GÜFBED/*GUSTIJ* (2018) 8 (1): 164-172
DOI: 10.17714/gumusfenbil.334524 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Boole Yakın Halkalar ve Boole İdealler

Boolean Near Rings and Boolean Ideals

Melek TAŞ[a], Funda TAŞDEMİR*[,b]
Bozok Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 66100, Yozgat, Türkiye

• Geliş tarihi / *Received*: 13.08.2017 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 11.12.2017 • Kabul tarihi / *Accepted*: 23.12.2017

Öz
Bu çalışmada, Boole yakın halka kavramı yakın halkaların ideallerine genişletilerek Boole ideal kavramı tanımlanmıştır. Elde edilen yeni tanımla birlikte Boole idealler ile literatürdeki diğer yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Her Boole idealin aynı zamanda bir IFP ideal olduğu ancak tersinin doğru olmadığı ispatlanmıştır. Yine, Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, kendisi Boole olmadığı halde Boole ideale sahip çeşitli yakın halkalar örnek olarak incelenmiştir. Son olarak, verilen bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etme yöntemi ile bir Boole yakın halka elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Boole ideal, Boole yakın halka, Yakın halka

Abstract
In this paper, the concept of Boolean near ring extended to ideals of near-rings, called Boolean ideals. With the obtained new concept the relationships between Boolean ideals and the other concepts in the literature have been examined. It has been proved that a Boolean ideal is also an IFP ideal but the converse is not true. Also, it has been proved that annihilator ideals of Boolean near-rings are Boolean ideals. Moreover it has been examined that some examples to illustrate some near rings, which is not a Boolean near-ring, but have Boolean ideals. Finally, a Boolean near ring has been obtained from a given Boolean ring through the method of obtaining a Boolean near ring.

Keywords: *Boolean ideal, Boolean near ring, Near ring*

*[,b] Funda TAŞDEMİR; funda.tasdemir@bozok.edu.tr; Tel: (0354) 242 10 21; orcid.org/0000-0002-0349-3686
[a] orcid.org/0000-0001-9162-8693

1. Giriş

Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalara ilk adım, 1905 senesinde Dickson tarafından atılmıştır. Dickson (1905), günümüzde yakın cisim adı verilen dağılma özelliğinin tek taraflı sağlandığı cisimlerin varlığını kanıtlamıştır.

Yakın halkalar, ilk işlemin değişmeli olması gerekmediği ve ikinci işlemin ilk işlem üzerine dağılma yönünün tek yönlü olduğu bir yapıdır (Pilz, 1983). Bu iki özellikten dolayı halkalarda bilinen çoğu kavram yakın halkalarda farklılık göstermiştir. Bu nedenle, yakın halkalar, birçok matematikçi için büyük bir araştırma konusu olmuş ve halen de olmaktadır (Juglal vd., 2010; Sezgin vd., 2011; Taşdemir vd., 2011; Taşdemir vd., 2013).

Halka teorisinde önemli bir rol oynayan Boole halkalar, tüm elemanları eşgüçlü olan halkalardır (Hungerford, 2003). Boole halkalar, halka teorisinde kullanışlı sonuçların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bunlar, Boole halkaların değişmeli olması, ilk işleme göre her elemanın tersinin kendisine eşit olması, alt halkalarının ve homomorfik görüntülerinin de Boole olması, asal ideallerinin aynı zamanda maksimal ideal olması gibi pek çok kullanışlı özelliklerdir.

Halkalardaki Boole olma özelliği yakın halkalara aktarılarak Boole yakın halkalar tanımlanmıştır (Pilz, 1983). Ancak, yakın halkanın tanımından dolayı, Boole yakın halkalarda Boole halkalarda elde edilen bazı sonuçlara ulaşılamaz. En temel olarak, Boole halkalar değişme özelliğini sağlıyorken Boole yakın halkalarda bu durum söz konusu değildir. Ancak Boole yakın halkalar sağ değişmeli(zayıf değişmeli) yakın halkalardır (Hansen ve Luh, 1989).

Halkalardaki pek çok kavramın yakın halkalara genişletilmesiyle elde edilen farklı sonuçlar nedeniyle, Boole yakın halka yapısının da ideallere genişletilmesi merak konusu olmuştur. Bu nedenle, bu çalışmada, Boole yakın halka kavramı ideal yapısına genişletilerek ilk kez Boole ideal tanımlanmıştır. Bu tanımla, Boole yakın halkaların tüm ideallerinin Boole ideal olduğu, kendisi Boole olmadığı halde ideali Boole olabilen yakın halkaların olduğu örneklerle gösterilmiştir. Yine, Boole ideallerin, literatürde önemli bir yer tutan IFP idealler ve asal idealler ile ilişkisi incelenmiştir. Üstelik Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, Clay ve Lawyer (1969) tarafından verilen yakın halka elde etme metodu sağ yakın halkalara uygulanarak birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde edilmiştir.

2. Temel Bilgiler

Tanım 2.1. (Pilz, 1983) Boştan farklı bir R kümesi üzerinde iki ikili işlem "+" ve "." olsun. Eğer,

a) $(R,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(R,\cdot)$ bir yarı grup,

c) $\forall a,b,c \in R$ için aşağıdaki iki dağılma özelliğinden en az birisi sağlanıyor ise

i) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ veya
ii) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$(R,+,\cdot)$ üçlüsüne bir *yakın halka* denir.

Eğer (a), (b) ve (i) şartı sağlanıyorsa, R'ye bir *sağ yakın halka*, (a), (b) ve (ii) şartı sağlanıyorsa, R'ye bir *sol yakın halka* denir. Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın halkanın sağ yakın halka ya da sol yakın halka olmasını belirler.

Bu çalışma boyunca R, bir sağ yakın halkayı ifade edecektir. Normal alt grup, yakın halka homomorfizmi (epimorfizmi), bölüm yakın halkası, birimli yakın halka, değişmeli yakın halka, aşikar ideal gibi kavramlar halka teorideki tanımlara benzer şekilde tanımlanmaktadır. Tanımları verilmeyen diğer kavramlar için Pilz'e ait '*Near-rings*' (Pilz, 1983) kitabı temel kaynak olarak verilmiştir.

Örnek 2.2. (Pilz, 1983) G bir grup olmak üzere $M(G) = \{f: G \to G \mid f \text{ fonksiyon}\}$ ile tanımlanan küme, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri ile bir yakın halkadır. (Fonksiyonlarda bileşke işleminin fonksiyonlarda toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği sağlanmadığından bir halka değildir).

Tanım 2.3. (Pilz, 1983) $R_0 = \{r \in R \mid r0 = 0\}$ kümesine R yakın halkasının sıfır-simetrik kısmı,

$$R_c = \{r \in R \mid r0 = r\} = \{r \in R \mid \forall r' \in R \text{ için}$$

kümesine R yakın halkasının sabit kısmı denir.

R_0 ve R_c birer yakın halka olup, $R = R_0$ ise R yakın halkasına *sıfır-simetrik yakın halka*, $R = R_c$ ise R yakın halkasına *sabit yakın halka* denir.
Tanım 2.4. (Pilz, 1983) R bir yakın halka ve I, R'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda,

a) $IR \subseteq I$

b) $\forall a, b \in R$ ve $\forall i \in I$ için, $a(b+i) - ab \in I$

şartları sağlanıyorsa, I'ya R yakın halkasının bir *ideali* denir ve $I \lhd R$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I, R'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I, R'nin bir sol idealidir ve sırasıyla $I \lhd_r R$ ve $I \lhd_l R$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. (Holcombe, 1970; Booth vd., 1990; Groenewald, 1991) $P \lhd R$ olmak üzere; $\forall x \in R$ için $xRx \subseteq P$ ($x^2 \in P$) iken $x \in P$ ise P'ye *3-yarı-asal (c-yarı asal) ideal* denir.

Önerme 2.6. **(**Booth ve Groenewald, 1996) R sıfır-simetrik bir yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. Bu durumda, P c-yarı-asal$\Rightarrow P$ 3-yarı-asal$\Rightarrow$ P 2-yarı-asal$\Rightarrow$ P 1-yarı-asal $\Rightarrow$ P 0-yarı-asaldır.

Tanım 2.7. **(**Ramakotaiah ve Rao, 1979) $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olması her $r \in R$ için $arb = 0$ olmasını gerektiriyorsa R yakın halkasına araya çarpan alma özelliğini sağlıyor veya kısaca IFP (Insertion-of-Factors Property) *yakın halka* denir.

Eğer $P \lhd R$ ve R/P bir IFP yakın halka ise bu durumda P'ye R'nin IFP ideali adı verilir (Atagün, 2010).

Tanım 2.8. (Birkenmeier ve Heatherly, 1989) $\forall x, y, z \in R$ için $xyz = xzy$ ise R'ye *sağ değişmeli yakın halka* denir.

Tanım 2.9. A ve B; R yakın halkasının iki alt kümesi olmak üzere. $(A{:}B)_R = \{r \in R : rB \subseteq A\}$ ile tanımlanır. Özel olarak $(0{:}B)_R = \{r \in R : rB = 0\}$ kümesine B kümesinin *sıfırlayanı* denir. Kısalık açısından $(0{:}B)_R = (0{:}B)$ ve $(0{:}\{x\})_R = (0{:}x)$ ile gösterilir.

Üçüncü bölümde, Boole ideallerin tanımını vermeden önce Boole yakın halkalar ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir.

3. Boole Yakın Halkalar

Tanım 3.1. (Pilz, 1983) R bir yakın halka olsun. $x \in R$ için, $x^2 = x$ ise R'ye bir *Boole yakın halka* denir. Yani her elemanı eşgüçlüdür.

Örnek 3.2. X herhangi bir küme ve $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olsun. Bu durumda, $(P(X), \Delta, \cap)$ birimli, değişmeli bir Boole yakın halkadır. Gerçekten, $A, B, C \in P(X)$ için, $A \Delta B \in P(X)$ ve simetrik fark işlemi birleşme özelliğini sağladığından $(P(X), \Delta)$ bir yarı gruptur. $\emptyset$ birim eleman ve her elemanın tersi kendisine eşittir. Böylece $(P(X), \Delta)$ bir gruptur. $(P(X), \cap)$ nın bir yarı grup olduğu ve sağdan dağılma özeliği kesişim ve simetrik fark işlemlerinin özelliklerinden açıktır. Buradan, $(P(X), \Delta, \cap)$ bir yakın halkadır(üstelik halkadır). $(P(X), \Delta, \cap)$ değişmeli ve birimi X olan birimli bir yakın halkadır. Ayrıca, her $A \in P(X)$ için $A^2 = A \cap A = A$ olup $(P(X), \Delta, \cap)$ bir Boole yakın halkadır.

Örnek 3.3. $M_0(\mathbb{Z}_2) = \left\{ f \in M(\mathbb{Z}_2) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$ kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri ile bir Boole yakın halkadır. $M_0(\mathbb{Z}_2)$ nin bir yakın halka olduğu Örnek 2.2 ve Tanım 2.3'den açıktır. Diğer taraftan, $M_0(\mathbb{Z}_2)$ yakın halkasının elemanları belirlenerek her $f \in M_0(\mathbb{Z}_2)$ için $f^2 = f \circ f = f$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece $M_0(\mathbb{Z}_2)$ bir Boole yakın halkadır.

Örnek 3.4. Her sabit yakın halka sağ değişmeli bir Boole yakın halkadır. Gerçekten, $x, y, z \in R$, ve R bir sabit yakın halka ise, $xyz = x$ ve $xzy = x$ olup $xyz = xzy$ yani R sağ değişmelidir. Diğer taraftan, R sabit yakın halka olduğundan $x^2 = x.x = x$ buradan $x^2 = x$ yani R Boole dür.

Önerme 3.5. R bir Boole yakın halka olsun. Bu durumda bir S alt yakın halkası da Boole yakın halkadır. Üstelik T bir yakın halka ve $\Pi{:}\, R \longrightarrow T$ bir yakın halka epimorfizmi olmak üzere. T de bir Boole yakın halkadır.

İspat: S, R yakın halkasının alt yakın halkası olduğundan. $x \in S$ ise, $x \in R$ dir. R bir Boole yakın halka olduğundan R'nin dolayısıyla S'nin her elemanı eşgüçlüdür. Böylece, S, Boole yakın halkadır. Diğer taraftan, $\Pi{:}\, R \longrightarrow T$ bir yakın halka epimorfizmi olduğundan, $t \in T$ ise $\exists\, r \in R$ için, $t = \Pi(r)$'dir. Buradan,

$$\begin{aligned} t^2 &= \Pi(\mathrm{r}).\Pi(r) \\ &= \Pi(r^2) \\ &= \Pi(r) \\ &= t \end{aligned}$$

Yani, T'nin her elemanı eşgüçlü böylece; T Boole yakın halkadır.

Boole halkalar değişmeli iken aynı durum yakın halkalar için geçerli değildir. Ancak aşağıdaki teorem vardır.

Teorem 3.6. (Hansen ve Luh, 1989) Her Boole yakın halka sağ değişmelidir.

Önerme 3.7. Her Boole yakın halka bir IFP yakın halkadır.

İspat: R bir Boole yakın halka, $a, b, r \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.6'dan $arb = abr = 0r = 0$ olur. Buradan R, bir IFP yakın halkadır.

Önerme 3.8. R bir Boole yakın halka ve $P \lhd R$ olmak üzere $R/_P$ de bir Boole yakın halkadır.

İspat: R bir yakın halka olduğunda $R/_P$'nin de bir yakın halka olduğu açıktır. Diğer taraftan, $x + P \in R/_P$ için, $(x + P)^2 = (x + P).(x + P) = x.x + P = x^2 + P = x + P$ dir. Buradan $R/_P$ bir Boole yakın halkadır.

Boole yakın halkalar ideal yapısına genişletilerek Boole ideal tanımlanmıştır.

4. Boole İdealler

Tanım 4.1. R bir yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. Eğer, $R/_P$ bir Boole yakın halka ise P'ye R'nin bir Boole ideali denir.

Önerme 4.2. R bir yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. P'nin Boole ideal olması için gerek ve yeter şart her $x \in R$ için, $x^2 - x \in P$ olmasıdır.

İspat: P bir Boole ideal olsun. Bu durumda $R/_P$ bir Boole yakın halkadır. Yani, her $x + P \in R/_P$ için, $x + P = (x + P)^2 = (x + P).(x + P) = x.x + P = x^2 + P$ olur. Bu eşitlikten $x^2 - x \in P$ bulunur. Diğer taraftan her $x \in R$ için $x^2 - x \in P$ ise $x + P = x^2 + P = (x.x + P) = (x + P).(x + P) = (x + P)^2$ olup $R/_P$ bir Boole yakın halka olup P, R 'nin bir Boole idealidir.

Sonuç 4.3. R'nin Boole yakın halka olması için gerek ve yeter şart $\{0\} \lhd R$ Boole ideal olmasıdır.

İspat: R bir Boole yakın halka olsun. Bu durumda her $x \in R$ için, $x^2 = x$ dir. Buradan, $x^2 - x = 0 \in \{0\}$. Buradan $\{0\}$, R'nin bir Boole idealdir. Diğer taraftan, $\{0\} \lhd R$ Boole ideal ise her $x \in R$ için, $x^2 - x \in \{0\}$ yani $x^2 = x$ olup R bir Boole yakın halkadır.

Sonuç 4.4. R bir sabit yakın halka olmak üzere, $P \lhd R$ ise , P Boole idealdir.

İspat: R bir sabit yakın halka ve $x \in R$ ise, $x^2 = x.x = x$ olup $x^2 - x = 0 \in P$ dir. Böylece, Önerme 4.2'den P Boole idealdir.

Sonuç 4.5. R bir Boole yakın halka ise R'nin tüm idealleri Boole idealdir.

İspat: R bir Boole yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. $\forall\, x \in R$ için $x^2 = x$ olduğundan $x^2 - x = 0 \in P$ olup P bir Boole idealdir.

Aşağıdaki örneklerde, kendisi Boole olmadığı halde Boole ideale sahip yakın halkalar verilmiştir.

Örnek 4.6. $R = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi, üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki tablolar ile verilen bir yakın halkadır (Pilz, 1983).

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	0	2	0	0	0	0
3	0	3	2	1	4	5	6	7
4	0	4	2	6	4	0	6	2
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	4	4	0	6	2
7	0	7	0	7	0	5	0	5

R bir yakın halkadır ancak halka değildir ($3 + 4 = 7$ fakat $4 + 3 = 5$ olduğundan halkanın ilk özelliği olan ilk işleme göre değişmeli olma özelliği sağlanmaz). $2^2 = 0$ olduğundan $\forall\, x \in R$ için $x^2 = x$ sağlanmadığından R bir Boole yakın halka değildir. Ancak $P = \{0,2,5,7\}$ R'nin bir ideali olmak üzere $\forall\, x \in R$ için $x^2 - x \in P = \{0,2,5,7\}$ olup P bir Boole idealdir. Gerçekten, $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ için $0^2 - 0 = 0$, $1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, $2^2 - 2 = 0 + 2 = 2$, $3^2 - 3 = 1 + 1 = 2$, $4^2 - 4 = 4 - 4 = 0$, $5^2 - 5 = 5 - 5 = 0$, $6^2 - 6 = 6 - 6 = 0$, $7^2 - 7 = 5 + 7 = 2$ dir.

Örnek 4.7. $R = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi aşağıdaki tablolardaki toplama ve çarpma işlemleri ile verilen bir yakın halkadır (Pilz, 1983).

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
2	0	2	0	2	0	2	2	0
3	0	3	0	3	0	3	3	0
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	4	5	5	4
6	4	6	4	6	4	6	6	4
7	4	7	4	7	4	7	7	4

R; Örnek 4.6'da olduğu gibi ilk işleme göre değişmeli olma özelliği sağlanmadığından halka değildir. $2^2 = 0$ olduğundan $\forall\, x \in R$ için $x^2 = x$ sağlanmadığından $(R, +, .)$ Boole olmayan bir yakın halkadır. Ancak, $P = \{0,1,2,3\} \lhd R$ bir Boole idealdir ($x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ için $0^2 - 0 = 0, 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0, 2^2 - 2 = 0 + 2 = 2, 3^2 - 3 = 3 - 3 = 0,\ \ 4^2 - 4 = 4 - 4 = 0,\ \ 5^2 - 5 = 5 - 5 = 0,\ \ 6^2 - 6 = 6 - 6 = 0,\ \ 7^2 - 7 = 4 + 7 = 1$).

Örnek 4.8. $(\mathbb{Z}_6, +)$ toplamsal grubu üzerinde aşağıdaki tablo ile verilen çarpma işlemi altında $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ bir yakın halkadır (Sezgin vd., 2011).

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

Ancak, $3.(4 + 2) = 3.0 = 3$ iken $(3.4) + (3.2) = 3 + 3 = 0$ dır. Bu durumda, soldan dağılma özelliği sağlanmayıp $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ nın bir halka olmadığı açıktır. $R = (\mathbb{Z}_6, +, .)$ bir Boole yakın halka değildir ancak $P_1 = \{0,3\}$ ve $P_2 = \{0,2,4\}$ R'nin iki ideali olmak üzere, P_1 Boole ideal olmadığı halde P_2 bir Boole idealdir. Gerçekten, $\forall\, x \in R$ için $x^2 - x \in P_2$ olduğundan ($x \in \{0,1,2,3,4,5\}$ için $0^2 - 0 = 0,\ 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0,\ 2^2 - 2 = 4 + 4 = 2,\ 3^2 - 3 = 3 - 3 = 0,\ 4^2 - 4 = 4 - 4 = 0,\ 5^2 - 5 = 1 + 1 = 2$) P_2 bir Boole ideal iken $x = 2$ için $2^2 - 2 = 2 \notin P_1$ olduğundan P_1 Boole ideal değildir.

Örnek 4.9. R, S_3 simetrik grubu üzerinde aşağıdaki tablolar ile verilen toplama ve çarpma işlemleri altında bir yakın halka olsun (Pilz, 1983).

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	5	4	3	2
2	2	4	0	5	1	3
3	3	5	4	0	2	1
4	4	2	3	1	5	0
5	5	3	1	2	0	4

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	3	2	1	1
3	1	1	2	3	1	1
4	0	0	5	4	0	0
5	0	0	4	5	0	0

Burada, $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ve $0 \to e,\ 1 \to (23),\ 2 \to (13),\ 3 \to (12),\ 4 \to (132),\ 5 \to (123)$ dir. İlk işleme göre değişme özelliği sağlanmadığından halka değildir. R'nin idealleri $P = \{0, 4, 5\}$ ve aşikar ideallerdir. $4^2 = 0$ olduğundan R bir Boole yakın halka değildir ancak $P = \{0, 4, 5\}$ R'nin bir Boole idealidir ($x \in \{0,1,2,3,4,5\}$ için $0^2 - 0 = 0,\ 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0,\ \ 2^2 - 2 = 3 + 2 = 4,\ \ 3^2 - 3 = 3 - 3 = 0,\ \ 4^2 - 4 = 0 + 5 = 5,\ \ 5^2 - 5 = 0 + 4 = 4$).

Aşağıdaki önermeler ile yakın halkalarda Boole idealler ile IFP idealler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Önerme 4.10. R bir yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. Eğer P, Boole ideal ise IFP idealdir.

İspat: P, R'nin bir Boole ideali ise bu durumda R/P bir Boole yakın halkadır. Önerme 3.7'den R/P IFP yakın halkadır. R/P IFP yakın halka ise, IFP ideal tanımından P IFP idealdir.

Önerme 4.10'un tersi genelde doğru değildir. Yani, her IFP ideal bir Boole ideal değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

Örnek 4.11. $R = \{0,1,2,3\}$ Klein-4 grubu üzerinde, aşağıdaki tablolar ile verilen işlemler altında bir yakın halkadır (Pilz, 1983).

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

Ancak, $3.(1+2) = 3.3 = 3$ iken $(3.1) + (3.2) = 1 + 1 = 0$ olduğundan, soldan dağılma özelliği sağlanmayıp $(R, +, .)$ nın bir halka olmadığı açıktır. R'nin idealleri $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}$ ve R dir. Burada, $\{0,1\}$ ideali bir IFP idealdir ancak Boole ideal değildir. Gerçekten, $x = 2$ için $2^2 - 2 = 0 - 2 = 0 + 2 = 2 \notin \{0,1\}$ olduğundan $\{0,1\}$ Boole ideal değildir.

Sonuç 4.12. R Boole yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. Bu durumda P, IFP idealdir.

İspat: R bir Boole yakın halka ise Sonuç 4.5'den tüm idealleri Boole idealdir. Önerme 4.10'dan tüm idealleri IFP'dir.

Önerme 4.13. R bir yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. P, Boole ideal ise aynı zamanda c-yarı asaldır.

İspat: $a \in R$ için, $a^2 \in P$ olsun. P, Boole ideal olduğundan $a^2 - a \in P$'dir. Buradan, $a^2 \in P$ olduğundan $a \in P$ 'dir. Böylece, P c-yarı asal idealdir.

Sonuç 4.14. R yakın halka ve $P \lhd R$ olsun. P, Boole ideal ise aynı zamanda 3-yarı asaldır.

İspat: P Boole ideal ise Önerme 4.13'den P c-yarı asal idealdir. Üstelik Önerme 2.6'dan P c-yarı asal ideal ise 3-yarı asal idealdir.

Önerme 4.15. R bir Boole yakın halka olsun. Bu durumda, $x \in R$ için, $(0{:}x)$, R'nin bir Boole idealidir.

İspat: Önerme 3.7'den R bir Boole yakın halka ise, bir IFP yakın halkadır. Üstelik R bir IFP yakın halka ise $x \in R$ için $(0{:}x) \lhd R$ 'dir (Pilz, 1983). Bu durumda, $(0{:}x)$'in R'nin bir Boole ideali olduğunu göstermek için, $a \in R$ olmak üzere $a^2 - a \in (0{:}x)$ olduğu gösterilmelidir. R bir Boole yakın halka olduğundan $a^2 - a = 0$ dır. Bu durumda $x \in R$ için, $(a^2 - a).x = 0$ olup $a^2 - a \in (0{:}x)$ bulunur. Böylece, $(0{:}x)$ R'nin bir Boole idealidir.

Önerme 4.16. R, bir Boole yakın halka olsun. $S \subseteq R$ ise, $(0{:}S)$ R'nin bir Boole idealidir.

İspat: Önerme 3.7'den R, bir Boole yakın halka ise R, aynı zamanda bir IFP yakın halkadır. Üstelik R bir IFP yakın halka ise $S \subseteq R$ için $(0{:}S) \lhd R$ 'dir (Pilz, 1983). R Boole yakın halka olduğundan $x \in R$ için, $x^2 = x$ olup $x^2 - x = 0$ 'dır. Böylece $S \subseteq R$ için, $(x^2 - x).S = 0$ yani $(x^2 - x) \in (0{:}S)$ dir.

5. Boole Halkadan Boole Yakın Halka Elde Etme Metodu

Son olarak, Clay ve Lawyer (1969) tarafından verilen yakın halka elde etme metodu sağ yakın halkalara uygulanarak birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde edilmiştir. Boole halkalardan elde edilen bu yakın halkalara *özel Boole yakın halkalar* denir. Öncelikle bu yöntem verilmiştir.

$(B, +, \wedge)$ birimi "1" olan bir Boole halka ve $a'{:}\, a + 1$ olmak üzere $a \vee b{:}\, (a' \wedge b')'$ ile tanımlansın. $x \in B$ ise $a, b \in B$ için, $*_x$ işlemi $a *_x b{:}\, a \wedge (b \vee x)$ olarak tanımlandığında $(B, +, *_x)$ sağ değişmeli bir Boole yakın halkadır. Üstelik $x = 0$'dır gerek ve yeter şart $(B, +, *_x)$ bir Boole halkadır.

İspat:

a) $(B, +)$'nın grup olduğu $(B, +, \wedge)$ nın halka olmasından açıktır.

b) $(B, *_x)$ bir yarı gruptur., $\forall\, a, b, c \in B$ için,

$$
\begin{aligned}
a *_x (b *_x c) &= a *_x [b \wedge (c \vee x)] \\
&= a \wedge \{[b \wedge (c \vee x)] \vee x\} \\
&= a \wedge [(b \vee x) \wedge (c \vee x)] \\
&= [a \wedge (b \vee x)] \wedge (c \vee x) \\
&= [a \wedge (b \vee x)] *_x c \\
&= (a *_x b) *_x c
\end{aligned}
$$

olup $(B, *_x)$ birleşmelidir.

c) $(B, +, \wedge)$ halka olarak verildiğinden " $\wedge$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine dağılma özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
(a + b) *_x c &= (a + b) \wedge (c \vee x) \\
&= [a \wedge (c \vee x)] + [b \wedge (c \vee x)] \\
&= (a *_x c) + (b *_x c)
\end{aligned}
$$

Böylece, $(B,+,*_x)$ bir yakın halkadır. Üstelik $a *_x a = a$ olduğundan bir Boole yakın halkadır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} a *_x (b *_x c) &= a *_x [b \wedge (c \vee x)] \\ &= a \wedge \{[b \wedge (c \vee x)] \vee x\} \\ &= a \wedge (b \vee x) \wedge (c \vee x) \\ &= a \wedge (c \vee x) \wedge (b \vee x) \\ &= [a \wedge (c \vee x)] \wedge (b \vee x) \\ &= (a *_x c) *_x b \end{aligned}$$

olup sağ değişmelidir.

$x = 0$ olmadığı durumlarda halka değilken $x = 0$ durumunda $(B,+,*_x)$ aynı zamanda bir Boole halkadır. Halka olduğunu göstermek için soldan dağılmanın sağlandığını göstermek yeterlidir (ilk işleme göre değişme özelliği $(B,+,\wedge)$ nın halka olarak verilmesinden sağlanır).

$$\begin{aligned} a *_x (b + c) &= a \wedge [(b + c) \vee 0] \\ &= a \wedge (b + c) \\ &= (a \wedge b) + (a \wedge c) \\ &= [a \wedge (b \vee 0)] + [a \wedge (c \vee 0)] \\ &= (a *_x b) + (a *_x c) \end{aligned}$$

Ancak,

$$a *_x (b + c) = a \wedge [(b + c) \vee x]$$

iken " $\vee$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine dağılma özelliği olup olmadığı bilinmediğinden,

$$\begin{aligned} (a *_x b) + (a *_x c) \\ &= [a \wedge (b \vee x)] + [a \wedge (c \vee x)] \\ &= a \wedge [(b \vee x) + (c \vee x)] \\ &\neq a \wedge [(b + c) \vee x] \end{aligned}$$

Bu durumda $x = 0$ olmadığı durumlarda $(B,+,*_x)$ halka değildir.

Örnek 5.1. $0 \neq X$ olmak üzere $(P(X),\Delta,\cap)$ birimi X olan birimli ve değişmeli Boole halkası olmak üzere $(P(X),\Delta,*_Y)$ bir sağ değişmeli Boole yakın halkadır. Üstelik $Y = 0_{P(X)} = \emptyset$'dir gerek ve yeter şart $(P(X),\Delta,*_Y)$ bir Boole halkadır.

Gerçekten, $Y \in P(X)$ olmak üzere $\forall A, B \in P(X)$ için, $A *_Y B = A \cap (B \cup Y)$ ile tanımlanır. Burada $A \cup B: (A' \cap B')'$ ve $A': A\Delta X = (A - X) \cup (X - A) = \emptyset \cup A^t = A^t$ dir.

a) $(P(X),\Delta)$'nin grup olduğu açıktır.

b) $(P(X),*_Y)$ bir yarı gruptur. Gerçekten, $\forall A, B, C \in P(X)$ için, $A *_Y B = A \cap (B \cup Y) \in P(X)$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (A *_Y B) *_Y C &= \big(A \cap (B \cup Y)\big) \cap (C \cup Y) \\ &= A \cap \big((B \cup Y) \cap (C \cup Y)\big) \\ &= A \cap \big((B \cup Y) \cap (C \cup Y \cup Y)\big) \\ &= A \cap \Big(\big(B \cap (C \cup Y)\big) \cup Y\Big) \\ &= A *_Y (B \cap (C \cup Y)) \\ &= A *_Y (B *_Y C) \end{aligned}$$

olup $(P(X),*_Y)$ birleşmelidir.

c) $\forall A, B, C \in P(X)$ için,

$$\begin{aligned} (A\Delta B) *_Y C &= (A\Delta B) \cap (C \cup Y) \\ &= \big((A\Delta B) \cap C\big) \cup ((A\Delta B) \cap Y)) \\ &= \big((A \cap C)\Delta(B \cap C)\big) \cup \big((A \cap Y)\Delta(B \cap Y)\big) \\ &= \big[\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) - \big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big)\big] \\ &\quad \cup \big[\big((A \cap Y) \cup (B \cap Y)\big) - \big((A \cap Y) \cap (B \cap Y)\big)\big] \\ &= \big[\big((A \cup B) \cap C\big) - (A \cap B \cap C)\big] \cup \big[\big((A \cup B) \cap Y\big) - (A \cap B \cap Y)\big] \\ &= \big[\big((A \cup B) \cap C\big) \cap (A \cap B \cap C)'\big] \cup \big[\big((A \cup B) \cap Y\big) \cap (A \cap B \cap Y)'\big] \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (A *_Y C)\,\Delta\,(B *_Y C) &= \big(A \cap (C \cup Y)\big)\,\Delta\,\big(B \cap (C \cup Y)\big) \\ &= (A\Delta B) \cap (C \cup Y) \\ &= ((A\Delta B) \cap C) \cup \big((A\Delta B) \cap Y\big) \\ &= \big((A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C)\big) \cup \big((A \cap Y)\,\Delta\,(B \cap Y)\big) \\ &= \big[((A \cap C) \cup (B \cap C)) - \big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big)\big] \\ &\quad \cup \big[\big((A \cap Y) \cup (B \cap Y)\big) - \big((A \cap Y) \cap (B \cap Y)\big)\big] \end{aligned}$$

$$= \left[\left((A \cup B) \cap C\right) \cap (A \cap B \cap C)'\right] \cup \left[\left((A \cup B) \cap Y\right) \cap (A \cap B \cap Y)'\right]$$

Buradan $(P(X), \Delta, *_Y)$ bir yakın halkadır. Üstelik, $A *_Y A = A \cap (A \cup Y) = (A \cap A) \cup (A \cap Y) = A \cup (A \cap Y) = A$olduğundan $(P(X), \Delta, *_Y)$ bir Boole yakın halkadır. $\forall A \in P(X)$ için, $A *_Y E = E *_Y A = A$ olacak şekilde $E \in P(X)$ olmadığından birimli değildir. Üstelik $A *_Y B = A \cap (B \cup Y)$ ve $B *_Y A = B \cap (A \cup Y)$ olup değişmeli de değildir ancak sağ değişmelidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} A *_Y (B *_Y C) &= A *_Y (B \cap (C \cup Y)) \\ &= A \cap [B \cap (C \cup Y) \cup Y] \\ &= A \cap [(B \cup Y) \cap (C \cup Y)] \\ &= A \cap \left((C \cup Y) \cap \left((B \cup Y) \cup Y\right)\right) \\ &= A \cap \left((C \cap (B \cup Y)\right) \cup Y) \\ &= A *_Y \left(C \cap (B \cup Y)\right) \\ &= A *_Y (C *_Y B) \end{aligned}$$

$Y = \emptyset$ için, $A *_Y B = A \cap (B \cup Y) = A \cap B$ olduğundan $(P(X), \Delta, *_Y)$ nin bir Boole halka olduğu kolaylıkla görülür.

6. Sonuç

Bu çalışmada, Boole yakın halka kavramı ideal yapısına genişletilerek Boole ideal tanımlanmıştır. Boole yakın halkaların tüm ideallerinin Boole ideal olduğu açıktır. Ayrıca, kendisi Boole olmadığı halde ideali Boole olabilen yakın halkaların olduğu örneklerle gösterilmiştir. Yine, Boole ideallerin literatürde önemli bir yer tutan IFP idealler ve asal idealler ile ilişkisi incelenmiştir. Üstelik Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, Clay ve Lawyer (1969) tarafından verilen yakın halka elde etme metodu sağ yakın halkalara uygulanarak birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde edilmiştir.

7. Kaynaklar

Atagün, A. O., 2010. IFP ideals in near-rings, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39, 1, 17-21.

Birkenmeier, G. ve Heatherly, H., 1989. Medial near-rings, Monatshefte für Mathematik, 107, 2, 89-110.

Booth, G. L. ve Groenewald, N. J., 1996. ν-prime and ν-semiprime near-rings, Mathematica Japonica, 43, 3, 425-430.

Booth, G. L., Groenewald, N. J. ve Veldsman, S., 1990. A Kurosh- Amitsur prime radical for near-rings, Communications in Algebra, 18, 9, 3111-3122.

Clay, J. R. ve Lawyer, D. A., 1969. Boolean near-rings, Canadian Mathematical Bulletin, 12, 265-273.

Dickson, L. E., 1905. Definitions of a group and a field by independent postulates, Transactions of the American Mathematical Society, 6, 2, 198-204.

Groenewald, N. J., 1991. Different prime ideals in near-rings, Communications in Algebra, 19, 10, 2667-2675.

Hansen, D. J. ve Luh, J., 1989. Boolean near-rings and weak commutativity, Journal of the Australian Mathematical Society Series A, 47, 103-107.

Holcombe, W. L. M., 1970, Primitive Near-rings. PhD Thesis, University of Leeds. Leeds, 153p.

Hungerford, T. W., 2003, Algebra, ed: S. Axler, F.W.Gehring, K.Ribet, Springer-Verlag, Newyork, 502p.

Juglal, S., Groenewald, N. J. ve Lee, E. K. S., 2010. Different prime R-ideals, Algebra Colloquium, 17, 887-904.

Pilz, G., 1983, Near-rings, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 470p.

Ramakotaiah, D. ve Rao, G. K., 1979. IFP near-rings, Journal of Australian Mathematical Society, 27, 3, 365-370.

Sezgin, A., Atagün, A. O. ve Aygün, E., 2011. A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, Filomat, 25, 1, 53-68.

Taşdemir, F., Atagün, A. O. ve Altındiş, H., 2011. Equiprime N-ideals of monogenic N-groups, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40, 3, 375-382.

Taşdemir, F., Atagün, A. O. ve Altındiş, H., 2013. Different prime N-ideals and IFP N-ideals, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 44, 4, 527-542.