Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22 (3), 907-914, 2018

SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
24.11.2017
Kabul/Accepted
26.12.2017

Doi
10.16984/saufenbilder.357403

Kuvvetli Boşluklu Quasi-Cauchy Dizileri Üzerine Yeni Bir Çalışma

Hüseyin Kaplan ve Hüseyin Çakallı[*1]

ÖZ

Bu çalışmada N_θ^2 -quasi-Cauchy dizisi kavramı tanıtılmış ve bu dizilerle ilgili ilginç teoremler ispatlanmıştır. (α_k) R nin bir A altkümesi üzerinde tanımlı bir dizi olmak üzere, $(\Delta^2\alpha_k)$ N_θ - quasi-Cauchy oluyorsa (α_k) dizisine N_θ^2 -quasi-Cauchy dizisidir denir. Burada $\Delta^2\alpha_k = \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k$ dır. f, R nin bir A altkümesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f, A daki N_θ^2 -quasi-Cauchy dizilerini koruyorsa, yani, (α_k) A da N_θ^2 -quasi-Cauchy dizisi iken $(f(\alpha_k))$ da N_θ^2 -quasi-Cauchy oluyorsa f e A da N_θ^2-ward süreklidir denir.

Anahtar Kelimeler: toplanabilme, kuvvetli boşluklu yakınsaklık, quasi Cauchy dizisi, sınırlılık, süreklilik

A new study on the strongly lacunary quasi Cauchy sequences

ABSTRACT

In this paper, the concept of an N_θ^2 -quasi-Cauchy sequence is introduced. We proved interesting theorems related to N_θ^2 -quasi-Cauchy sequences. A real valued function f defined on a subset A of R, the set of real numbers, is N_θ^2-ward continuous on A if it preserves N_θ^2 -quasi-Cauchy sequences of points in A, i.e. $(f(\alpha_k))$ is an N_θ^2 -quasi-Cauchy sequences whenever (α_k) is an N_θ^2 -quasi-Cauchy sequences of points in A, where a sequence (α_k) is called N_θ^2 -quasi-Cauchy if $(\Delta^2\alpha_k)$ is an N_θ - quasi-Cauchy sequence where $\Delta^2\alpha_k = \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k$ for each positive integer k.

Keywords: summabilty, strongly lacunary convergence, quasi-Cauchy sequences, boundedness, continuity

[*] Hüseyin Çakallı
[1] Maltepe University, huseyincakalli@maltepe.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Süreklilik ve sürekliliği içeren her kavram, yalnızca pür matematikte değil, matematiği kullanan bilgisayar, bilişim teori, ekonomi, biyoloji gibi birçok bilim dalında da önemli yer tutmaktadır.

Cesaro süreklilik 1946 yılında Buck tarafından ortaya atıldı([5]). Daha sonra Posner ([42]) , Antoni ve Salat ([1]), Spigel ve Krupnik ([43]) gibi yazarlar regüler toplanabilir A matrisi yardımıyla tanımlanan A-süreklilik kavramı üzerinde çalıştılar. Das ve Savaş ([34]), Borsik ve Salat ([3]) gibi bazı yazarlar da hemen hemen yakınsaklık ya da buna ilişkin metotlar için A- süreklilik çalıştılar. Connor ve Grosse-Erdman ([12]), reel değerli fonksiyonların dizisel süreklilik tanımlarını, dizisel bir metot ya da dizisel bir yakınsaklık metodu kullanarak verdiler ve bunları A- süreklilik yerine G- süreklilik olarak adlandırdılar. Bu yazarların elde etttikleri sonuçlar, daha önce A- süreklilik ile ilgili yapılmış olan çalışmaları kapsamaktadır. Dizisel yakınsaklık metodu ya da kabaca bir metot, R deki bütün dizilerin C_G ile gösterilen lineer alt uzayından R ye tanımlı lineer bir G fonksiyonudur. Eğer $\alpha \in C_G$ ve $G(\alpha)=\ell$ oluyorsa $\alpha=(\alpha_k)$ dizisi ℓ ye G-yakınsaktır denir. Özel olarak bütün yakınsak dizilerin c lineer uzayı üzerinde $\lim \alpha = \lim_k \alpha_k$ limit fonksiyonu lim bir dizisel yakınsaklık metodudur. Diğer taraftan Çakallı, dizisel yakınsaklık metodu kullanarak kompaktlık ([13]) ve bağlantılılık ([20]) kavramlarını genelleştirmiştir (bkz [26] ve [39]).

Son yıllarda aynı fikri kullanarak birçok süreklilik çeşidi tanıtılmış ve araştırılmıştır. Bu süreklilik çeşitlerinin bazıları şunlardır: Slowly oscillating süreklilik ([14] ve [45]), quasi- slowly oscillating süreklilik ([11]), $\Delta-$quasi- slowly oscillating süreklilik ([21] ve [19]), ward süreklilik ([16] ve [6]), $\delta-$ward süreklilik ([15]), δ^2-ward süreklilik ([4]), lacunary istatistiksel delta 2 ward süreklilik ([49]), istatistiksel ward süreklilik ([17] ve [18]), boşluklu istatistiksel ward süreklilik ([9]), $\rho-$istatistiksel ward süreklilik ([8]), $\lambda-$istatistiksel ward süreklilik ([28]) ve N_θ-ward süreklilik ([7],[24],[25],[35],[36]). Bu tür süreklilik kavramlarını araştıran yazarlar yukarıdaki anlamdaki diziler açısından reel değerli bir fonksiyonun düzgün yakınsaklığı ile ilgili teoremlerle ilgilenirken fonksiyonun tanım kümesi üzerine şartlar koyarak teoremler elde etmişlerdir.([45] teo 6), ([16] teo 7), ([6] teo 1).

Kuvvetli boşluklu yakınsaklık ya da N_θ yakınsaklık kavramı Freedman, Sember ve M.Raphael tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır ([33]). $\theta=(k_r)$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi, $h_r: k_r-k_{r-1}\to\infty\ (r\to\infty)$ ve $I_r=(k_{r-1},k_r]$ olsun. (α_k) reel terimli bir dizi olmak üzere eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|\alpha_k-L|=0 \quad \text{oluyorsa} \quad (\alpha_k)$$

dizisi $L\in R$ ye N_θ yakınsaktır denir ve $N_\theta-\lim\alpha_k=L$ ile gösterilir. Bu makale boyunca $\liminf_r \frac{k_r}{k_{r-1}}>1$ kabul edilecektir. $\sum_{k_{r-1}+1}^{k_r}|\alpha_k|$ gibi toplamlarla da sık sık karşılaşılacak ve bunun yerine $\sum_{k\in I_r}|\alpha_k|$ yazılacaktır.

Bu makalenin amacı N_θ^2 ward süreklilik kavramını tanıtmak ve ilgili teoremleri ispatlamaktır.

2. N_θ^2- WARD SÜREKLİLİK (N_θ^2- WARD CONTINUITY)

R nin bir A altkümesinde tanımlı bir fonksiyon A daki dizilerin N_θ yakınsaklığını koruyorsa, yani (α_k) A da N_θ yakınsak bir dizi iken $(f(\alpha_k))$da N_θ yakınsak oluyorsa f e kuvvetli boşluklu süreklidir denir. R nin bir A altkümesinde tanımlı bir fonksiyonun kuvvetli boşluklu sürekli olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun bilinen anlamda sürekli olmasıdır.
Eğer $(\Delta\alpha_k)$ sıfıra N_θ yakınsak ise (α_k) dizisine kuvvetli boşluklu quasi-Cauchy ya da N_θ-quasi-Cauchy denir ([7, 24]). A kümesinde tanımlı bir fonksiyon A daki N_θ-quasi- Cauchy dizilerini

koruyorsa, yani; (α_k) A da N_θ-quasi- Cauchy iken $(f(\alpha_k))$da N_θ-quasi- Cauchy oluyorsa f e kuvvetli boşluklu ward süreklidir yada N_θ-ward süreklidir denir ([24]). Eğer $(\Delta\alpha_k)$ N_θ-quasi-Cauchy ise yani, $\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\Delta^2\alpha_k\right| = 0$ oluyorsa (α_k) dizisine kuvvetli boşluklu $\delta-$quasi-Cauchy ya da N_θ-δ-quasi- Cauchy denir ([10]). Burada $\forall k\in Z$ için , $\Delta^2\alpha_k = \alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1} + \alpha_k$ dır. R deki N_θ-quasi- Cauchy dizilerinin ve N_θ-δ-quasi- Cauchy dizilerinin kümesi sırasıyla ΔN_θ ve $\Delta^2 N_\theta$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1. (α_k) Rde bir dizi olmak üzere $(\Delta^2(\alpha_k))$ bir N_θ-quasi- Cauchy dizisi ise yani,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\Delta^3\alpha_k\right| = 0$$

oluyorsa (α_k) ya N_θ^2-quasi- Cauchy ya da kuvvetli boşluklu δ^2-quasi- Cauchy denir. Burada her pozitif $k$tamsayısı için $\Delta^3\alpha_k = \alpha_{k+3} - 3\alpha_{k+2} + 3\alpha_{k+1} - \alpha_k$ dır.

İki N_θ^2-quasi- Cauchy dizisinin toplamı N_θ^2-quasi- Cauchydir ve her sabit $\lambda\in R$ için (α_k) N_θ^2-quasi- Cauchy ise $(\lambda\alpha_k)$ yine N_θ^2-quasi-Cauchydir. Bu nedenle N_θ^2-quasi- Cauchy dizilerinin kümesi, yakınsak dizilerin vektör uzayını kapsayan bir vektör uzayıdır. Yani, bütün yakınsak dizilerin vektör uzayı, N_θ^2-quasi-Cauchy dizilerinin vektör uzayının bir alt uzayıdır. Diğer yandan bütün yakınsak dizilerin vektör uzayı, aynı zamanda bütün N_θ-quasi- Cauchy dizilerinin vektör uzayının bir alt uzayıdır ve N_θ-quasi- Cauchy dizilerinin vektör uzayı da N_θ^2-quasi- Cauchy dizilerinin bir alt uzayıdır.

Şimdi bu ilişkinin önemini gösteren birkaç ilginç örnek verelim.

Örnek 2.2. n pozitif bir tamsayı olsun. Herkesin rastgele ve aynı anda seçildiği n kişiden oluşan bir grup alalım. $n_1 < n$ olmak üzere gruptan n_1 sayıda kişi ayrılıyor ve kalan insanlar yeni bir grup oluşturuyor. Daha sonra $n_2 < n$ olmak üzere gruptan n_2 sayıda kişi ayrılıyor ve kalanlarla yeni bir grup oluşturuluyor. Bu işlem grupta bir kişi kalana kadar ya da hiç kimse kalmayana kadar devam ediyor. Bu iterasyonun sonunda n kişilik bir grupta bir kişinin kalma ihtimalini α_n ile gösterirsek $(\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_n,...)$ bir N_θ^2-quasi-Cauchy dizisidir ([46]).

Örnek 2.3. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, k kişinin bulunduğu bir grup, üç alt gruba ayrılıyor. Herbir kişi seçimi bağımsız ve rastgele yapılıyor. Gruplardaki kişi sayıları k_1,k_2,k_3 olmak üzere $k_1+k_2+k_3 = k$ dır. Alt grupların her biri yeniden üç alt gruba ayrılıyor ve bu işlem, alt gruplarda hiç kimse kalmayana kadar ya da bir kişi kalana kadar, devam ediyor. Bu iterasyonun sayısını α_k ile gösterirsek, $\left(\alpha_1,\frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{3},...,\frac{\alpha_n}{n},...\right)$ dizisi sınırlı, yakınsak olmayan bir N_θ^2-quasi-Cauchy dir. ([37])

Şimdi Rnin bir alt kümesinin N_θ-δ^2-ward
kompaktlığı tanımını verelim.

Tanım 2.4. Rnin bir A alt kümesinin noktalarından oluşan her dizi N_θ-δ^2-quasi-Cauchy alt dizisine sahipse yani, A daki bir $\alpha =$ (α_k) dizisinin $N_\theta - \lim_{k\to\infty}\Delta^3\beta_k = 0$ olacak şekilde bir $\beta = (\beta_k) = (\alpha_{k_k})$alt dizisi varsa A kümesine kuvvetli boşluklu δ^2 ward (ya da N_θ-δ^2-ward) kompakttır denir.

Öncelikle şunu söyleyelim ki Rnin her sonlu alt kümesi N_θ-δ^2-ward kompakttır, Rnin N_θ-δ^2-ward kompakt alt kümelerinin sonlu birleşimleri ve herhangi arakesitleri de N_θ-δ^2-ward kompakttır. Rnin N_θ-δ^2- ward kompakt alt kümelerinin sonlu toplamları ve her sabit $\lambda\in R$ için λA çarpımı Rnin N_θ-δ^2- ward kompakt bir alt kümesidir. Üstelik N_θ-δ^2- ward kompakt bir kümenin her alt kümesi ve Rnin sınırlı her alt kümesi de N_θ-δ^2- ward kompakttır. Rnin her kompakt alt kümesi de N_θ-δ^2- ward kompakttır fakat karşıtı doğru değildir. Örneğin, sınırlı her açık aralık N_θ-δ^2- ward kompakttır fakat kompakt değildir. Diğer yandan N doğal sayılar kümesi N_θ - δ^2 - ward kompakt değildir. Dikkat edelim ki R nin her slowly oscillating kompakt alt kümesi N_θ - δ^2 - ward kompakttır (slowly oscillating kompaktlık üzerindeki sonuçlar için [14] ve [21] e bkz.) ve R nin quasi- slowly oscillating kompakt alt kümesi N_θ - δ^2 - ward kompakttır. Eğer A daki bir $\alpha = (\alpha_n)$ dizisinin bir quasi- slowly oscillating $\beta = (\beta_{n_k})$ alt dizisi varsa A ya quasi- slowly oscillating kompakttır denir ([11]).

Belirtelim ki R nin kapalı bir E alt kümesi N_θ - ward kompakt ise E aynı zamanda N_θ - δ^2 - ward kompakttır ve E deki her dizi $(P_{n,s})$- mutlak hemen hemen yakınsak bir alt diziye sahiptir ([30], [40], [47], [48]).

Şimdi N_θ^2 – ward süreklilik tanımını verelim.

Tanım 2.5. R nin bir A alt kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu A daki N_θ - δ^2 -quasi-Cauchy dizilerini koruyorsa yani, (α_k) A da bir N_θ - δ^2 - quasi-Cauchy iken $(f(\alpha_k))$ da N_θ - δ^2 -quasi-Cauchy oluyorsa f e N_θ^2 – ward süreklidir ya da kuvvetli boşluklu δ^2 -ward süreklidir denir.

Eğer f ve g A üzerinde N_θ - δ^2 -ward sürekli iki fonksiyon ise $f + g$ de A üzerinde N_θ - δ^2 -ward süreklidir. f N_θ - δ^2 -ward sürekli iken, $\lambda \in R$ keyfi bir sabit olmak üzere λf de N_θ - δ^2 -ward süreklidir. Bu nedenle N_θ - δ^2 -ward sürekli fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır. Şunu belirtelim ki N_θ - δ^2 -ward sürekli fonksiyonların çarpımı N_θ - δ^2 -ward sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x) = x$ olarak tanımlanan fonksiyon N_θ - δ^2 -ward sürekli olmasına rağmen $f(x).f(x) = x^2$ N_θ - δ^2 -ward sürekli değildir.

Teorem 2.6. f R nin bir A alt kümesi üzerinde N_θ - δ^2 -ward sürekli ise f A üzerinde N_θ -ward süreklidir.

İspat. Kabul edelim ki f A da N_θ - δ^2 -ward sürekli olsun. (α_n)de A da bir N_θ -quasi-Cauchy olsun. Bu durumda $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_n, \alpha_n, ...)$ dizisi de N_θ -quasi-Cauchydir. Dolayısıyla N_θ - δ^2 - quasi-Cauchydir. f N_θ - δ^2 -ward sürekli olduğundan,

$(f(\alpha_1), f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n), f(\alpha_n), ...)$ dizisi N_θ - δ^2 - quasi-Cauchydir. Buradan $(f(\alpha_n))$ dizisinin N_θ -quasi-Cauchy olduğu elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 2.7. Eğer f R nin bir A alt kümesi üzerinde N_θ - δ^2 -ward sürekli ise bu taktirde f A da süreklidir.

İspat. İspat teorem 2.6. dan ve [25, Sonuç 3] den kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 2.8. N_θ - δ^2 -ward sürekli iki fonksiyonun bileşkesi yine N_θ - δ^2 -ward süreklidir. Yani, f ve g R de N_θ - δ^2 -ward sürekli ise gof de N_θ - δ^2 - ward süreklidir.

İspat. f ve g R de N_θ - δ^2 -ward sürekli iki fonksiyon ve (α_n) R de N_θ - δ^2 -quasi-Cauchy dizisi olsun. f, N_θ - δ^2 -ward sürekli olduğundan $(f(\alpha_n))$ N_θ - δ^2 -quasi-Cauchydir. g, N_θ - δ^2 - ward sürekli olduğundan $g\,(f(\alpha_n))$ de N_θ - δ^2 - quasi-Cauchydir. Bu da ispatını tamamlar.

Dikkat edilmeli ki herhangi bir N_θ - δ^2 -ward sürekli fonksiyon, istatistiksel süreklidir, N_θ - süreklidir, her aşikar olmayan kabul edilebilir (non-trivial admissible) I ideali için I-dizisel süreklidir ve herhangi regüler altdizisel G dizi metodu için G-dizisel süreklidir.

Teorem 2.9. R nin N_θ - δ^2 -ward kompakt bir alt kümesinin N_θ - δ^2 -ward sürekli görüntüsü N_θ - δ^2 -ward kompakttır.

İspat . Kabul edelim ki A R nin N_θ - δ^2 -ward kompakt bir alt kümesi , f **,** A da N_θ - δ^2 -ward sürekli bir fonksiyon ve (β_n) de $f(A)$ da herhangi bir dizi olsun. $\forall n \in N$ için $\alpha_n \in A$ olmak üzere $\beta_n = f(\alpha_n)$ diyelim. A , N_θ - δ^2 -ward kompakt olduğundan (α_n) in öyle bir $(\gamma_k) = (\alpha_{n_k})$ alt dizisi vardır ki $N_\theta - \lim_{k\to\infty} \Delta^3 \gamma_k = 0$ dır. $(t_k) = (f(\gamma_k))$ yazalım. f N_θ - δ^2 -ward sürekli olduğundan $(f(\gamma_k))$ N_θ - δ^2 -quasi-Cauchydir. Böylece $(f(\alpha_n))$ in $N_\theta - \lim_{k\to\infty} \Delta^3 t_k = 0$ olacak şekilde bir (t_k) alt dizisini elde ederiz. O halde
$f(A)$ N_θ - δ^2 -ward kompakttır.

Sonuç 2.10. R nin G-dizisel bağlantılı her alt kümesinin N_θ - δ^2 -ward sürekli görüntüsü de G-dizisel bağlantılıdır.

İspat önceki teorem ve $[20, \text{teorem } 1]$ den elde edilebilir.

Sonuç 2.11. R nin sınırlı her alt kümesinin N_θ - δ^2 -ward sürekli görüntüsü de sınırlıdır.
İspat $[7, \text{teorem } 3.3]$ elde edilebilir.

Sonuç 2.12. G, regüler alt dizisel (subsequential) bir metot olmak üzere R nin G-alt dizisel kompakt bir alt kümesinin N_θ - δ^2 -ward sürekli görüntüsü N_θ - δ^2 -ward kompakttır.

İdeal süreklilikte ise her N_θ - δ^2 -ward sürekli fonksiyon, kabuledilebilir (admissible) bir I ideali için, I-dizisel süreklidir ([23]). $[24, \text{teorem } 1]$ den elde edilir ki, eğer f R nin bir A alt kümesinde düzgün sürekli ise A daki bir (α_k) dizisi quasi-Cauchy iken $(f(\alpha_k))$ N_θ - δ^2 - quasi-Cauchydir.

İyi bilinen bir sonuçtur ki sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün limiti süreklidir. Bu durum N_θ - δ^2 -ward süreklilik için de doğrudur; yani, N_θ - δ^2 - ward sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün limiti de N_θ - δ^2 -ward süreklidir.

Teorem 2.13. Eğer (f_n) R nin bir A alt kümesinde tanımlı N_θ - δ^2 - ward sürekli fonksiyonların bir dizisi ve (f_n) f e düzgün yakınsak ise f A üzerinde N_θ - δ^2 - ward süreklidir.

İspat . (α_k) A da N_θ - δ^2 - quasi-Cauchy ve $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) düzgün yakınsak olduğundan, öyle bir $n_1 \in N$ vardır ki $n \geq n_1$ ve $\forall x \in A$ için $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{9}$ dur. f_{n_1} A da N_θ - δ^2 - ward sürekli olduğundan öyle bir $n_2 \in N$ vardır ki $r \geq n_2$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|f_{n_1}(\alpha_{k+3}) - 3f_{n_1}(\alpha_{k+2}) + 3f_{n_1}(\alpha_{k+1}) - f_{n_1}(\alpha_k)\right| < \frac{\varepsilon}{9}$$

kalır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dersek $r \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|f(\alpha_{k+3}) - 3f(\alpha_{k+2}) + 3f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right| \\
&= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\Big|f(\alpha_{k+3}) - 3f(\alpha_{k+2}) + 3f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k) \\
&\qquad - \big[f_{n_1}(\alpha_{k+3}) - 3f_{n_1}(\alpha_{k+2}) \\
&\qquad + 3f_{n_1}(\alpha_{k+1}) - f_{n_1}(\alpha_k)\ \big] \\
&\qquad + \big[\ f_{n_1}(\alpha_{k+3}) - 3f_{n_1}(\alpha_{k+2}) \\
&\qquad + 3f_{n_1}(\alpha_{k+1}) - f_{n_1}(\alpha_k)\ \big]\Big| \\
&\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|f(\alpha_{k+3}) - f_{n_1}(\alpha_{k+3})\right| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}3\left|f(\alpha_{k+2}) - f_{n_1}(\alpha_{k+2})\right| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}3\left|f(\alpha_{k+1}) - f_{n_1}(\alpha_{k+1})\right| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|f(\alpha_k) - f_{n_1}(\alpha_k)\right| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|f_{n_1}(\alpha_{k+3}) - 3f_{n_1}(\alpha_{k+2}) + 3f_{n_1}(\alpha_{k+1}) - f_{n_1}(\alpha_k)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\Big|f(\alpha_{k+3}) - 3f(\alpha_{k+2})$$

$$+3f_{n_1}(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\ \Big| = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.14. R nin A alt kümesin üzerindeki N_θ - δ^2-ward sürekli fonksiyonların kümesi, A daki sürekli fonksiyonların kümesinin kapalı bir alt kümesidir. Yani, $\overline{\Delta^3 N_\theta(A)}$, $\Delta^3 N_\theta(A)$ nın tüm kapanış noktalarının kümesi olmak üzere $\overline{\Delta^3 N_\theta(A)} = \Delta^3 N_\theta(A)$ dır.

İspat . $f \in \overline{\Delta^3 N_\theta(A)}$ olsun. Bu durumda $\Delta^3 N_\theta(A)$ da öyle bir (f_n) dizisi vardır ki $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dir. Teorem 2.13 deki ispat yöntemine benzer yol izlenerek $f \in \Delta^3 N_\theta(A)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada N_θ^2- quasi-Cauchy dizisi kavramı tanıtıldı ve incelendi. Ayrıca N_θ^2-ward-sürekliliğin diğer tipten süreklilikler ile olan ilişkisi verilip ilginç teoremler ispatlandı. Bu çalışmanın dinamik sistemler, bilgisayar, bilişim teori, biyolojik bilimler gibi birçok alanda ortaya çıkan çeşitli problemlerin modellenmesinde bir araç olarak kullanılabileceği umulmaktadır. Daha ileri bir çalışma için, fuzzy noktaları ya da soft noktaların N_θ^2- quasi-Cauchy dizileri (ilgili kavramlar ve tanımlar için bkz [22], [2], [32]) ve N_θ^2- quasi-Cauchy çift dizilerinin (bkz [27], [31], [41], [38], ve [50]) araştırılması önerilebilir. Daha da ilerisi için, koni normlu uzaylardaki N_θ^2- quasi-Cauchy dizileri incelenebilir (koni metrik değerli topolojik vektör uzaylardaki ve koni normlu uzaylardaki temel kavramlar için bkz [29] *ve* [44]). Fakat tanımlar ve ispat metotları, kurulumdaki değişiklikler nedeniyle, bu çalışmadakilerle benzer olmayacaktır.

BİLGİLENDİRME

Bu makaledeki bazı sonuçlar, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2017) May 11-15, 2017 Palm Wings Ephesus Resort Hotel, Kuşadası-Aydın, TURKEY de sunulmuştur.

REFERANSLAR

[1] J. Antoni, and T. Salat, “ On the A-continuity of real functions ’’, Acta Math. Univ. Comenian, vol. 39, pp. 159-164, 1980.
[2] C.G. Aras, A. Sonmez, H. Çakallı, “ An approach to soft functions ’’, J. Math. Anal., vol. 8, no.2, pp. 129-138
[3] J. Borsik, and T. Salat, “ On F-continuity of real functions’’, Tatra Mt. Math. Publ., vol. 2, pp. 37-42, 1993.
[4] Naim L. Braha, H. Cakalli, “ A new type continuity for real functions’’,J. Math. Anal., vol.7, no. 6, pp. 68-76, 2016.
[5] R.C. Buck, “ Solution of problem 4216’’, Amer. Math. Monthly, vol.55, pp. 36, 1948.
[6] D. Burton, and J. Coleman, “ Quasi-Cauchy Sequences’’, Amer. Math. Monthly, vol.117, no. 4, pp. 328-333, 2010.
[7] H. Cakalli, “ N_θ-ward continuity’’, Abstr. Appl. Anal. 2012 Article ID 680456, 8 pages. 2012.
[8] H. Cakalli, “ A Variation on Statistical Ward Continuity ’’, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. DOI10.1007/s40840-015-0195-0
[9] H. Çakalli, C.G. Aras, and A. Sonmez, “ Lacunary statistical ward continuity’’ , AIP Conf. Proc.1676 Article Number: 020042 doi: 10.1063/1.4930468, 2015.
[10] H. Cakalli, and H. Kaplan, “ Strongly lacunary delta ward continuity”, AIP Conf. Proc. 1676, Article Number:020063 http://dx.doi.org/10.1063/1.4930489, 2015.
[11] I. Canak, and M. Dik, “ New Types of Continuities’’, Abstr. Appl. Anal. Article ID 258980, 6 pages. doi:10.1155/2010/258980, 2010.
[12] J. Connor, and K.-G. Grosse-Erdmann, “ Sequential defnitions of continuity for real functions’’, Rocky Mountain J. Math., vol.33, no. 1 , pp. 93-121, 2003.
[13] H. Çakallı, “ Sequential defnitions of compactness’’, Appl. Math. Lett., vol.21, no. 6, pp 594-598, 2008.
[14] H. Çakallı, “ Slowly oscillating continuity’’, Abstr. Appl. Anal. 2008 ,Article ID 485706, 5 pages. doi:10.1155/2008/485706, 2008.
[15] H. Çakallı, “δ -quasi-Cauchy sequences’’, Math. Comput. Modelling, vol.53, no.1-2, pp. 397-401, 2011.

[16] H. Çakallı, " Forward continuity'' , J. Comput. Anal. Appl. vol.13, no.2, pp. 225-230, 2011.
[17] H. Çakallı, " Statistical ward continuity'', Appl. Math. Lett. Vol. 24, no. 10, pp. 1724- 1728, 2011.
[18] H. Çakallı, " Statistical-quasi-Cauchy sequences'', Math. Comput. Modelling, vol.54, no. 5-6 , pp. 1620-1624, 2011.
[19] H. Çakallı, " On Δ -quasi-slowly oscillating sequences'' , Comput. Math. Appl.vol. 62 no. 9, pp. 3567-3574, 2011.
[20] H. Çakallı, " Sequential defnitions of connectedness'', Appl. Math. Lett. Vol.25, no. 3 pp. 461-465, 2012.
[21] H. Çakallı, I. Canak, M. Dik, "Δ -quasi-slowly oscillating continuity'', Appl. Math. Comput.,vol. 216, no. 10, pp. 2865-2868, 2010.
[22] H. Çakallı, and Pratulananda Das, "Fuzzy compactness via summability'' , Appl. Math. Lett. vol. 22 , no.11, pp. 1665-1669, 2009.
[23] H. Çakallı, and B. Hazarika, " Ideal Quasi-Cauchy sequences'', J. Inequal. Appl. 2012: 234. doi:10.1186/1029-242X-2012-234, 2012.
[24] H. Çakallı, and H. Kaplan, " A study on N_θ -quasi-Cauchy sequences'' , Abstr. Appl. Anal. ArticleID836970,4pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/836970
[25] H. Cakalli and H. Kaplan, "A variation on strongly lacunary ward continuity'', J. Math. Anal.vol. 7, no. 3 , pp. 13-20, 2016.
[26] H. Çakallı, and O. Mucuk, " connectedness via a sequential method'' , Rev. Un. Mat. Argentina, vol. 54 , no.2, pp. 101-109, 2013.
[27] H. Çakallı, and E. Savas, "Statistical convergence of double sequences in topological , J. Comput. Anal. Appl. , vol.12, no.2, pp. 421-426, 2010.
[28] H. Çakallı, A. Sonmez, and C.G. Aras, "λ -statistically ward continuity'', An. Stiint.Univ. Al.I. Cuza Iasi. Mat.,vol. 63, no. 2, pp.313- 322, 2017. DOI: 10.1515/aicu-2015-0016
[29] H. Çakallı, A. Sonmez, and Ç. Genç, " On an equivalence of topological vector space valued cone metric spaces and metric spaces'', Appl. Math. Lett., vol.25, no.3, pp. 429- 433, 2012.
[30] H. Çakalli, and E.I. Taylan," On Absolutely Almost Convergence'', An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.) DOI: https://doi.org/10.2478/aicu-2014-0032 .
[31] A. Esi, " Asymptotically double lacunary equivalent sequences defined by Orlicz functions'', Acta Scientiarum-Technology, vol.36, no.2, pp 323-329, 2014.
[32] A. Esi, M. Acikgoz, "On almost lambda-statistical convergence of fuzzy numbers'', Acta Scientiarum-Technology, vol.36, no.1, pp.129-133, 2014.
[33] A.R. Freedman, J.J. Sember, and M. Raphael, "Some Cesaro-type summability spaces'', Proc.London Math. Soc., vol.3, no. 37, pp. 508-520, 1978.
[34] G. Das, and E. Sava_s, "On the A-continuity of real functions'', Istanbul Univ. Fen Fak. Mat Derg. Vol.53, pp.61-66, 1994.
[35] H. Kaplan, H. Cakalli, "Variations on strongly lacunary quasi Cauchy sequences'', AIP Conf. Proc., vol.1759, no. 020051, 2016 . doi: 10.1063/1.4959665
[36] H. Kaplan, H. Cakalli, "Variations on strong lacunary quasi-Cauchy sequences'', J. Nonlinear Sci. Appl. vol.9, pp. 4371-4380, 2016.
[37] M. Keane, " Understanding Ergodicity'', Integers 11B. 1-11, 2011.
[38] D. Djurcic, Ljubia D.R. Kocinac, M.R. Zizovic, " Double Sequences and Selections'', Abstr. Appl. Anal. Article ID:497594, 6 pp. 2012. DOI: 10.1155/2012/497594,
[39] O. Mucuk, T. Sahan, " On G-Sequential Continuity'', Filomat, vol.28, no.6, pp1181- 1189, 2014.
[40] H. S. Ozarslan, and Ş. Yıldız, " A new study on the absolute summability factors of Fourier series'', J. Math. Anal. vol.7, no. 2, pp.31-36, 2016.
[41] R.F. Patterson and H. Cakalli, " Quasi Cauchy double sequences'', Tbilisi Mathematical Journal, vol. 8, no.2, pp. 211-219, 2015.
[42] E.C. Posner, " Summability preserving functions'', Proc.Amer.Math.Soc. vol.12, pp.73-76, 1961.
[43] E. Spigel, and N. Krupnik, " On the A-continuity of real functions'', J. Anal. vol. 2, pp.145- 155, 1994.
[44] A. Sonmez, and H. Çakalli, " Cone normed spaces and weighted means'', Math. Comput. Modelling, vol. 52, no. 9-10, pp.1660-1666, 2010.
[45] R.W. Vallin, " Creating slowly oscillating sequences and slowly oscillating continuous functions'', With an appendix by Vallin and H. Cakalli, Acta Math. Univ. Comenianae, vol. 25 no.1, pp.71-78, 2011.
[46] P. Winkler, " Mathematical Puzzles: A Connoisseurs Collection'', A.K.Peters LTD,

ISBN 1-56881-201-9, 2004.
[47] Ş. Yıldız, “ A new theorem on local properties of factored Fourier series’’, Bull. Math. Anal. Appl., vol. 8, no. 2, pp.1-8, 2016.
[48] Ş. Yıldız, “ On Absolute Matrix Summability Factors of Infnite Series and Fourier Series’’, Gazi University Journal of Science, vol.30, no.1, pp. 363-370, 2017.
[49] Ş. Yıldız, “Istatistiksel boşluklu delta 2 quasi Cauchy dizileri”, Sakarya University Journal of Science, vol. 21, no. 6, pp.1408-1412, (2017). DOI: 10.16984/saufenbilder.336128 , http://www.saujs.sakarya.edu.tr/issue/26999/336128
[50] R.F. Patterson, F. Nuray, M. Basarir, “Inclusion theorems of double Deferred Cesar means II”, Tbilisi Mathematical Journal, vol. 9, no.2, pp. 15-23, 2016. **DOI:** 10.1515/tmj-2016-0016