview forms whenever they want.

Within the scope of validity studies in the development of data collection tools, six expert academicians were consulted and the pilot study was carried out. These specialists have served as assistant professors and associate professors in the department of primary mathematics education and secondary science and mathematics education in a state university. In line with the opinions received from the experts, the typographical errors and mathematical mistakes in the form were corrected.

The data of the study was gathered with semi-structured task-based clinical interviews within four weeks. Required information about the study was given to the participants before interviews. It was pointed out that the study was carried out with voluntary basis and they could leave the study whenever they want. It was indicated that preservice teachers' names will be kept as secret and nicknames will be used. It was planned that the study would be recorded on video but in the direction of the information obtained from the pilot study, interviews were recorded with audio recorder as pre-service teachers would be disturbed and they wouldn't concentrate on the study having video camera.

Interviews took place in an environment where it was believed that researcher and preservice teachers wouldn't be affected by external factors. Pre-service teachers were asked to think aloud during interviews. Preservice teachers often expressed their thoughts verbally. During the interviews, the researcher tried to avoid leading participants' behaviors. The researcher frequently asked questions in order to understand their thoughts. It was stated that questions asked by researcher were for understanding what they thought and they weren't leading questions. Preservice teachers were also asked not to wait for a confirmation from the researcher and not to ask questions about the topic.

One true preposition was presented to pre-service teachers at each interview. They were asked to defend their decision about the truth or falsity of the preposition. Proofs generated for true prepositions by preservice teachers were examined. Information about how they proved the prepositions was gathered by asking them questions if it was necessary.

Pre-service teachers' proofs were divided into different groups according to the characteristics of proofs by applying content analysis. Before data analysis, the voice recordings were converted to written form. After the transcription of voice records, the codes and categories were determined from the raw data. Verbal and written statements of preservice teachers were evaluated together in the determination of the code and categories. Dialogues between the preservice teachers and the researcher were often tried to be presented descriptively, without any changes. Thus, it was aimed to increase the reliability of the data. The categories obtained in the study were examined by two expert academicians. Experts indicated that the categories obtained in the study reflect the characteristics of the proofs of preservice teachers.

Results

Preservice teachers generated a total of 30 proofs for four true prepositions. Two preservice teachers (Ahu, Adem) made a wrong decision about the proposition in sequence concept. When preservice teachers' proofs generated to show the correctness of the prepositions were examined, it was seen that only six proofs were mathematically correct. According to these findings, it could be said that preservice teachers' proving success is very low. It was found that about half of the proofs produced by the preservice teachers were mathematically invalid. It was determined that a significant portion of the proofs produced are inductive arguments to show that the proposition is true. These preservice teachers included special examples in their proofs. At the end of the study, it was determined that preservice teachers proofs produced to demonstrate the accuracy of the statements had nine different characteristics. These characteristics were; "correct proof", "partially correct proof", "invalid proof", "explanation", "validation with example", "manipulation of definitions", "copying of definitions", incomplete proof and "hypothesis writing". On the other hand, it was found that the proof schemes of groups with different academic achievements also differ. Preservice teachers with high academic achievement were generally found to have deductive proof schemes in their proofs. Preservice teachers with average success were found to be in deductive, inductive and external proof schemes. According to this result, it can be deduced that preservice teachers who have low academic success are likely to non-deductive ways in proving process.

This study was conducted by adopting qualitative research approach with eight junior preservice primary mathematics teachers. The results of the study are limited to the proofs produced for the four theorems presented in the concepts of functions, sequences, limit-continuity, and derivatives. The new classification obtained in the study can be used to reveal the proof processes in different domains of mathematics.