Marmara Üniversitesi

İ.İ.B.F. Dergisi

YIL 2010, CİLT XXIX, SAYI II, S. 577-590

ÇOK DEĞİŞKENLİ MARKOV ZİNCİRİ MODELİ VE BİR UYGULAMA

Ersoy ÖZ[*]
Semra ERPOLAT[**]

Özet

Markov zincirleri pek çok uygulama alanına sahip olan stokastik süreçlerdir. Markov zincirlerinde incelenen sisteme ait veriler tek kaynaktan gelmektedir. Çok değişkenli Markov zinciri modeli ise aynı kaynak veya benzer kaynaklar tarafından üretilen çoklu kategorik veri dizilerinin davranışını göstermek amacı ile kullanılan bir modeldir. Bu çalışmada Markov zincirleri üzerine kurulu olan çok değişkenli Markov zinciri modeli teorik açıdan detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Uygulama olarak ise dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimler ile İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinde oluşan aylık değişimler iki kategorik dizi olarak ele alınıp bu dizilerin birbirlerini ne oranda etkiledikleri çok değişkenli Markov zinciri modeli ile ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: *Markov zinciri, Kategorik Veri Dizileri, Çok Değişkenli Markov Zinciri.*

MULTIVARIATE MARKOV CHAIN MODEL AND AN APPLICATION

Abstract

Markov chains are stochastic processes with a wide range of application areas. In Markov chains, the examined data that belong to the system comes from a single source. Multivariate Markov chain model is used to show the behavior of the multi categorical data sequences that were produced by the same source or by similar sources. In this study, multivariate Markov chain model, which is based on Markov chains, is theoretically explained in detail. As the application, the monthly changes of the US Dollar buying rates and the monthly changes of the ISE National 100 Index values are taken into consideration as two categorical sequences and it is revealed with multivariate Markov chain model to what degree these sequences affect each other.

[*] Öğr. Gör. Dr. Yıldız Teknik Üniversitesi Meslek Yüksekokulu, Teknik Programlar Bölümü, e-mail: ersoyoz@yildiz.edu.tr

[**] Yard. Doç. Dr. Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, e-mail: serpolat@msu.edu.tr

Key Words: *Markov Chain, Categorical Data Sequences, Multivariate Markov Chain.*

1. Giriş

Markov süreçleri ileride ortaya çıkması olası durumların gerçekleşme olasılıklarının, geçmiş verilerden değil, şu anki verilerden yararlanarak hesaplandığı süreçlerdir[1].

Bir Markov süreci, koşullu olasılık fonksiyonu "Markovyen Özellik (varsayım) "ı sağlayan bir stokastik süreçtir[2].

Markov süreçlerinin genel teorisi 1930 ve 1940'lı yıllarda geliştirilmiştir. Markov zincirleri hukuk (Stander ve diğerleri (1989)), pazarlama (Dura (2006)), sağlık hizmetleri (Romagnuolo (2002)), gelir dağılımı (Dardanoni (1995)), finans (Aytemiz ve Şengönül (2004), Rüzgar (2003)), bilgisayar yazılımı seçimi (Poore ve diğerleri (2000), Whittaker ve Poore (1993)), veri madenciliği (Guidici ve Castelo (2003)), üretim (Gevrek ve Şengüller (1992), Simkin (1982)), göç (Nielsen ve Wakeley (2001)), meteoroloji (Koçak ve Şen (1998)) başta olmak üzere bir çok alanda uygulanmakta ve yaygın olarak kullanılmaktadır.

Markov zinciri modellerinin kullanıldığı tüm uygulamalarda, veri tipine ve kurulan modele bağlı olarak gelecekte oluşacak durum dizisi (uzun dönem denge) olasılıkları, yutucu Markov zinciri analizleri veya markaların tercih olasılıkları ile ilgili sonuçlar elde edilmektedir. Elde edilen bu sonuçların tümü için kullanılan veriler tek kaynaktan gelmektedir. Örneğin, tüketicilerin meyve suyu marka tercihleri ile ilgili bir çalışma sadece tüketicilerin şu anda tercih ettikleri meyve suyu markaları ve bir sonraki tercih edecekleri meyve suyu markaları dikkate alınmaktadır. Çok değişkenli Markov zinciri modelinde ise birbirleri ile ilişkili veri dizileri dikkate alınmaktadır. Yani birbirleri ile bir korelasyona sahip veri dizileri kullanılmaktadır. Böylece gerçeğe daha yakın tahminler ortaya çıkmaktadır. Yukarıdaki örnek için, kullanıcıların meyve suyu tercihlerinde, diğer içeceklerin de (soda, gazoz, ayran v.s.) rol oynadığı dikkate alındığında daha gerçekçi sonuçlar ortaya çıkacağı aşikârdır. İşte bu noktada çok değişkenli Markov zinciri modelinin kullanılması farklı bir bakış açısı oluşturmaktadır.

Çok değişkenli Markov zinciri modelinin teorisi son on yıl içerisinde geliştirilmiş olup, uygulama alanındaki çalışmaların sayısı oldukça azdır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde öncelikle Markov zinciri tanımlanarak çok değişkenli Markov zinciri modeli detaylı bir biçimde teorik açıdan ele alınacaktır. Üçüncü bölümde kategorik dizi olarak dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimler ve İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinde oluşan aylık değişimler kullanılarak çok değişkenli Markov zinciri modeli oluşturulacaktır. Modeli oluşturan iki dizinin aylık olarak izlenen değişim değerlerinin birbirlerini belli bir oranda

[1] R.I. Levin ve diğerleri, **Quantitave Approaches to Management**, Fifth Edition, Tokyo, Mc-Graw-Hill, 1982, s.47

[2] Sheldon M. Ross, **Introduction to Probability Models**, 10^{th} Edition, United States of America, Academic Press, 2009, s.192

etkileyeceği varsayımı ile etkileme oranları belirlenecektir. Son bölümde ise elde edilen çok değişkenli Markov zinciri modeli ile ilgili yorumlar yapılacaktır.

2. Çok Değişkenli Markov Zinciri

2.1. Markov Zinciri

Bir tesadüfi deneyin bütün mümkün sonuçlarını içeren kümeye örnek uzay denir[3]. Bir örnek uzayındaki her bir olayı reel sayılara tasvir eden fonksiyona tesadüfi değişken adı verilir[4].

Kesik zamanlı bir stokastik süreç, $t \in N = \{0,1,2,...\}$ parametreleri ile indekslenen ve verilen bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı tesadüfi değişkenlerin $\{X_t, t \in N\}$ bir ailesidir. Bir Markov süreci bir stokastik süreçtir ve koşullu olasılık dağılım fonksiyonu "Markovyen Özellik" olarak adlandırılan özelliği gerçekler. Markov sürecinin durum uzayı kesikli ise Markov süreci kesik zamanlı bir stokastik süreç olur ve bir Markov Zinciri (MZ) olarak adlandırılır.

Genel olarak kategorik bir veri dizisi $x_1, x_2, x_3, ..., x_T$ vektörlerinin bir dizisi ile gösterilir. Bu ifadede yer alan T indisi dizinin genişliğidir. Eğer süreç k durumunda ise $x_i = e_k$'dır (e_k Girdi için birim vektördür). m sayıda kesikli durumlu birinci dereceden kesik zamanlı MZ aşağıda yer alan bağıntıyı sağlar:

$$P(x_{t+1} = e_{x_{t+1}} \,|\, x_0 = e_{x_0}, x_1 = e_{x_1}, ..., x_t = e_{x_t}) = P(x_{t+1} = e_{x_{t+1}} \,|\, x_t = e_{x_t}), x_i \in M.$$

(1)

$$P(x_{n+1} = e_{x_{n+1}} \,|\, x_n = e_{x_n})$$

(2)

(2) ifadesindeki koşullu olasılık MZ'nin tek adım geçiş olasılıkları olarak adlandırılır. Bu olasılıklar zaman parametresi n'den $n+1$'e geçtiğinde i durumundan j durumuna geçişin koşullu olasılıklarını verir. Ayrıca bu olasılıklar n zaman parametresinden bağımsızdır ve aşağıdaki biçimde yazılır:

$$p_{ij} = P(x_{n+1} = e_i \,|\, x_n = e_j), \forall i, j \in M.$$

(3)

---

[3] Tuncay Can, **Sektörler Arası İlişkilerin Markov Zincirleri ile Analizi ve Tahmini: Türkiye Örneği**, İstanbul, Derin Yayınları, 2006, s.3

[4] Sheldon M. Ross, **Stochastic Processes**, Second Edition, New York: Jhon Wiley & Sons Inc., 1996, s.7

p_{ij} elemanlarından oluşan P matrisi geçiş olasılıkları matrisidir ve aşağıda yer alan iki özelliği sağlar:

i. $0 \le p_{ij} \le 1, \ \forall i, j \in M$ (4)

ii. $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1, \ \forall j \in M.$ (5)

Öneri 1: P matrisinin 1'e eşit bir özdeğeri vardır ve P'nin tüm özdeğerleri 1'e eşit veya küçük eşittir[5].

Öneri 2: A matrisi m dereceli ve indirgenemeyen bir kare matris olsun. Bu durumda aşağıda yer alan üç ifade geçerlidir:

i. A, $\lambda = \max_k |\lambda_k(A)|$ olacak şekilde pozitif bir reel özdeğere sahiptir. Burada $\lambda_k(A)$, A'nın k. özdeğerini gösterir.

ii. $Az = \lambda z$ olacak biçimde girdileri reel ve pozitif olan bir z vektörü vardır.

iii. λ, A'nın basit bir özdeğeridir.

Yukarıda yer alan iki öneri kullanılarak, $Pz = z$ olacak biçimde pozitif bir z vektörünün olduğu söylenebilir. z vektörü sabit (durağan) olasılık vektörü olarak adlandırılır.

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = 1.$$

(6)

Ayrıca z_i, i durumundaki sistemin sabit durum olasılığıdır.

2.2. Çok Değişkenli Markov Zinciri Modelinin Yapısı

Çok değişkenli MZ modeli, aynı kaynak veya benzer kaynaklar tarafından üretilen çoklu kategorik dizilerin davranışını göstermek için kullanılan bir modeldir[6]. Her biri m adet durum içeren s adet kategorik dizi ve $x_n^{(k)}$, n

[5] Wai-Ki Ching ve diğerleri, "A Multivariate Markov Chain Model for Categorical Data Sequences and Its Applications in Demand Predictions", **IMA Journal of Management Mathematics**, Vol. 13, 2002, pp. 187-199.

[6] Jun-ichi Maskawa, "Multivariate Markov Chain Modeling for Stock Markets", **Physica A**, Vol. 324, 2003, pp. 317-322.

zamanında (anında) k. dizinin durum vektörü olsun. Eğer k. dizi n zamanında j durumunda ise aşağıda verilen eşitlik yazılabilir[7]:

$$x_n^{(k)} = e_j = (0,...,0,1,0,...,0)^T .$$

(7)

Çok değişkenli MZ modelinde aşağıda yer alan bağıntılar geçerlidir:

$$x_{n+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} P^{(jk)} x_n^{(k)}, \; j = 1,2,...,s$$

(8)

(8) ifadesinde yer alan parametreler aşağıda verilmiştir:

$$\lambda_{jk} \geq 0, \, 1 \leq j,k \leq s \text{ ve } \sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} = 1, \; j = 1,2,...,s.$$

(9)

$n+1$. adımda k. dizinin durum olasılık dağılımı $P^{(jk)} x_n^{(k)}$'nın ağırlıklı ortalamasına bağlıdır. Burada $P^{(jk)}$, k. dizinin durumlarından j. dizinin durumlarına geçiş olasılıklarıdır ve $x_n^{(k)}$, n. adımda k. dizinin durum olasılık dağılımıdır[8]. Matris formunda aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$x_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} P^{(11)} & \lambda_{12} P^{(12)} & \cdots & \lambda_{1s} P^{(1s)} \\ \lambda_{21} P^{(21)} & \lambda_{22} P^{(22)} & \cdots & \lambda_{2s} P^{(2s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s1} P^{(s1)} & \lambda_{s2} P^{(s2)} & \cdots & \lambda_{ss} P^{(ss)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(s)} \end{bmatrix} \equiv Qx_n$$

veya $x_{n+1} = Qx_n$

(10)

Öneri 3: $1 \leq j,k \leq s$ için eğer λ_{jk} >0 ise Q matrisi 1 değerli bir özdeğere sahiptir ve Q'nun özdeğerleri 1'e eşit veya küçük katsayılara sahiptir.

Öneri 4: $1 \leq j,k \leq s$ için λ_{jk} >0 ve $P^{(jk)}$'nın indirgenemeyen olduğu varsayılsın. Bu durumda $x = Qx$ ve

---

[7] Wai-Ki Ching ve diğerleri, "A New Multivariate Markov Chain Model with Applications to Sales Demand Forecasting", **International Conference on Industrial Engineering and Systems Management IESM 2007**, Beijing – China, May 30-June 2-2007, pp. 1-8.

[8] Shu-Qin Zhang ve diğerleri, "Construction and Control of Genetic Regulatory Networks: A Multivariate Markov Chain Approach", **J. Biomedical Science and Engineering**, Vol. 1, 2008, pp. 15-21.

$$\sum_{i=1}^{m}[x^{(j)}]_i = 1, 1 \le j \le s$$

(11)

olacak biçimde bir $x = [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}]^T$ vektörü vardır.

2.3. Model Parametrelerinin Tahminleri

Model parametrelerinin hesaplanabilmesi için her bir veri dizisinin geçiş olasılıkları matrisi hesaplanmalıdır. Bunun için ele alınan veri dizilerinde k. dizideki durumlardan j. dizideki durumlara geçiş frekansları sayılır. Böylece veri dizisi için geçiş frekansı matrisi oluşturulur. Geçiş frekansı matrisine normalizasyon işleminin uygulanması sonucunda ise geçiş olasılıkları matrisi elde edilir[9].

$f_{i_j i_k}^{(jk)}$, $\{x_n^{(k)}\}$ dizisindeki i_k durumundan $\{x_n^{(j)}\}$ dizisindeki i_j durumuna geçiş frekansını göstermek üzere geçiş frekansı matrisi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$F^{(jk)} = \begin{bmatrix} f_{11}^{(jk)} & f_{21}^{(jk)} & \cdots & f_{m1}^{(jk)} \\ f_{12}^{(jk)} & f_{22}^{(jk)} & \cdots & f_{m2}^{(jk)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1m}^{(jk)} & f_{2m}^{(jk)} & \cdots & f_{mm}^{(jk)} \end{bmatrix}.$$

(12)

Geçiş frekansı matrisi $F^{(jk)}$ kullanılarak geçiş olasılıkları matrisi $P^{(jk)}$ elde edilir.

$$\hat{P}^{(jk)} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{11}^{(jk)} & \hat{p}_{21}^{(jk)} & \cdots & \hat{p}_{m1}^{(jk)} \\ \hat{p}_{12}^{(jk)} & \hat{p}_{22}^{(jk)} & \cdots & \hat{p}_{m2}^{(jk)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_{1m}^{(jk)} & \hat{p}_{2m}^{(jk)} & \cdots & \hat{p}_{mm}^{(jk)} \end{bmatrix}$$

(13)

burada $\hat{p}_{i_j i_k}^{(jk)}$ değerlerinin hesaplanması için aşağıda yer alan bağıntı kullanılır:

[9] S-Qin Zhang ve diğerleri, "A Simplified Multivariate Markov Chain Model for the Construction and Control of Genetic Regulatory Networks", **Proceedings of the 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering**, Shanghai, China, 2008, pp. 569-572.

$$\hat{p}_{i_j i_k}^{(jk)} = \begin{cases} \dfrac{f_{i_j i_k}^{(jk)}}{\sum_{i_k=1}^{m} f_{i_j i_k}^{(jk)}}, & \sum_{i_k=1}^{m} f_{i_j i_k}^{(jk)} \neq 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

(14)

$P^{(jk)}$ için tahminler bulunduktan sonra λ_{jk} parametrelerinin hesaplanması gerekir. Çok değişkenli MZ, x ile gösterilen bir sabit (durağan) olasılık vektörüne sahiptir. x vektörü, her bir dizideki her bir durumun meydana gelme oranının hesaplanması ile tahmin edilebilir ve aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\hat{x} = (\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, \ldots, \hat{x}^{(s)})^T.$$

(15)

Ayrıca λ_{jk} parametreleri $P^{(jk)}$ matrisleri ve x sabit (durağan) olasılık vektörü ile ilgili uzun dönem denge vektörü ile ilgili olarak (16) ifadesi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}P^{(11)} & \lambda_{12}P^{(12)} & \cdots & \lambda_{1s}P^{(1s)} \\ \lambda_{21}P^{(21)} & \lambda_{22}P^{(22)} & \cdots & \lambda_{2s}P^{(2s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s1}P^{(s1)} & \lambda_{s2}P^{(s2)} & \cdots & \lambda_{ss}P^{(ss)} \end{bmatrix} \hat{x} \approx \hat{x}$$

(16)

(16) ifadesinden, $\lambda = \{\lambda_{jk}\}$ parametrelerinin tahmininde aşağıda verilen optimizasyon probleminin çözümü bir yöntem olarak verilebilir[10]:

$$\begin{cases} \min\limits_{\lambda} \max\limits_{i} \left| \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \hat{P}^{(jk)} \hat{x}^{(k)} - \hat{x}^{(j)} \right]_i \right| \\ \text{subject to} \sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} = 1, \text{and}\, \lambda_{jk} \geq 0, \ \forall k. \end{cases}$$

(17)

Her bir j için (17) ile ifade edilen problem s sayıda lineer programlama problemine dönüştürülür.

$B = [\hat{P}^{(j1)}\hat{x}^{(1)} \,|\, \hat{P}^{(j2)}\hat{x}^{(2)} \,|\, \ldots \,|\, \hat{P}^{(js)}\hat{x}^{(s)}]$ olmak üzere model aşağıdaki biçimde yazılabilir[11]:

[10] Dongmei Zhu- Wai-Ki Ching, "A New Estimation Method for Multivariate Markov Chain Model with Application in Demand Predictions", **The 3rd International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering (BIFE 2010)**, Hong Kong, August 13-15-2010, pp. 126-130.

[11] Wai-Ki Ching- Michael K. Ng, **Markov Chains: Models, Algorithms and Applications**, United States of America, Springer Science+Business Media, Inc., 2006, s. 146

Amaç fonksiyonu: $\min w_j$

(18)

$$\text{Kısıtlar:}\begin{cases}\begin{pmatrix} w_j \\ w_j \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} \geq \hat{x}^{(j)} - B\begin{pmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \\ \vdots \\ \lambda_{js} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} \geq -\hat{x}^{(j)} + B\begin{pmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \\ \vdots \\ \lambda_{js} \end{pmatrix} \\ w_j \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_{jk} = 1, \ \lambda_{jk} \geq 0, \ \forall k. \end{cases}$$

(19)

3. Uygulama

Markov zincirleri ile uygulaması yapılan alanların bir kısmı için çok değişkenli MZ modeli kullanılarak da uygulamalar gerçekleştirilebilir. Çok değişkenli MZ modeli ile yapılan uygulamaların çok az olması hatta ülkemizde yok denecek kadar az olması bu alanda bir eksiklik olarak göze çarpmaktadır.

Bu kısımda veri olarak Türkiye'de dolar kuru alış fiyat değerleri ile İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinin Ocak 2009 ile Aralık 2009 tarihleri arasında bir yıl boyunca aylık olarak oluşan değişim değerleri kullanılmıştır[12]. Değişim değerleri belirlenirken Markov zincirleri yapısı gereği sadece bir önceki ayın verisi dikkate alınarak veri dizileri oluşturulmuştur. Böylece iki tane kategorik veri dizisi elde edilmiştir. Bu dizilerin sonlu kesikli durumlu ve kesikli zamanlı olduğu basitçe söylenebilir.

Dolar kuru alış fiyatları ve İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinin değişimleri için ortalama artma ve ortalama azalma değerleri bulunmuştur. Ortalama artma değerinin üzerindeki artma değerleri D_1, ortalama artma değerinin altındaki artma değerleri D_2, ortalama azalma değerinin üzerindeki azalma değerleri D_3 ve ortalama azalma değerinin altındaki azalma değerleri D_4 ile sembolize edilmiştir. Artma ve azalma değerlerine göre veri dizileri S_1 ve S_2 ile ifade edilmiştir.

$$S_1 = \{D_1, D_1, D_2, D_3, D_4, D_4, D_3, D_2, D_4, D_2, D_2, D_2\},$$

$$S_2 = \{D_4, D_3, D_2, D_1, D_2, D_2, D_1, D_1, D_2, D_4, D_4, D_1\}.$$

S_1 veri dizisi dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimleri ve S_2 veri dizisi İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinin değişimlerini göstermektedir. Bu

[12] Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası, Elektronik Veri Dağıtım Sistemi, **http://evds.tcmb.gov.tr/cbt.html**, Erişim tarihi (02.08.2010).

dizilere göre çok değişkenli MZ modelinin dört durumlu olduğu söylenebilir. Bu veri dizilerine göre geçiş frekansı matrisleri hesaplanmıştır.

$$F^{(11)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ F^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } F^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yukarıda elde edilen geçiş frekansı matrislerinden $F^{(11)}$, S_1 dizisinin kendi durumları arasındaki geçişlerden elde edilen geçiş frekanslarını, $F^{(12)}$ ise S_2 dizisi durumlarından S_1 dizisi durumlarına geçiş ile elde edilen geçiş frekanslarını göstermektedir. $F^{(12)}$ matrisinin elde edilmesi için aşağıda verilen gösterim kullanılmıştır.

$$S_1 = \{D_1, D_1, D_2, D_3, D_4, D_4, D_3, D_2, D_4, D_2, D_2, D_2\}$$

$$\quad \uparrow \quad \uparrow \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$S_2 = \{D_4, D_3, D_2, D_1, D_2, D_2, D_1, D_1, D_2, D_4, D_4, D_1\}$$

Benzer şekilde $F^{(22)}$, S_2 dizisinin kendi durumları arasındaki geçişlerden elde edilen geçiş frekanslarını, $F^{(21)}$ ise S_1 dizisi durumlarından S_2 dizisi durumlarına geçiş ile elde edilen geçiş frekanslarını göstermektedir.

Geçiş frekansı matrislerinin normalizasyonu ile geçiş olasılıkları matrisleri hesaplanmıştır.

$$\hat{P}^{(11)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \hat{P}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ ve } \hat{P}^{(22)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S_1 veri dizisi ile S_2 veri dizisinde yer alan durumların meydana gelme oranları kullanılarak aşağıda verilen x vektörleri elde edilmiştir.

$$\hat{x}_1 = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)^T, \hat{x}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)^T.$$

Teorik açıklamalarda m değişkeni durum sayısını gösterdiğinden dolayı $m=4$ ve s değişkeni kategorik dizi sayısını gösterdiğinden dolayı $s=2$ 'dir. Bu durumda $j=1$ ve $j=2$ için ayrı ayrı çözümler yapılmalıdır.

(18) ve (19) ifadeleri ile verilen lineer programlama probleminin çözümü için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilmiştir:

$j=1$ için,

Amaç fonksiyonu: $\min w_1$

Kısıtlar:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \geq \hat{x}^{(1)} - B\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \geq -\hat{x}^{(1)} + B\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix}$$

$$w_1 \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} \lambda_{1k} = 1 \Rightarrow \lambda_{11} + \lambda_{12} = 1,\ \lambda_{11}, \lambda_{12} \geq 0.$$

şeklinde olacaktır. Kısıtlarda yer alan B matrisi ise

$$B=[\hat{P}^{(11)}\hat{x}^{(1)}\,\Big|\,\hat{P}^{(12)}\hat{x}^{(2)}]=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{11}{24} & \frac{4}{9}\\ \frac{3}{16} & \frac{1}{6}\\ \frac{13}{48} & \frac{11}{36}\end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$j=2$ için,

Amaç fonksiyonu: $\min w_2$

Kısıtlar:

$$\begin{pmatrix}w_2\\ w_2\\ w_2\\ w_2\end{pmatrix}\geq \hat{x}^{(2)}-B\begin{pmatrix}\lambda_{21}\\ \lambda_{22}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}w_2\\ w_2\\ w_2\\ w_2\end{pmatrix}\geq -\hat{x}^{(2)}+B\begin{pmatrix}\lambda_{21}\\ \lambda_{22}\end{pmatrix}$$

$$w_2\geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{2}\lambda_{2k}=1\Rightarrow \lambda_{21}+\lambda_{22}=1,\ \lambda_{21},\lambda_{22}\geq 0.$$

şeklinde olacaktır. Kısıtlarda yer alan B matrisi ise

$$B=[\hat{P}^{(21)}\hat{x}^{(1)}\,\Big|\,\hat{P}^{(22)}\hat{x}^{(2)}]=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{13}{36}\\ \frac{17}{48} & \frac{7}{18}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{3}{16} & \frac{1}{12}\end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

(18) ve (19) ifadeleri için $j=1$ ve $j=2$ alınarak yapılan lineer programlama problemlerinin çözümleri ile λ değerleri elde edilmiştir.

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\ \lambda_{12}\\ \lambda_{21}\ \lambda_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}332 & 0{,}668\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

λ matrisi değerleri (10) ifadesinde yerine yazıldığında S_1 ve S_2 ile gösterilen kategorik veri dizileri için çok değişkenli MZ modeli aşağıdaki biçimde verilir:

$$x_{n+1}^{(1)} = 0,332\hat{P}^{(11)}x_n^{(1)} + 0,668\hat{P}^{(12)}x_n^{(2)}$$

$$x_{n+1}^{(2)} = 0,5\hat{P}^{(21)}x_n^{(1)} + 0,5\hat{P}^{(22)}x_n^{(2)}.$$

4. Sonuç ve Yorumlar

Çok değişkenli MZ modelinde birbirleri ile bir korelasyona sahip veri dizileri kullanılmaktadır. Bu sayede MZ modelinde ele alınan tek kaynaklı verilerin analizine göre farklı bakış açıları ve yorumlar oluşmaktadır.

Çok değişkenli MZ modeli teorisinin son on yılda geliştirilmiş olması, uygulama alanındaki çalışmaların çok az ve ülkemizde bu konu ile ilgili çalışmaların yok denecek kadar az olması konuyu ve uygulamayı incelenebilir hale getirmektedir.

Bu çalışmada dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimler ile İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinde oluşan aylık değişimler iki kategorik dizi olarak ele alınıp bu dizilerin birbirlerini ne oranda etkiledikleri üçüncü bölümde hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıda yer almaktadır.

$x_{n+1}^{(1)}$ değişkeni $(n+1)$. adımda 1. dizinin yani dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimlerin bir önceki adımda 0,332 ile kendisine ($x_n^{(1)}$) ve 0,668 ile 2. dizi olan İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinde oluşan aylık değişimlere ($x_n^{(2)}$) bağlıdır.

$x_{n+1}^{(2)}$ değişkeni $(n+1)$. adımda 2. dizinin yani İMKB Ulusal 100 Endeksi değerlerinde oluşan aylık değişimlerin bir önceki adımda 0,5 ile kendisine($x_n^{(2)}$) ve 0,5 ile 1. dizi olan dolar kuru alış fiyatlarında oluşan aylık değişimlere ($x_n^{(1)}$) bağlıdır.

Bu çalışmada çok değişkenli MZ modeli teorik açıdan olabildiğince açık olarak ifade edilmiş ve bir uygulama ile teorik yapı anlaşılabilir bir hale getirilmiştir.

İleride yapılacak çalışmalarda kategorik veri dizisi sayısının arttırılması ile birbirini etkileyen diziler için daha belirgin sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca diziyi oluşturan durum sayısının arttırılması ve gözlenen verilerin daha fazla olması modelin gerçeğe daha yakın sonuçlar ortaya koyacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

AYTEMİZ Tevfik-ŞENGÖNÜL Ahmet, "Markov Zincirlerinin Ekonomik Bir Probleme Uygulanması: Perakende Alışverişlerde Bireysel Olarak Kullanılan Madeni Para Stratejilerinin Karşılaştırılmalı Analizi", **Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**, Cilt. 6, Sayı. 4, 2004, s. 29-43.

CAN Tuncay, **Sektörler Arası İlişkilerin Markov Zincirleri ile Analizi ve Tahmini: Türkiye Örneği**, İstanbul, Derin Yayınları, 2006.

CHING Wai-Ki, FUNG Eric S. and NG Michael K., "A Multivariate Markov Chain Model for Categorical Data Sequences and Its Applications in Demand Predictions", **IMA Journal of Management Mathematics**, Vol. 13, 2002, pp. 187-199.

CHING Wai-Ki, LI Li-Min, LI Tang and ZHANG Shu-Qin, "A New Multivariate Markov Chain Model with Applications to Sales Demand Forecasting", **International Conference on Industrial Engineering and Systems Management IESM 2007**, Beijing – China, May 30-June 2-2007, pp. 1-8.

CHING Wai-Ki-NG Michael K., **Markov Chains: Models, Algorithms and Applications**, United States of America, Springer Science+Business Media, Inc., 2006.

DARDANONI Valentino, "Income Distribution Dynamics: Monotone Markov Chains Make Light Work", **Social Choice and Welfare**, Vol. 12, No. 2, 1995, pp. 181-192.

DURA Codruta, "The Use of Markov Chainsin Marketing Forecasting", **Annals of the University Petroşani, Economics**, Vol. 6, No. 1, 2006, pp. 69-76.

GEVREK Ali İhsan-ŞENGÜLLER İlker, "Markov Zinciri Analiz Yönteminin Linyit İçeren Zırnak Formasyonuna (Pliyose, Hınıs) Uygulanması", **Jeoloji Mühendisliği Dergisi**, Sayı. 41, 1992, s. 84-90.

GUIDICI Paolo-CASTELO Robert, "Improving Markov Chain Monte Carlo Model Search for Data Mining", **Machine Learning**, Vol. 50, No. 1-2, 2003, pp.127-158.

KOÇAK Kasım-ŞEN Zekai, "Kurak ve Yağışlı Gün Oluşumlarının Markov Zinciri Yaklaşımı ile Uygulamalı İncelenemsi", **Tr. J. Of Engineering and Environmental Science**, Sayı. 22, 1998, s. 479-487.

LEVIN R.I., KIRKPATRICK C.A. and RUBIN D.S., **Quantitave Approaches to Management**, Fifth Edition, Tokyo, Mc-Graw-Hill, 1982.

MASKAWA Jun-ichi, "Multivariate Markov Chain Modeling for Stock Markets", **Physica A**, Vol. 324, 2003, pp. 317-322.

NIELSEN Rasmus-WAKELEY Jhon, "Distinguishing Migration From Isolation: A Markov Chain Monte Carlo Approach", **Genetics**, Vol. 158, No. 1, 2001, pp. 885-896.

POORE J.H., WALTON G.H.-WHITTAKER J.A., "A Constraint-Based Approach to the Repsentation of Software Usage Models", **Information and Software Technology**, Vol. 42, No. 12, 2000, pp. 825-833.

ROMAGNUOLO J., MEIER M.A.-SADOWSKI D.C., "Medical or Surgical Therapy for Erosive Reflux Esophagitis: Cost-Utility Analysis Using a Markov Model", **Annals of Surgery**, Vol. 236, No. 2, 2002, pp. 191-202.

ROSS Sheldon M., **Introduction to Probability Models**, 10th Edition, United States of America, Academic Press, 2009.

ROSS, Sheldon M., **Stochastic Processes**, Second Edition, New York, Jhon Wiley & Sons Inc., New York, 1996.

RÜZGAR Nursel S., "Bir İşletmenin Ödemeler Dengesinin Markov Süreçleri Yardımıyla Analizi", **Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**, Cilt. 5, Sayı. 1, 2003, s. 164-179.

SIMKIN Mark G., "Forecasting the Sale of Telephone Switchboard Equipment with an Interactive Computer Model and a Markov Chain", **Review of Business and Economic Research**, Vol. 18, No. 1, 1982, pp. 27-36.

STANDER J., FARRINGTON D.P., HILL G.-Altham P.M.E., "Markov Chain Analysis and Specialization in Criminal Careers", **British Journal of Criminology, Delinquency and Deviant Social Behaviour**, Vol. 29, No. 4, 1989, s. 317-335.

TÜRKIYE CUMHURIYETI MERKEZ BANKASI, Elektronik Veri Dağıtım Sistemi, **http://evds.tcmb.gov.tr/cbt.html**, (02.08.2010).

WHITTAKER J.A.,-POORE J.H., "Markov Analysis of Software Specifications", **ACM Transaction on Software Engineering and Methodology**, Vol. 2, No. 1, 1993, s. 93-106.

ZHU Dongmei-CHING Wai-Ki, "A New Estimation Method for Multivariate Markov Chain Model with Application in Demand Predictions", **The 3rd International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering (BIFE 2010)**, Hong Kong, August 13-15-2010, s. 126-130.

ZHANG Shu-Qin, CHING Wai-Ki, JIAO Yue, WU Ling-Yun and CHAN Raymond H., "Construction and Control of Genetic Regulatory Networks: A Multivariate Markov Chain Approach", **J. Biomedical Science and Engineering**, Vol. 1, 2008, s. 15-21.

ZHANG Shu-Qin, CHING Wai-Ki, JIAO Yue, WU Ling-Yun and CHAN Raymond H., "A Simplified Multivariate Markov Chain Model for the Construction and Control of Genetic Regulatory Networks", **Proceedings of the 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering**, Shanghai, China, 2008, s. 569-572.