Examination of Proof Levels of Mathematics Students and Pre-service Mathematics Teachers[1]

Matematik ve Matematik Öğretmenliği Bölümü Öğrencilerinin İspat Yapma Düzeylerinin İncelenmesi

Fatih KARAKUŞ[2]
Zeynep Bahar ERŞEN[3]
Gürbüz OCAK[4]

Extended Abstract

Introduction

One of the most important objectives of mathematics education is to ensure that students can receive reasonable answers from the questions of why and for what purpose regarding the concepts they will learn. Mathematical proofs are demonstrated to show the accuracy of a result on different grounds, to inform and persuade others about this topic and to place the result achieved into a system. Therefore, they have a key role for mathematics education to achieve this objective. Traditionally proof has been seen particularly as being to verify the correctness of a mathematical statement. It is also important for mathematics educators because proof involves reasoning, conviction and communication and helps meaningful learning. Proofs can be used to show students that understanding and performing mathematics means more than just learning to execute certain procedures. Over the past several decades, research on mathematical proof has gained increasing attention in the area of mathematics education. Studies about proof focus on reading, understanding and validating proofs, students' and educators' perceptions and attitudes towards proof and how they construct proofs. In addition there is also research emphasizing the role of proof in the classroom and how it should be taught. Many studies suggest students and pre-service teachers have a poor understanding of proof and have difficulties in constructing their own proofs. Moreover, there are a few studies that compare the proof level of students in different fields such as

[1] Bu makale, 14-16 Eylül 2017 tarihleri arasında Uşak'ta düzenlenen I. Uluslararası Eğitim Araştırmaları ve Öğretmen Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildirinin geliştirilmiş halidir.

[2] Doç. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Afyon/TÜRKİYE. karakus@aku.edu.tr

[3] Arş. Gör., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Afyon/TÜRKİYE. zbersen@aku.edu.tr

[4] Doç. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Eğitim Bilimleri Bölümü, Afyon/TÜRKİYE.gocak.edu.tr

Bu makale iThenticate programı ile taranmıştır.

Makale Gönderim Tarihi: 15/11/2017-Kabul Tarihi: 15/12/2017

mathematics and mathematics education. So, the aim of the present study is to compare proof levels of both senior mathematics students and senior mathematics education students and determine their explanations whether a proof is necessary or not when the conditions of the proof of a theorem is changed.

Methods

Qualitative research method was used in the study. The research methodology of this study was a case study. In a case study, the researcher is primarily interested in understanding a specific individual or situation. Case study research focuses on individuals' experiences of some phenomenon and describes the cases in depth.

The research sample for this study was selected via convenience sampling; volunteers were requested from the body of students who were enrolled in the both mathematics department and elementary mathematics teacher education program at the researchers' university, as these students were easily accessible for administration of the data collection instrument. The research group for this study were 113 (53 mathematics students and 60 mathematics education students) senior students at Afyon Kocatepe University in Turkey in 2017.

To determine the participants' proof level, a written questionnaire consisting of five open-ended questions was developed. The first question in the questionnaire was about "prove the following theorem: if p and q are any two odd numbers, (p+q)x(p-q) is always a multiple of 4". Moreover, the other questions were about whether a proof is necessary or not when the conditions of the proof of the theorem are changed.

To define the participants' proof level, both descriptive analysis and Chi-square analysis were used.

Findings

The result of the study indicated that most of pre-service teachers (70%) were in proof level 3. Pre-service teachers at this level produce arguments to be acceptable proofs; that is their arguments show that a statement is true in all cases. Moreover, 13% of pre-service teachers were in both proof level 1 and proof level 2 and 3% of them were in proof level 0. On the other hand 30.2% of mathematics students were in proof level 3. In addition, 17% of mathematics students were in proof level 2, 26% of them were in proof level 1, 9% of them were in proof level 0 and 17% of them were not any proof level. This showed that pre-service teachers' proof levels were higher than mathematics students. According to Chi-square test scores there was a statistically meaningful difference between pre-service teachers' proof levels and mathematics students' proof levels. The difference was in favor of pre-service teachers, and the effect size of the difference was at moderate level.

Conclusion

The findings of the present study suggest that pre-service teachers had higher proof levels than mathematics students. Mathematics students take more mathematics courses such as complex analysis, functional analysis and topology than pre-service teachers. Moreover, in these courses, mathematics students encounter more mathematical proofs than pre-service teachers. Thus, it is expected that they have more proof levels than pre-service teachers. So, the reasons for this can be investigated in future research.

Öz

Son yıllarda hem yurt içinde hem de yurt dışında ispat konusunda yapılan çalışmaların artması matematik eğitiminde ispatın anlamı ve öneminin giderek arttığının bir göstergesidir. Yapılan çalışmalar ispat yapmanın eğitimin her kademesindeki öğrencilerin sıkıntı çektikleri, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları ve korktukları bir süreç olarak düşündüklerini göstermektedir. Bu araştırmanın amacı matematik ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeylerini karşılaştırmalı olarak incelemektir. Çalışma nitel araştırmalarda kullanılan özel durum çalışması yöntemiyle yürütülmüştür. Araştırma, Afyon Kocatepe Üniversitesi'ne kayıtlı, fen edebiyat fakültesinin pedagojik formasyon eğitimine devam eden 53 matematik bölümü ve eğitim fakültesinde öğrenim görmekte olan 60 ilköğretim matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmada, öğrencilerden "p ve q herhangi iki tek sayı ise (p+q)x(p-q) her zaman 4'ün bir katıdır" önermesini ispatlamaları istenmiştir. Bunun yanında verilen önermenin koşulları değiştirilerek öğrencilerin ispatlarının bu yeni koşullar içinde geçerli olup olmadığını açıklamaları istenmiştir. Araştırmadan elde edilen veriler Knuth, Choppin ve Bieda (2009)'nın çalışmasında yer alan ispat düzeyleri temel alınarak hazırlanan rubrik ile betimsel olarak analiz edilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar, ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğrencilerin ispat yapmada daha başarılı olduklarını göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: İspat, ispat yapma düzeyi, matematik bölümü öğrencileri, matematik öğretmeni adayı

Abstract

In recent years, an increase in the number of studies on proof both in the country and abroad has been a sign that the significance and the importance of the proof in mathematics education has increased. The studies show that students at all levels of education are in trouble to prove, think that they can not be successful, they believe they can not succeed. The aim of the present study is to compare proof levels of both senior mathematics students and senior mathematics education students and determine their explanations whether a proof is necessary or not when the conditions of the proof of a theorem is changed. The research group for this study were 113 (53 mathematics students and 60 mathematics education students) senior students at Afyon Kocatepe University in Turkey in 2017. To determine the participants' proof level, a written questionnaire consisting of five open-ended questions was developed. The first question in the questionnaire was about "prove the following theorem: if p and q are any two odd numbers, (p+q)x(p-q) is always a multiple of 4". Moreover, the other questions were about whether a proof is necessary or not when the conditions of the proof of the theorem are changed. The result of the study shows that pre-service mathematics teachers had higher proof levels than mathematics students.

Keywords: Proof, proving level, mathematics students, pre-service mathematics teacher

Giriş

Matematikte bir önermenin doğruluğunun gösterilmesi ve kabul edilmesindeki en temel araç, bu ifadenin ve önermenin ispatlanmasıdır (Dede ve Karakuş, 2014). Matematiksel ispat, matematiğin merkezinde yer almaktadır (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002; Ko, 2010; Tall, 1991). Matematiksel ispat; bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003). İspat yaparken bir durumun doğru ya da yanlışlığının yanı sıra neden doğru olduğu da gösterildiğinden (Hanna, 2000); ispatlamanın, matematikteki kavramların ve terimlerin özelliklerinin belirlenmesinde de etkisi vardır (Herbst, 2002).

Matematik eğitimcilerinin ve öğretmenlerinin; öğrencilerin, matematiksel ispatın rolünü ve amacını anlamasına yardımcı olmak gibi önemli bir sorumluluğu vardır. Bu nedenle matematik eğitimcileri ve öğretmenleri, matematiksel ispat kavramının eğitim-öğretim ortamlarının her kademesindeki matematik müfredatlarında farklı şekillerde ve düzeylerde yer alması için öncülük etmelidir (Hanna vd., 2009). Nitekim Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [NCTM] (2000), okulöncesi dönemden ortaöğretim dönemi sonuna kadar öğrencilerin mantıksal yolla düşünmenin ve matematiğin temel yönleri açısından ispatlamanın farkına varma, matematiksel tahminleri yapma ve araştırma, matematiksel nedenleri ve ispatları geliştirme, değerlendirme, farklı mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini seçme ve kullanma becerilerinin kazandırılması gerektiğini ifade etmektedir. Öğrencilere ispat becerilerinin kazandırılması sürecinde; öğretmenlerin ispata yönelik algıları, deneyimleri ve becerileri etkilidir (Almeida, 2003; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006). Bu durum göz önüne alındığında, ileride matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının matematiksel ispat ve ispatlamaya yönelik algılarının, görüşlerinin ve becerilerinin ve bu bağlamda da ispat düzeylerinin önemli olduğu açıktır.

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Literatürde öğretmen adaylarının ispata yönelik algılarını ve görüşlerini (Almeida, 2000; Erşen, 2016; Jones, 2000; Knuth, 2002; Varghese, 2009), ispat becerilerini (Cusi & Malara, 2007; Pekşen-Sağır, 2013; Sarı, Altun & Aşkar, 2007; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2005; Weber, 2001) ortaya koyan çalışmalar mevcuttur. Çalışmalardan elde edilen sonuçlar, öğretmen adaylarının ispata yönelik algılarının/ görüşlerinin olumlu yönde olmadığını ve ispat yapmada güçlüklerle karşılaştıklarını göstermektedir. Örneğin, Cusi ve Malara (2007) yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarına bir cebirsel ispat problemi sunmuş; çözümlerini Harel ve Sowder (1998)'ın ispat şemalarına göre sınıflandırmıştır. Araştırma sonucunda 54 öğretmen adayının sadece 13'ü en üst düzeyde yani otoritelerce kabul edilebilecek ispat yaparken; öğretmen adaylarının sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmede ve cebirsel ifadeleri yorumlamada problem yaşadıkları belirlenmiştir. Pekşen-Sağır (2013)'ın çalışmasında ise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçleri incelenmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullandıkları, doğru yöntemi seçerken zorlandıkları, yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte, literatürde ispat yapma becerisiyle doğrudan ilişkili olan konulardan biri de ispat düzeyleridir.

Araştırmacılar, bireylerin yapmış oldukları ispatlar için farklı düzeyler tanımlamış ve bu düzeylere göre yapılan ispatları sınıflandırmışlardır. Örneğin Balacheff (1987) pragmatik (pragmatic), entellektüel (intellectual) ispatlar ve kanıtlama (demonstration) olmak üzere üç ispat düzeyi ortaya koymuştur. En düşük ispat olan pragmatik ispatta, matematiksel nesnelerin temsilleriyle gösterim yapılır. Entelektüel ispatta, sorudaki ifadeler ve bu ifadeler arasındaki ilişkilerin formülleştirilir. Kanıtlamada ise, bir teori ile organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgiler kullanılır. Miyazaki (2000) ise ispat yapmayı; İspat A, İspat B, İspat C ve İspat D olarak dört gruba ayırmıştır. İspat A'yı tümdengelimsel muhakeme içeren ve kanıtlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat türü iken; İspat B'yi, tümdengelimsel muhakeme içeren ve diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispat türü; İspat C'yi, tümevarımsal muhakeme içeren, diğer dil, çizimler veya hareket edebilen objelerin kullanıldığı ispat türü ve İspat D'yi ise tümevarımsal muhakeme içeren ve kanıtlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispat türü olarak tanımlamıştır. Knuth, Choppin ve Bieda (2009) bireylerin ispat yapmalarını dört düzeye ayırmıştır. Düzey 0'daki bireyler, durumun doğruluğunu göstermek için matematiksel ispat yapma gerekliliğinin farkında değildir. Örneğin bir öğrenci, öğretmeni doğru olduğunu söylediği için o durumu doğru olarak kabul eder. Düzey 1'deki birey ise ispat yapılması gerektiğinin farkındadır; ancak bu süreçte özel durumlardan faydalanarak durumu doğrularlar. Düzey 2'deki bireyler ise genelleme sürecinde ya yanlış bir yöntem kullanıp genellemeye ulaşamazlar ya da ispatı doğru bir biçimde tamamlayamazlar. En üst düzey olan 3. düzeydeki bireyler ise bir ifadenin doğruluğunu uygun seçilen yöntem ve argümanlarla genelleyip; ortaya koyarlar. Öğretmen adaylarının ispat yapma düzeylerini ortaya koyan inceleyen çalışmalar incelendiğinde; bazı araştırmalarda öğretmen adaylarının ispat yapma düzeyleri yüksek bulunurken (Köğce, 2013; Stylianides & Stylianides, 2009); bazılarında öğretmen adaylarının ispat yapma düzeylerinin düşük olduğu (Jones, 2000; Weber, 2005; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2007) belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat yapma düzeylerinde genel bir eğilimin olmaması bu konuya yönelik yapılan çalışmaların artırılmasını gerekli kılmaktadır. Bu bağlamda, araştırmanın amacı; son sınıf matematik bölümü ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeylerini belirlemek ve yaptıkları ispatların önermenin koşulları değiştiğinde geçerliği hakkındaki açıklamalarını incelemektir. Araştırmanın alt problemleri şu şekildedir:

1. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeyleri nedir?
2. Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeyleri nedir?
3. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencileri ile matematik bölümü öğrencileri arasında ispat yapma düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?
4. Matematik bölümü ve ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin bir teoremin koşuları değiştiğinde yaptıkları ispatın geçerliliğine yönelik görüşleri nedir?

Araştırmanın Yöntemi

Araştırma Modeli

Çalışma nitel araştırmalarda kullanılan özel durum çalışması yöntemiyle yürütülmüştür. Özel durum çalışması yöntemi kullanılmasının sebebi özel durum çalışmalarının araştırmacıya çok özel bir konunun veya durumun üzerinde yoğunlaşarak incelenen özel durumları en ince ayrıntılarıyla tanımlama ve değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkilerini açıklayabilme fırsatı vermesidir (Patton, 2005).

Çalışma Grubu

Araştırma, Türkiye'nin batısında yer alan bir üniversiteye kayıtlı, fen edebiyat fakültesinin pedagojik formasyon eğitimine devam eden 53 matematik bölümü ve eğitim fakültesinde öğrenim görmekte olan 60 ilköğretim matematik öğretmenliği programı son sınıf öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. 2014 yılında üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programı için puan aralığı 340-385 iken; matematik bölümü için puan aralığı 222-287'dir. Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ulaşılabilir örnekleme yöntemi tercih edilmiştir. Bu yöntemin tercih edilmesinin nedeni; zaman ve işgücü açısından tasarruf sağlanarak, kolay uygulama yapılabiliyor olmasıdır (Yıldırım & Şimşek, 2008).

Veri Toplama Araçları

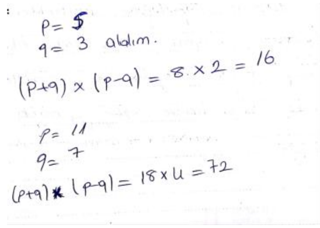
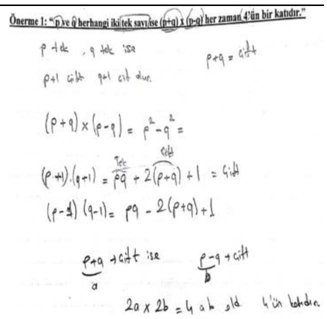
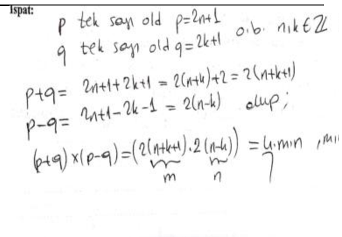
Araştırmada katılımcılara beş açık uçlu sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Testte yer alan sorular Leddy (2001)'nin çalışmasında yer alan sorulardan yararlanılarak yazılmıştır. Testte yer alan birinci soru "p ve q herhangi iki tek sayı ise (p+q)x(p-q) her zaman 4'ün bir katıdır" teoreminin katılımcılar tarafından ispatlanmasıdır. Diğer dört soru ise bu teoremin koşullarında yapılan değişikliklere göre katılımcıların yapmış oldukları ispatların geçerliliğini belirlemeye yöneliktir. Hazırlanan test uygulanmadan önce matematik bölümünde görev yapan bir matematikçiye ve bir matematik eğitimcisine inceletilerek uzman görüşü alınmıştır. Ayrıca test ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalı üçüncü sınıfında öğrenim gören 10 öğrenciye pilot çalışma olarak uygulanmıştır. Uygulama sonunda testte yer alan soruların doğruluğu ve anlaşılırlığı tespit edilmiştir. Bunun yanında testin yaklaşık 40 dakikada tamamlandığı belirlenmiş ve bu nedenle ana çalışmada da katılımcılara bu sürenin verilmesi kararlaştırılmıştır. Ek'te veri toplama aracı olarak kullanılan teste yer verilmiştir.

Verilerin Analizi

Araştırmadan elde edilen veriler Knuth, Choppin ve Bieda (2009)'nın çalışmasında yer alan ispat düzeyleri temel alınarak hazırlanan rubrik ile betimsel olarak analiz edilmiştir.

Tablo 1. Değerlendirme Rubriği ve Örnek Cevaplar

Düzeyler	Göstergeler	Örnek
0. düzey	Herhangi bir açıklama yapmadan verilen ifadenin doğruluğu kabul etme ya da genelleme amacı gütmeyen matematiksel ifadeler yazma	p ve q iki tek sayı olsun. $(p+q)x(p-q) = p^2 - pq + qp - q^2$ $= p^2 - q^2$ elde edilir.

1. düzey	Matematiksel ispat sürecinde uç (özel) durumlardan yararlanarak ispatı doğrulama	
2. düzey	Genellemeye yönelik ancak matematiksel olarak uygun olmayan ifadeler içerme, Tamamlanamayan ispatlar	
3. düzey	Otoritelerce kabul edilebilen ispat yapma	

Ayrıca öğrenim görülen bölüme göre matematik bölümü ve matematik öğretmeni adaylarının ispat düzeyleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılığın olup olmadığını belirlemek için İki Yönlü Kay-Kare Testi yapılmıştır. İki Yönlü Kay-kare testi, çok kategorili iki değişkenin oluşturduğu hücrelerdeki, gözlenen frekans ile beklenen frekansı karşılaştırarak, değişkenler arasındaki ilişkiyi sorgulayan bir testtir. Kay-Kare Testi'nin kullanılabilmesi için, beklenen değeri beşten küçük olan kategori sayısının, toplam kategori sayısının %20'sini aşmaması ve tüm kategorilerde bu değerin birden büyük olması gerektiği belirtilmektedir (Büyüköztürk, 2010). Bu nedenle her bir ispat düzeyi için Kay-Kare testi yapılmadan önce, çapraz tablolar oluşturulmuş ve beklenen frekanslar için ağırlıklandırma yapılmıştır. Ayrıca beklenen değeri beşten küçük kutu sayısı %20'yi aştığı durumlar analize dâhil edilmemiştir. İki Yönlü Kay-kare testi analizinin sonuçlarının yorumlanmasında gruplar içi yüzde (%) değerleri dikkate alınmış ve elde edilen bulgular tablolar halinde sunulmuştur. Ayrıca değişkenler arasındaki ilişkinin gücünü belirlemek için Cramer's V kullanılmıştır. Cramer's V, Kay-Kare dağılımda iki ya da daha fazla değişken arasındaki ilişkinin gücünü yansıtan bir ölçüdür. Rea ve Parker (2014) Cramer's V değerlerinin yorumlanmasında Tablo 2'de verilen kılavuzu önermektedir.

Tablo 2. Kay-Kare Testi Verilerinin Yorumlanması İçin Kullanılan Kılavuz

Ölçüt	Yorum
$.00 \leq x < .10$	İhmal edilebilir ilişki
$.10 \leq x < .20$	Zayıf ilişki
$.20 \leq x < .40$	Orta dereceli ilişki
$.40 \leq x < .60$	Nispeten güçlü ilişki
$.60 \leq x < .80$	Güçlü İlişki
$.80 \leq x \leq 1.00$	Oldukça güçlü ilişki

x: Cramer's V değeri

Matematik bölümü ve matematik öğretmeni adaylarının verilen teoremin şartları değiştirildiğinde ispatın geçerliliğine yönelik yapmış oldukları açıklamalar ise betimsel olarak analiz edilmiş ve örnek açıklamalara yer verilmiştir.

Çalışmanın güvenirliği

Bu çalışmada testte yer alan sorulardan elde edilen verilerin güvenirliğini belirlemek için, araştırmacı dışında bir matematikçi ve bir matematik eğitimcisinden yardım alınmıştır. Katılımcıların ispat düzeylerini belirlemek için hazırlanan rubrik uzmanlara verilmiş ve rastgele belirlenen 20 kağıt uzmanlar ve araştırmacı tarafından ayrı ayrı incelenmiştir. Miles ve Huberman (1994) tarafından önerilen tutarlılık katsayısı hesaplama yöntemine göre araştırmacı ve uzmanlar arasında katılımcıların ispat düzeyleri için belirlenen tutarlık katsayısı %93 olarak elde edilmiştir. Elde edilen tutarlık katsayıları %70'den büyük olduğu için elde edilen verilerin güvenilir olduğu söylenebilir (Miles & Huberman, 1994).

Bulgular ve Yorum

Matematik bölümü ve ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeylerine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Düzeyleri

	İlköğretim Matematik Öğretmenliği		Matematik Bölümü	
İspat Yapma Düzeyleri	**N**	**%**	**N**	**%**
Düzey yok (Boş)	-	-	9	17
0. düzey	2	3,3	5	9,4
1. düzey	8	13,3	14	26,4
2. düzey	8	13,3	9	17
3. düzey	42	70	16	30,2

Tablo 3'te ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının verilen teoremin ispatına yönelik % 3'ünün 0. düzeyde, % 13'ünün 1. ve 2. düzeyde ve % 70'inin 3. düzeyde olduğu görülmektedir. Matematik bölümü öğrencilerinin ise % 17'si herhangi bir ispat yapmamışken; öğrencilerin % 9'u 0. düzeyde, % 26'sı 1. düzeyde, % 17'si 2. düzeyde ve % 30'u 3. düzeydedir. Bu durum üçüncü düzeyde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik bölümü öğrencilerinden daha fazla olduğunu göstermektedir. Bu ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik bölümü öğrencilerinden daha doğru ve geçerli ispatlar yaptıkları şeklinde yorumlanabilir.

Matematik bölümü ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma düzeyleri arasındaki farklılığın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek için yapılan Ki-kare testi sonuçları Tablo 3'de verilmiştir.

Tablo 4. Bölümlere Göre İspat Düzeyleri Arasında Anlamlı Farkın Olup Olmadığını Belirlemek için Yapılan Ki-Kare Analizi

Bölümler	Düzeyler	Gözlenen N	Beklenen N	X^2	p	Cramer's V
İlköğretim Matematik Öğretmenliği	1. düzey	8	13.2	10.013	.007	.306
	2. düzey	8	10.2			
	3. düzey	42	34.7			
Matematik	1. düzey	14	8.8			
	2. düzey	9	6.8			
	3. düzey	16	23.3			

Tablo 4'e göre, ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören öğrenciler ile matematik bölümünde öğrenim gören öğrencilerin ispat yapma düzeyleri arasında orta dereceli anlamlı farklılıklar bulunmuştur (X^2 =10.013; $p<.05$) . Bu anlamlı farklılığın da her bir ispat düzeyi için ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğrencilerin lehine olduğu görülmektedir.

Matematik bölümü ve ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin verilen teoremin, koşulları değiştirildiğinde yaptıkları ispatın geçerliliğine yönelik cevapları Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 5. Bölümlere Göre, Öğrencilerin Verilen Teoremin Koşullarındaki Değişime Göre, İspatın Geçerliliğine Yönelik Görüşleri

ÖNERMELER	Matematik Bölümü Öğrencileri						İlköğretim Matematik Bölümü Öğrencileri					
	İspat gerekmez		Yeniden ispat gerekir		Cevap yok		İspat gerekmez		Yeniden ispat gerekir		Cevap yok	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Önerme 2	38	71.7	11	20.8	4	7.5	42	70	17	28.3	1	1.7
Önerme 3	16	30.2	33	62.3	4	7.5	16	26.7	44	73.3	-	-
Önerme 4	28	52.8	20	37.7	5	9.4	27	45	33	55	-	-

Tablo 5 incelendiğinde; önerme 2 için matematik bölümü öğrencilerinin yaklaşık % 72'si, ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğrencilerin % 70'i yeniden ispat yapmanın gereksiz olduğunu belirterek doğru cevap vermişlerdir. Önerme 3 için ise yine her iki bölüm öğrencilerinin büyük çoğunluğu ispatın yapılması gerektiği yönünde görüş belirtmiştir. Son önerme için ise matematik bölümü öğrencilerinin yaklaşık yarısı yeniden ispatı gereksiz görürken; ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin % 45'i yeniden ispatın yapılması gerekmediğini hatalı olarak belirtmiştir.

Katılımcılardan ispatın gerekli olup/olmadığı yönünde seçim yapmalarının yanı sıra gerekçelerini de yazmaları istenmiştir. Bu kısımda yanlış tercih yapan öğrencilerin gerekçelerine odaklanılmış olup; bölümlerine göre her bir önerme için öğrencilerin gerekçeleri Tablo 6'da özetlenmiştir.

Tablo 6. Bölümlere göre, her bir önerme için öğrencilerin ifade ettiği gerekçeler

Önermeler	Matematik Bölümü Öğrencileri	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencileri
	Gerekçeler	
Önerme 2 için	*Önerme 1'de herhangi iki tek sayı için yapılmış. Burada ardışık tek sayılar için doğruluğu istendiğinden yeniden ispat yapılmalı. (f=3) **Sayılarla ispat olduğundan yeniden ispat yapılmalı (f=2) ***İki ardışık tek sayı alınıp yerine konularak yeniden bakılmalı (f=1) ****Teoremin ifadesi değiştiğinden, ispat da yeniden yapılmalı(f=5)	*p ve q'nun değerleri değiştiğinden yeniden ispat yapılmalı. (f=6) ** Her zaman ifadesi yer aldığından ispat yapmak gerekir.(f=7) *** Önerme 1'de alınan sayılar ardışık olmayabilir; bu yüzden ispatı tekrar yapmak gerekir. (f=4)
Önerme 3 için	*Önermenin ispatı aslında tüm sayılar için geçerli olduğundan; gerekli değil. (f=7) **İspatı benzer şekildedir. Sadece tek yerine çift sayı olacak; bu yüzden gerek yok. (f=5) ***Çift sayıların toplamı ve farkının çarpımı 4'ün katı olduğundan ispat yapmaya	*Çift için de tek sayılar için de önerme doğru olduğundan; ispata gerek yok. (f=5) ** Doğruluğu açık olduğundan ispatına gerek yok. (f=8) ***Çift sayılarla yapılan işlem sonuçları hep çifttir. (f=3)

	gerek yok. (f=4)	
Önerme 4 için	*Önerme 1'deki ispatın tersten gidilmiş hali. Ö yüzden tekrar ispatına gerek yok. (f=12) **Yapılacak ispat önerme 1'dekinin aynısıdır. (f=10) ***Önerme 1'deki ispatın tersi de geçerlidir. (f=6)	*Aynı şekilde ispatı yapılır. (f=18) **Önermenin tersi de doğru olduğundan ispatına gerek yoktur. (f= 6) ***Bu bir teorem olamaz. (f=1) ****Yine başlangıçta verilen p ve q değerlerine ulaşılacağından ispatına gerek yok. (f=1) *****Tümevarımla ispatlanan bir şeyin ispatı tümdengelimle de doğrudur. (f=1)

f: Frekans

Tablo 6'dan görüldüğü gibi her bir önerme için matematik bölümü öğrencilerinin ve ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin gerekçeleri birbirleriyle oldukça benzerdir. Önerme 2; verilen önermenin özel bir durumu olup; tekrar ispat yapılmasına gerek yok iken; ifade değiştiği için öğrenciler ispatın yeniden yapılması gerektiğini düşünmektedir. Önerme 3 ve önerme 4 için ise öğrenciler yeniden ispatı gereksiz görmekte; ispatın aynı şekilde olacağını ifade etmektedir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Araştırmadan elde edilen sonuçlar, ilköğretim matematik öğretmenliği ile matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeyleri arasında istatistiksel olarak orta düzeyde anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir. İlköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğrencilerin ispat yapma düzeylerinin daha yüksek olduğu belirlenmiştir.

İlköğretim matematik öğretmenliğindeki öğrencilerin büyük çoğunluğunun ispat düzeyleri 3. düzeydir. Bu durum, bu bölümdeki öğrencilerin verilen önermeyi formal ve doğru bir şekilde ispat edebildiklerini göstermektedir.

Buna karşın, matematik bölümü öğrencilerinin ise, yaklaşık %30'unun bu düzeyde ispat yapabildikleri belirlenmiştir. Matematik bölümü öğrencilerinin daha çok ispat yerine özel örneklerle önermeyi doğrulamaya çalıştıkları ya da önermeyi ispatlama sürecinde matematiksel hatalar yaparak ispatı tamamlayamadıkları görülmüştür. Cusi ve Malara (2007)'nın, Martin ve Harel (1989)'in ve Stylianides, Stylianides ve Philippou (2007)'nun öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmalarda da öğretmen adaylarının ispat yerine özel durumlardan yola çıkarak verilen önerme/teoremi doğruladıkları; matematiksel dili doğru kullanamadıkları ortaya konmuştur. Bu durumun temel nedenlerinden biri; öğrencilerin üniversiteye giriş puanlarındaki farklılık olabilir. Bir diğer nedeni de derslerde kullanılan öğretim yöntemleri olabilir. Geleneksel yöntemde tanım, teorem ve ispat sırası izlenmektedir. Oysa yapılan çalışmalar, akran etkileşiminin, grup içi tartışmaların öğrencilerin ispat yapma becerilerini artırdığını ortaya koymuştur (Sarı-Uzun & Bülbül, 2013; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008). Matematik bölümü öğrencilerinin, ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerine göre daha fazla ve yoğun matematik dersleri almış olmalarına karşın; ispat yapmada daha fazla problem yaşamalarının nedenleri ileriki araştırmalarda derinlemesine incelenebilir.

Hem ilköğretim matematik öğretmenliği hem de matematik bölümü öğrencilerinin büyük çoğunluğu, verilen önermenin özel bir durum için, yeniden ispatın gerekmediğini belirlemişlerdir. Buna karşın; bu özel durum için ispat yapılmasının gerekli olduğunu ifade eden öğrencilerin önermenin ifadesi değiştiğinde mutlaka yeni bir ispatın yapılması gerektiği yönünde bir görüşe sahiptir. Bu durum öğretmen adaylarının hipotezde yer alan ifadeye dikkat etmeyip; ezbere cevaplar verdiğini göstermektedir. Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini inceleyen çalışmalarda da; ispat sürecinde verilen önermelerdeki ifadeleri anlamlandırmadan, önermede verilen kavramlar arasında ilişki kurmadan neyi niçin yaptığını bilmeden çözüm sürecine girdikleri belirlenmiştir (İskenderoğlu, 2010; Moralı, Köroğlu & Çelik, 2004; Pekşen-Sağır, 2013). Yine, hem ilköğretim matematik öğretmenliği hem de matematik bölümü öğrencilerinin büyük çoğunluğu, verilen önermenin hipotezi değiştiğinde, yeniden ispatın yapılması gerektiğini düşünmektedirler. Buna karşın; yeniden ispatın yapılmaması gerektiğini düşünen öğrenciler, önermenin hipotezini göz önüne almadan yapılan ispatın her durum için doğru olduğunu düşünmektedir. Yani; öğretmen adayları verilen önermenin hipotez ve hükmünün ne olduğunu tam olarak bilmemektedir. Benzer duruma Pekşen-Sağır (2013)'ın matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelediği çalışmasında rastlanmaktadır. Verilen cebir teoremlerinin ispatlanması sürecinde öğretmen adaylarının teoremin hipotez ve sonucunu ayırt etmekte güçlük yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Sarı-Uzun ve Bülbül (2013)'ün çalışmasında da öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde kanıt çerçevesi oluşturamama, tanımları kullanamama, kanıtın geçerliliğini belirleyememe, hipoteze ekleme yapma veya sonucu varsayma, kanıt yazamama ve düşündüklerini anlaşılır biçimde ifade edememe gibi problemler yaşadıkları tespit edilmiştir.

Her iki bölüm öğrencilerinin yaklaşık yarısının, verilen önermenin hipotezi ile hükmünün yeri değiştiğinde, yeniden ispatın yapılmasını gerekli görmektedir. Buna karşın; yeniden ispatın yapılmaması gerektiğini düşünen öğrenciler, önermenin hipotezi ve hükmünü göz önüne almadan, hipotez ve hüküm yer değiştirse bile yapılan ispatın her durum için doğru olduğunu düşünmektedirler. Bu durum Weber (2001) ve Knapp (2006)'in çalışmalarında belirttiği gibi öğretmen adaylarının ispatın nasıl yapılacağına ve mantık konusuna yönelik bilgi eksikliklerinin olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda ileri düzey matematik yapabilmek için bilinmesi gereken önermeler konusunun alt yapısı sağlam oluşturulmalı; ispatlama aktivitelerinde öğretmen adaylarının eksik ve yanlışlarını görmelerini sağlayacak öğrenme ortamlarına yer verilmelidir.

KAYNAKLAR

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890. http://dx.doi.org/10.1080/002073900502033600

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Education, 34*(4), 479-488. http://dx.doi.org/10.1080/0020739031000108574

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III). Beijing: Higher Education.

Büyüköztürk, Ş. (2010). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings ofthe Fifth Congress of the European Societyfor Research in Mathematics Education* (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). Matematiksel İspat Kavramına Pedagojik Bir Bakış: Kuramsal Bir Çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71. doi: http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.52880

Erşen, Z. B. (2016). Preservice Mathematics Teachers' Metaphorical Perceptions towards Proof and Proving. International Education Studies, 9(7), 88-97.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23. http://dx.doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H.N., Lin, F.L., Selden, A., Tall, D.& Yevdokimov, O. (2009). Discussion Document. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the 19th International Commission on Mathematical Instruction: Proof and Proving in Mathematics Education* (vol. 1). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan: ICMI Study Series 19, Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. *Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III*. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283.

Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 283-312.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Trabzon.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60. http://dx.doi.org/10.1080/002073900287381

Knapp, J. (2006). A framework to examine definition use in proof. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.15-22).

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405. http://dx.doi.org/10.2307/4149959

Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. N. (2009). *Middle school students' production of mathematical justifications*. In Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective (pp. 153-170). Routledge Taylor & Francis Group. doi: http://dx.doi.org/10.4324/9780203882009

Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*, 1109-1129. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10763-010-9235-2

Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarinin ispatin matematik öğrenmeye katkisi ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies-International Periodical For The Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 8*(12), 765-776. http://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.5740

Leddy, J.F.J. (2001). *Justifying and proving in secondary school mathematics* (Unpublished doctoral dissertation). OISE, University of Toronto, Canada.

Miles, M. B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis : an expanded sourcebook.* (2nd Edition). California: SAGE Publications

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in LoverSecondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,41*, 47-68.

Moralı, S., Köroğlu, H., Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*(1), 161-175.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

Natıonal Councıl of Teachers of Mathematıcs [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.Patton, M.Q. (2005). *Qualitative Research: Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Rea, L. M., & Parker, R. A. (2014). *Designing and conducting survey research: A comprehensive guide (4th Edition).* Jossey-Bass Publishers.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: A Case study. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences, 40*(2), 295-319. http://dx.doi.org/10.1501/egifak_0000000181

Sarı Uzun, M., & Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmenadaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyi. *Education and Science, 38*(169), 372-390.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 145-166. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. London: Kluwer Academic Publishers.

Varghese, T. (2009). Concept maps to assess student teachers' understanding of mathematical proof. *The Mathematics Educator, 12*(1), 49-68.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101–119.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 351-360. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.005

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68,* 247-261.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (5.baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EK:

Aşağıda verilen ***Önerme 1'in*** *doğru ya da yanlış olduğunu ispatlayınız:*

Önerme 1: " p ve q herhangi iki tek sayı ise (p+q) x (p-q) her zaman 4'ün bir katıdır."

İspat:

- Yukarıda verilen **Önerme 1**'in ispatlandığını varsayalım.

Fatih, aşağıda verilen Önerme 2, 3 ve 4'ün her birinin ispatında nelere ihtiyacı olduğunu sormaktadır.

Her bir durum için A seçeneğinin işaretlenmesi **"Fatih'in herhangi bir şey yapması gerekmediği, Önerme 1'in zaten bu önermenin bir ispatı olduğu"** anlamındadır.

Her bir durum için B seçeneğinin işaretlenmesi **"Fatih'in yeni bir ispat yapması gerektiği"** anlamındadır.

Her bir önerme için tabloda A ya da B seçeneğini işaretleyiniz. Neden o

seçeneği işaretlediğinizi kısaca açıklayınız.				
		A Fatih'in herhangi bir şey yapması gerekmez	**B Fatih'in yeni bir ispat yapması gerekir**	**Çünkü…**
Önerme 2	p ve q ardışık tek sayılar ise, (p+q) x (p-q) her zaman 4'ün bir katıdır			
Önerme 3	p ve q iki çift sayı ise, (p+q) x (p-q) her zaman 4'ün bir katıdır			
Önerme 4	(p+q) x (p-q), 4'ün bir katı ise, p ve q herhangi iki tek sayıdır			