Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi/ Journal of the Institute of Natural & Applied Sciences 22 (2): 200-210, 2017

Araştırma Makalesi / Research Article

Seminormlu Uzaylarda Modulus Fonksiyon Dizileri Yardımıyla Tanımlanmış Yeni Bir Dizi Uzayı [1]

Kamil Akbayır[2*], Tunay Bilgin[2]

[2]Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, 65080, Van,

[*] kamilakbayir@yyu.edu.tr

Özet: Bu çalışmada $F=(f_k)$ bir modulus fonksiyon dizisi, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli sonsuz bir matris olmak üzere yeni bir $\ell(p,F,q,s)$ dizi uzayı tanımlanarak, bu uzayın bazı Topolojik özellikleri ve uzayla ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Anahtar kelimeler: Modulus fonksiyonu, Dizi uzayları, Topoloji.

A New Sequence Space On The Spaces With Seminorm Defined By The Modulus Function Sequences

Abstract: In this work we introduce a new $\ell(p,F,q,s)$ sequence space that consists of $F=(f_k)$ a modulus function, $p=(p_k)$ a sequence with positive terms and $A=(a_{mk})$ a matrix with positive terms, and study some topological properties of this space and some inclusion relations related to this space.

Key words: Modulus function, Sequence spaces, Topologi.

Giriş

(Nakano, 1953) tarafından ortaya atılan modulus fonksiyonu fikri dizi uzayları çalışmasına yeni bir boyut kazandırdı. Maddox (1986), kuvvetli Cesàro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan, moduluse göre kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin sınıfını, $w(f)$ olarak tanımladı. (Connor, 1989), (Maddox, 1986)'nın tanımını Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matris alarak $w(A,f)$ toplanabilme metoduna genelleştirdi.

(Bilgin, 1992) tarafından yarınormlu uzay üzerinde; f bir modulus fonksiyon, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli sonsuz bir matris olmak üzere $\ell,\ell_p,\ell(p),I(p,s)$ ve $L(f)$ dizi uzaylarının bir genelleştirmesi olan $\ell(p,f,q,s)$ dizi uzayı ve $[C,I],[C,I,p],w(A),w(A,p),w(f)$ ve $w(A,f)$ toplanabilme metotlarının bir genelleştirmesi olan $w(A,p,f,q,s)$ toplanabilme metodunu tanımladı, ayrıca f bir modulus fonksiyon iken $v\in IN$ için f^v nin modulus fonksiyon olduğunu göstererek $\ell(p,f^v,q,s)$ dizi uzayı ve $w(A,p,f^v,q,s)$ toplanabilme metoduna genelleştirildi.

(Şahiner, 2002) tarafından f bir modulus fonksiyon, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere $B_g(p,f,q,s)$ dizi uzayını, (Esi, 1999b) tarafından f bir modulus fonksiyon, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli sonsuz bir matris olmak üzere $w(A,p,f,s)$ dizi uzayını, (Başarır, 2001) tarafından f bir modulus

[1] Bu çalışma Kamil AKBAYIR (2003)'ün "Modulus Fonksiyon Dizileri Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Dizi Uzayları" başlıklı doktora tez çalışmasının bir bölümünü içermektedir.

fonksiyon, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere $\Delta w(f,p)$ dizi uzayını, (Bilgin, 2003) tarafından f bir modulus fonksiyon ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli sonsuz bir matris olmak üzere $[A,V,\lambda,f]$ dizi uzayını ve (λ,A)-istatistiksel yakınsaklık tanımını, (Bhardwaj ve Singh, 2001) tarafından f bir modulus fonksiyon, $r=(r_k)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere $|\bar{N}_p|(r), |\bar{N}_p|(f)$ ve $|\bar{N}_p|(f,r)$ dizi uzayları tanımlandı.

Şunu belirtelim ki, modulus fonksiyon yardımıyla bir çok uzay oluşturulmuştur (Banerji and Galiz, 2000; Soomer, 1999, 2000; Esi, 2000; Kolk, 1990, 1993, 1997, 2013; Bilgin, 1994, 1996, 2004; Bilgin ve Altun, 2007; Raj and Sharma, 2011; Karakaya ve Şimşek, 2004; Bhardwaj and Bala, 2009 ve diğerleri).

Yöntem

Biz bu çalışmamızda (Bilgin, 1992) tarafından çalışılmış $\ell(p,f,q,s)$ dizi uzayını, $F=(f_k)$ modulus fonksiyon dizisi yardımıyla genelleştirilerek $\ell(p,F,q,s)$ dizi uzayını inşa edip bazı özelliklerini vereceğiz.

Önce kullanılacak temel tanım, teoremler ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 1 (Yarı Norm)

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $q: X \to R$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, q'ya bir yarı norm, (X,q) ya da yarı normlu uzay denir (Maddox, 1970).

i) $q(\lambda x)=|\lambda| q(x)$,

ii) $q(x+y)\le q(x)+q(y)$.

Tanım 2. (Paranormlu Uzay)

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g: X \to R$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa g'ye bir paranorm ve (X,g) ikilisine de paranormlu uzay denir (Maddox, 1970). Her $\lambda \in K$ ve $x,y \in X$ için

i) $g(\theta)=0$

ii) $g(x)=g(-x)$

iii) $g(x+y)\le g(x)+g(y)$

iv) $\lambda \to \lambda_0$ ve $g(x-x_0)\to 0$ iken $g(\lambda x-\lambda_0 x_0)\to 0$.

Tanım 3

q_1 ve q_2, X üzerinde iki yarınorm olsun. q_1 kuvvetli q_2 olması için $\forall u \in X$ alındığında, $q_2(u)\le Mq_1(u)$ olacak şekilde M sabitinin var olmasıdır (Wilansky, 1964).

Tanım 4

X boş olmayan bir cümle olsun. Eğer, $d: XxX \to IR$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, d'ye bir yarımetrik ve (X,d) ye de yarımetrik uzay denir (Maddox, 1970). $\forall x,y,z \in X$ için,

i) $d(x,x)=0$

ii) $d(x,y)=d(y,x)$

iii) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

Tanım 5 (Modulus Fonksiyonu)

$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna bir modulus fonksiyonu denir (Nakano, 1953).

i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) Her $x,y>0$ için $f(x+y)\le f(x)+f(y)$,

iii) f, artan,

iv) f, 0 da sağdan süreklidir.

f, modulus fonksiyonu sınırlı ve sınırsız olabilir. (ii) den $|f(x)-f(y)|\leq f(x-y)$ ve (iv) den f nin $[0,\infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğu görülür.

$F=(f_k)$ modulus fonksiyonların dizisi olsun. Aşağıda vereceğimiz şartlar ileride kullanılacaktır.

(M1) $\sup_k f_k(t)<\infty,\ \forall t>0$ *için*;

(M2) $\lim_{t\to 0} f_k(t)=0$, ($k\geq 1$ için düzgün) (Kolk, 1990).

Tanım 6 (Tam Paranormlu Uzay)

Bir (X,g) paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, (X,g) uzayına tam paranormlu uzay denir.

Eşitsizlikler

Her k için,

$p_k>0$ *ve* $H=\sup_k p_k$ olmak üzere

$a_k, b_k \in \not\subset$ olsun. Bu taktirde,

a) $|a_k+b_k|^{p_k}\leq C\left\{|a_k|^{p_k}+|b_k|^{p_k}\right\},\ C=\max(1,2^{H-1})$

dir.

b) $|\lambda|^{p_k}\leq \max\left(1,|\lambda|^H\right)$

$\ell(p,F,q,s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, ilk olarak, $F=(f_k)$ modulus fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere $\ell(p,F,q,s)$ dizi uzayı tanımlanarak, (X,q)'nun tam olması durumunda, tam paranormlu uzay olduğu gösterilecek, ikinci olarak dual uzayı ve çarpım uzayı ile ilgili birer teorem verilecek. Son olarak da bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

X, θ sıfır elemanlı kompleks (veya reel) lineer uzay ve X= (X,q), q yarınormu ile yarınormlu bir uzay olsun. X-değerli dizilerin uzayını S(X) ile gösterelim. S(X); $x=(x_k), y=(y_k)$ ve λ bir skaler olmak üzere, $x+y=(x_k+y_k)$ ve $\lambda x=(\lambda x_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. $F=(f_k)$ modulus fonksiyonunun bir dizisi ve $p=(p_k)$ pozitif terimli reel bir dizi olmak üzere X

$$\ell(p,F,q,s)=\left\{x\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ s\geq 0\right\}$$

uzayını tanımlayalım. $\Phi(X)$ ile θ dan farklı terimleri sonlu olan X-değerli dizilerin uzayını gösterirsek, $\Phi(X)\subseteq \ell(p,F,q,s)$ olduğunu görmek zor değildir. O halde tanımladığımız $\ell(p,F,q,s)$ uzayının bir anlamı vardır. Çalışma boyunca $p=(p_k)$ dizisini her k için $0<p_k\leq \sup_k p_k=H$ olarak alacağız.

Burada $\forall k$ için $f_k=f$ seçilirse uzayımız,

$$\ell(p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ s\geq 0\right\}$$

dizi uzayına dönüşür (Bilgin, 1992). $\ell(p,f,q,s)$ de (X,q) yerine $(C,\|\ \|)$ alınır ve p, f, s den biri veya birkaçı özel seçilirse (Maddox, 1970) tarafından tanımlanmış $\ell, \ell_p ve\, \ell(p)$, (Bulut ve Çakar, 1979) tarafından tanımlanmış $\ell(p,s)$ ve (Ruckle, 1973) tarafından tanımlanmış $\ell(f)$ dizi uzaylarını özel hal olarak elde ederiz.

Bulgular

Önce kullanacağımız bir eşitsizlik verilecektir.

Lemma 1

Herhangi bir k sabiti için $F=(f_k)$ modulus fonksiyonunun bir dizisi ve 0<δ<1 olsun. Bu taktirde $v,k\in IN$ *ve* $t\in[0,\infty)$ için,

$$f_k^{v-1}(t)>\delta \ ise\ f_k^{v}(t)\leq \frac{2f_k(1)}{\delta}\left\{f_k^{v-1}(t)\right\}$$

olur. Burada $f_k^0 = I$ özdeşlik dönüşümüdür.

İspat:

$0<\delta<1$, $v \in IN$ ve $t \in [0,\infty)$ için $f_k^{v-1}(t) > \delta$ olsun. $0<\delta<1$ olduğundan,

$$f_k^{v-1}(t) = \frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta} \le 1 + \left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]$$

olur. Bu eşitsizliğe f_k modulüsünü uygularsak,

$$f_k\left(f_k^{v-1}(t)\right) \le f_k\left(1 + \left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]\right)$$

$$f_k^{v}(t) \le \left\{1 + \left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]\right\} f_k(1) \le \left\{\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta} + \frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right\} f_k(1) = \frac{2 f_k(1)}{\delta}\left\{f_k^{v-1}(t)\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi tanımladığımız $\ell(p,F,q,s)$ uzayının lineer uzay olduğunu gösterelim.

Lemma 2

$\ell(p,F,q,s)$ lineer uzaydır.

İspat:

S(X) lineer uzay ve $\ell(p,F,q,s) \subseteq$S(X) olduğundan x,y$\in \ell(p,F,q,s)$ ve λ,μ skalerleri için λx+μy$\in \ell(p,F,q,s)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. p, f_k dizileri ile q fonksiyonlarının özellikleri dikkate alınırsa λ, μ skalerleri ve $\forall k \in IN$ ve $x_k, y_k \in X$ için,

$$\left\{f_k\left(q(\lambda x_k + \mu y_k)\right)\right\}^{p_k} \le \left\{f_k\left(q(\lambda x_k) + q(\mu y_k)\right)\right\}^{p_k}$$

$$\le \left\{f_k\left(q(\lambda x_k)\right) + f_k\left(q(\mu y_k)\right)\right\}^{p_k} =$$

$$= \left\{f_k\left(|\lambda| q(\lambda x_k)\right) + f_k\left(|\mu| q(\lambda y_k)\right)\right\}^{p_k}$$

$$\le \left\{Tf_k\left(q(x_k)\right) + Kf_k\left(q(y_k)\right)\right\}^{p_k} \qquad (1)$$

olur. Burada T, K; $|\lambda| \le T$ ve $|\mu| \le K$ olacak şekilde pozitif tamsayılardır. Ayrıca Eşitsizlik (a) göz önüne alınırsa,

$$\left\{Tf_k\left(q(x_k)\right) + Kf_k\left(q(y_k)\right)\right\}^{p_k} \le C\left\{\left[Tf_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} + \left[Kf_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}\right\}$$

$$\le CT^H\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} + CK^H\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}$$

olacaktır.

Bu ve (1) eşitsizliğinden,

$$\left\{f_k\left(q(\lambda x_k + \mu y_k)\right)\right\}^{p_k} \le CT^H\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} + CK^H\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}$$

olur. Böylece ∀k için $k^{-s} > 0$ olduğundan λ,μ skalerleri ve $\forall k \in IN$ ve $x_k, y_k \in X$ için,

$$k^{-s}\left\{f_k\left(q(\lambda x_k + \mu y_k)\right)\right\}^{p_k} \le k^{-s}CT^H\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} + k^{-s}CK^H\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k} \qquad (2)$$

eşitsizliği elde edilir. CT^H ve CK^H ifadeleri sabit ve $x=(x_k), y=(y_k) \in \ell(p,F,q,s)$ olduğundan (2) eşitsizliğinde k=1 den ∞'a toplam alınırsa λx+μy$\in \ell(p,F,q,s)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1

$\ell(p,F,q,s)$,

$$g(x) = \left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

ile bir paranormlu uzaydır.(M=max(1,H))

Teorem 2

(X,q) tam ise ($\ell(p,F,q,s)$,g) tam paranormu uzaydır.

İspat:

Bunun için $\ell(p,F,q,s)$ de bir (x^n) Cauchy dizisi alalım. (x^n) Cauchy dizisi olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists n_o$ ∍ $\forall m,n > n_o$ için,

$$g(x^n - x^m) = \left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n - x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon \quad (3)$$

dır. Ayrıca her k sabiti için,

$$\left\{k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq\left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

olacağından $m,n>n_o$ için,

$$\left\{k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \text{ ve } f_k$$

modulus fonksiyonu olduğundan, her bir k sabiti için,

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}=\left\{k^{-s}\left[f_k\left(\lim_{n,m\to\infty}q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

eşitliği, $\lim_{n,m\to\infty}q(x_k^n-x_k^m)=0$ olmasını gerektirir. O halde sabit her k için (x_k^n), (X,q)da bir Cauchy dizisidir. (X,q) tam olduğundan her bir k için,

$$q(x_k^n-y_k)\to 0\ (n\to\infty) \tag{4}$$

olacak şekilde X de bir $y=(y_k)$ dizisi vardır. Şimdi biz $y\in\ell(p,F,q,s)$ olduğunu gösterelim. $\ell(p,F,q,s)$ lineer yarımetrik uzay ve (x^n) Cauchy dizisi olduğundan $g(x^n)\leq K$ olacak şekilde pozitif K sabiti vardır. Dolayısıyla herhangi bir t için,

$$\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq K \quad \text{olur.}$$

$\left|q(x_k^n)-q(y_k)\right|\leq q(x_k^n-y_k)$ olduğundan, (4) ve f_k nın sürekliliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq K$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(\lim_{n\to\infty}q(x_k^n)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq K$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq K$$

elde edilir. Burada, $t\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\left\{\sum_{k}k^{-s}\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\leq K$$ olur. Bu da $y\in\ell(p,F,q,s)$ olduğunu gösterir. Şimdi de, $g(x^n-y)\to 0\ (n\to\infty)$ olduğunu gösterelim. (3) den dolayı herhangi bir t için $m,n>n_o$ olduğundan,

$$\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \quad \text{olur.}$$

Ayrıca,

$$\left|q(x_k^n-x_k^m)-q(x_k^n-y_k)\right|\leq q(x_k^m-y_k)$$

eşitsizliği ve (4) den, $q(x_k^n-x_k^m)\to q(x_k^n-y_k)\ (m\to\infty)$ olacağından,

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon$$

ol

$$\left\{\sum_{k=1}^{t}k^{-s}\left[f_k\left(\lim_{m\to\infty}q(x_k^n-x_k^m)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon$$

urBurada $t\to\infty$ için limit alırsak $n>n_o$ için,

$$\left\{\sum_{k}k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^n-y_k)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \quad \text{elde}$$

ederiz. Bu da, $g(x^n-y)\to 0\ (n\to\infty)$ demektir. Böylece $\ell(p,F,q,s)$ nin tam paranormlu (veya tam lineer yarımetrik) uzay olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 3

$F=(f_k)$ dizisi düzgün sınırlı ve s>1 olsun. Bu durumda $x\in\ell(p,F,q,s)$ olduğunda,

$\sum_k a_k x_k$ yakınsak $\Leftrightarrow (a_k)\in\Phi$ dir

İspat:

Yeter şart: $x\in\ell(p,F,q,s)$ olsun. $(a_k)\in\Phi$ iken $\sum_k a_k x_k$ sonlu toplama dönüşeceğinden yakınsaktır.

Gerek şart: Kabul edelim ki, $x\in\ell(p,F,q,s)$ için $\sum_k a_k x_k$ yakınsak, fakat $(a_k)\notin\Phi$ dir. Bu durumda pozitif tamsayıların artan bir (m_k) alt dizisi vardır, öyle ki, $\left|a_{m_k}\right|>0$, k=1,2,... dır.

Şimdi q(u)>0 olacak şekilde u∈X sabit vektörü için (y_k) dizisini,

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{u}{q(u)a_{m_k}}, & k = m_k \\ \theta, & k \neq m_k \end{cases} \quad (5)$$

olarak tanımlayalım. $F=(f_k)$ dizisi düzgün sınırlı olduğundan $\forall t \in [0,\infty)$ ve $\forall k \in IN$ için $f_k(t) \leq K$ olacak şekilde K>1 sabiti bulunabilir.

$\forall k \; ve \; x_k \in X \; için \; q(x_k) \in [0,\infty)$

olacağından, $\forall k \; ve \; x_k \in X$ için,

$$f_k\left(q(x_k)\right) \leq K \quad (6)$$

ve dolayısıyla (5) deki dizi içinde,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k} \leq \sum_k k^{-s}\left[K\right]^{p_k} \leq K^H \sum_k k^{-s} < \infty$$

olacağından $x \in \ell(p,F,q,s)$ dir. Fakat $I_1 = \{m_k : k = 1,2,...\}$ dersek,

$$\sum_k a_k y_k = \sum_{k \in I_1} a_{m_k} \frac{u}{a_{m_k} q(u)} = \frac{u}{q(u)} \sum_{k \in I_1} 1$$

olacağından $\sum_k a_k y_k$ ıraksaktır. Çünkü $I_2 = \{m_k : m_k \leq n\}$ dersek, $s_n = \dfrac{u}{q(u)} \sum_{k \in I_2} 1$ olup, dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} q(s_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{q(u)}{q(u)} \sum_{k \in I_2} 1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in I_2} 1 = \sum_{k \in I_1} 1 = \infty$$

olacaktır. Bu da kabulümüzle çelişir. O halde $(a_k) \in \Phi$ dir.

Teorem 4

$$\ell_\infty \subseteq M\left[\ell(p,F,q,s)\right] \subseteq \ell_\infty(p,F,s)$$

dir.

İspat:

$a = (a_k) \in \ell_\infty$ olsun. Bu durumda ∀k için $|a_k| \leq K$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece $\forall x \in \ell(p,F,q,s)$ için,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(a_k x_k)\right)\right]^{p_k} = \sum_k k^{-s}\left[f_k\left(|a_k| q(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \sum_k k^{-s}\left[f_k\left(Kq(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq K^H \sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Bu da $a \in M\left[\ell(p,F,q,s)\right]$ demektir. Şimdi kabul edelim ki, $a \in M\left[\ell(p,F,q,s)\right]$ olsun. Bu taktirde, $\forall x \in \ell(p,F,q,s)$ için $ax \in \ell(p,F,q,s)$ dir. q(u)>0 olacak şekilde u∈X sabit vektörü için $r \in IN$ olmak üzere, $x^r = \left(\theta,\theta,...,\dfrac{u}{q(u)},...\right)$ dizisini göz önüne alalım. Buna göre,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k^r)\right)\right]^{p_k} = r^{-s}\left[f_r(1)\right]^{p_r}$$ olup,

$\forall r \in IN$ için bu seri yakınsak olacağından, $\forall r \in IN$ için $ax^r \in \ell(p,F,q,s)$ olmalıdır. Buna göre $\forall r \in IN$ için,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(a_k x_k)\right)\right]^{p_k} = \sum_k k^{-s}\left[f_k\left(|a_k| q(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq r^{-s}\left[f_r\left(a_r\right)\right]^{p_r} < \infty$$

olur. Bu da $a \in \ell_\infty(p,F,s)$ demektir.

Teorem 5

Her hangi $F=(f_k), G=(g_k) \; ve \; H=(h_k)$ modulus fonksiyonları ile $q, q_1 \; ve \; q_2$ yarınorm fonksiyonları ve $s, s_1, s_2 \geq 0$ ve (M1), (M2) şartları sağlansın. Buna göre,

i) $s > 1 \; ise \; \ell(p,G,q,s) \subseteq \ell(p,FoG,q,s)$

ii) $\ell(p,G,q,s) \cap \ell(p,H,q,s) \subseteq \ell(p,G+H,q,s)$

iii) $\ell(p,F,q_1,s) \cap \ell(p,F,q_2,s) \subseteq \ell(p,F,q_1+q_2,s)$

iv) q_1 kuvvetli q_2 $ise \; \ell(p,F,q_1,s) \subseteq \ell(p,F,q_2,s)$

v) $\sup_k \dfrac{g_k(t)}{h_k(t)} < \infty, \; \forall t > 0$ ise $\ell(p,H,q,s) \subseteq \ell(p,G,q,s)$

vi) $s_1 \le s_2$ ise $\ell(p,F,q,s_1) \subseteq \ell(p,F,q,s_2)$ olur.

İspat:

i) $\forall k$ *için* f_k lar sıfırda sağdan sürekli olduğundan (M2) den ε>0 için 0<δ<1 olacak şekilde ∃δ >0 ∍ 0≤t≤δ iken $f_k(t) < \varepsilon$ dur. $I_1 = \{k \in IN : g_k(q(x_k)) \le \delta\}$ $I_2 = \{k \in IN : g_k(q(x_k)) \le \delta\}$ dersek Lemma 1'in ispatındaki metod kullanılırsa (M1) den,

$$g_k(q(x_k)) > \delta \ iken \ f_k(g_k(q(x_k))) \le \{2 f_k(1)/\delta\} g_k(q(x_k))$$

elde edilir. Böylece $x \in \ell(p,G,q,s)$ ve s >1 için,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k o g_k(q(x_k))\right]^{p_k} = \sum_{k\in I_1} k^{-s}\left[f_k o g_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$+\sum_{k\in I_2} k^{-s}\left[f_k o g_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\le \sum_{k\in I_1} k^{-s}[\varepsilon]^{p_k} + \sum_{k\in I_2} k^{-s}\left[\{2 f_k(1)/\delta\} g_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\le \max(e^1,e^2)\sum_k k^{-s} + \max(d^1,d^2)\sum_k k^{-s}\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada

$$e^1 = \varepsilon^{\inf p_k},\ e^2 = e^M, d^1 = \{2 f_k(1)/\delta\}^{\inf p_k}, d^2 = \{2 f_k(1)/\delta\}^M$$

(7)

şeklindedir. Böylece $x \in \ell(p,FoG,q,s)$ olduğu gösterilmiş olur.

ii) $\forall k \ ve \ x_k \in X \ için \ q(x_k) \ge 0$ olduğundan Eşitsizlik (a) dan,

$$\left[(g_k + h_k)(q(x_k))\right]^{p_k} = \left[g_k(q(x_k)) + h_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\le C\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k} + C\left[h_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$ ve

$\forall k \ için \ k^{-s} > 0$ olduğundan,

$$k^{-s}\left[(g_k + h_k)(q(x_k))\right]^{p_k} \le$$

$$Ck^{-s}\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k} + Ck^{-s}\left[h_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada k=1 den ∞'a kadar toplam alırsak,

$x = (x_k) \in \ell(p,g_k,q,s) \bigcap \ell(p,h_k,q,s)$ iken $x = (x_k) \in \ell(p, g_k + h_k, q, s)$ olduğu görülür.

iii) Bu da (ii) dekine benzer olarak,

$$k^{-s}\left[f_k((q_1+q_2)(x_k))\right]^{p_k} \le$$

$$Ck^{-s}\left[f_k(q_1(x_k))\right]^{p_k} + Ck^{-s}\left[f_k(q_2(x_k))\right]^{p_k}$$

eşitsizliğinden elde edilir.

iv) q_1 kuvvetli q_2 ise Tanım 3 den $\forall k \ ve \ x_k \in X \ için \ q_2(x_k) \le Kq_1(x_k)$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir.

Böylece, $x \in \ell(p,F,q_1,s)$ ise,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k(q_2(x_k))\right]^{p_k} \le \sum_k k^{-s}\left[f_k(Kq_1(x_k))\right]^{p_k} \le K^M \sum_k k^{-s}\left[f_k(q_1(x_k))\right]^{p_k} < \infty$$

olur ki, bu da $x \in \ell(p,F,q_2,s)$ demektir.

v) $\sup_k \dfrac{g_k(t)}{h_k(t)} < \infty,\ \forall t > 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \in [0,\infty)$ için $\dfrac{g_k(t)}{h_k(t)} \le K$ olacak şekilde K>1 sabiti vardır. $\forall k \ ve \ x_k \in X \ için \ q(x_k) \in [0,\infty)$ olduğundan, $\forall k \ ve \ x_k \in X$ için

$$\frac{g_k(q(x_k))}{h_k(q(x_k))} \le K$$

ve

$$\frac{\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k}}{\left[h_k(q(x_k))\right]^{p_k}} \le K^{p_k} \le K^M$$

dolayısıyla, veya

$\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k} \le K^M \left[h_k(q(x_k))\right]^{p_k}$ olur ki, buradan da $k^{-s} > 0$ olduğundan,

$$k^{-s}\left[g_k(q(x_k))\right]^{p_k} \le K^M k^{-s}\left[h_k(q(x_k))\right]^{p_k}$$

elde edilir. Yine burada k=1 den ∞'a kadar toplam alınırsa sonuç elde edilr.

vi) $s_1 \le s_2$ olsun. $\forall k \ için \ 0 \langle k^{-1} \le 1$ olduğundan, $\forall k \ için \ k^{-s_2} \langle k^{-s_1}$ olur. Böylece $\forall k \ ve \ x_k \in X$ için,

$$k^{-s_2}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} \le k^{-s_1}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan da k=1 den ∞'a kadar toplam alınırsa sonuç elde edilir.

Teorem 6

(M1) ve (M2) şartları sağlansın. Buna göre,

i) $s>1\ ise\ \ell(p,q,s)\subseteq \ell(p,F,q,s)$,

ii) $q_1 \equiv q_2\ ise\ \ell(p,F,q_1,s)\equiv \ell(p,F,q_2,s)$,

iii) $\ell(p,F,q)\subseteq \ell(p,F,q,s)$,

iv) $\ell(F,q)\subseteq \ell(F,q,s)$.

İspat:

i) Teorem 5 (i) de $g_k(t)=t$ alınırsa, $s>1\ iken\ \ell(p,q,s)\subseteq \ell(p,F,q,s)$ olduğu görülür.

ii) $q_1 \equiv q_2\ ise\ \forall u\in X\ için\ T_1 \le q_1(u)/q_2(u) \le T_2$ olacak şekilde $T_1\ ve\ T_2$ pozitif sayılar vardır. Buradan da Teorem 5 (iv) den sonuç elde edilir.

iii) Teorem 5 (vi) de $s_1=0,\ s_2=s$ alınırsa, $\ell(p,F,q)\subseteq \ell(p,F,q,s)$ olduğu görülür.

iv) Teorem 5 (vi) de $s_1=0,\ s_2=s$ ve $\forall k$ için $p_k=1$ alınrsa, $\ell(F,q)\subseteq \ell(F,q,s)$ elde edilir.

Teorem 7

s>1 ve (M1) sağlansın. Bu durumda,

i) $\ell_\infty(q)\subseteq \ell(p,F,q,s)$,

ii) $\ell(p,F,q,s)\equiv S(X)$,

iii) q sınırlı ise $\ell(p,q,s)\equiv \ell(p,F,q,s)\equiv S(X)$ dir.

İspat:

i) $x\in \ell_\infty(q)$ olsun. Bu taktirde $\forall k\ için\ q(x_k)\le K$ olacak şekilde pozitif K sabiti vardır. (M1) den ve $\forall k$ için f_k artan olduğundan $\forall k\ için\ f_k\left(q(x_k)\right)\le f_k(K)\le T$ olacak şekilde $T>1$ sabiti bulunabilir. Böylece, s>1için,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} \le \sum_k k^{-s}\left[T\right]^{p_k} \le T^M \sum_k k^{-s} < \infty$$

olacağından $x\in \ell(p,F,q,s)$ elde edilir.

ii) (M1) sağlanmış olsun. Bu durumda (6) dan herhangi $x=(x_k)\in S(X)$ için s>1 olduğundan,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k} \le \sum_k k^{-s}\left[K\right]^{p_k} \le K^M \sum_k k^{-s} < \infty$$

elde edilir ki, bu da $x\in \ell(p,F,q,s)$ demektir. O halde $S(X)\subseteq \ell(p,F,q,s)$ dir. $S(X)\supseteq \ell(p,F,q,s)$ olduğu zaten açıktır. Bu ikisinden de $\ell(p,F,q,s)\equiv S(X)$ elde edilir.

iii) q sınırlı olsun. Bu durumda $\forall k\ ve\ x_k\in X$ için,

$$q(x_k)\le T \tag{8}$$

olacak şekilde $T\rangle 1$ sabiti bulunabilir. O halde herhangi $x=(x_k)\in S(X)$ için s>1 olduğunda,

$$\sum_k k^{-s}\left[q(x_k)\right]^{p_k} \le \sum_k k^{-s}\left[T\right]^{p_k} \le T^M \sum_k k^{-s} < \infty$$

elde edilir ki, bu da $x\in \ell(p,q,s)$ demektir. Böylece $S(X)\subseteq \ell(p,q,s)$ olur. $S(X)\supseteq \ell(p,q,s)$ olduğu açıktır. Bu ikisinden de $\ell(p,q,s)\equiv S(X)$ elde edilir. Yine (8) ve (M1) den $\forall k$ için f_k lar artan olduğundan, $\forall k\ ve\ x_k\in X\ için\ f_k\left(q(x_k)\right)\le K$ olacak şekilde $K>1$ sabiti vardır. Böylece herhangi $x=(x_k)\in S(X)$ için s>1 olduğunda (ii) de olduğu gibi $x\in \ell(p,F,q,s)$ elde edilir ki, bu da $S(X)\subseteq \ell(p,F,q,s)$ demektir. $S(X)\supseteq \ell(p,F,q,s)$ olduğundan $\ell(p,F,q,s)\equiv S(X)$ elde edilir. Buradan da, $\ell(p,q,s) \equiv S(X) \equiv \ell(p,F,q,s)$ olduğu görülür.

Teorem 8

(M2) şartı sağlansın. Buna göre,

i) $\ell(F,q) \subseteq \ell(q)$,

ii) $\ell(p,F,q) \subseteq c_o(q)$ dur.

İspat:

i) Kabul edelim ki, $x=(x_k)\in \ell(F,q)$, fakat $x \notin \ell(q)$ olacak şekilde bir $x=(x_k)$ dizisi vardır. $x \notin \ell(q)$ olduğundan pozitif tamsayıların artan bir (k_n) alt dizisi bulabiliriz, öyle ki, $\sum_{v=k_{n-1}}^{k_n-1} q(x_v) \geq 1$ dir. $\forall v$ için f_v modulus fonksiyonu olduğundan,

$f_v(1) \leq f_v\left(\sum_{v=k_{n-1}}^{k_n-1} q(x_v)\right) \leq \sum_{v=k_{n-1}}^{k_n-1} f_v\left(q(x_v)\right)$ elde edilir. $x=(x_k)\in \ell(F,q)$ olacağından, $s_n=\sum_{v=1}^{n} f_v\left(q(x_v)\right)$ dersek, (s_n) yakınsak dolayısıyla Cauchy dizisidir. O halde $\forall \varepsilon>0 \; için \; \exists n_o \ni, \forall i,j>n_o \; için \; \left|s_i-s_j\right|<\varepsilon$ dur. Bu n_o'a karşılık n'yi öyle seçelim ki $i=k_{n-1}>n_o \; ve \; j=k_n-1>n_o$ olsun. Bu duruma, $f_v(1) \leq \sum_{v=k_{n-1}}^{k_n-1} f_v\left(q(x_v)\right)<\varepsilon$ olur ki, bu da modulus fonksiyon özellikleriyle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $x\in \ell(q)$ olmalı.

ii) $x\in \ell(p,F,q)$ olsun. Bu durumda, $\lim_{k\to\infty}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}=0$ ve dolayısıyla, (M2) den $\forall 1>\varepsilon>0 \; için \; \exists k_o \ni k>k_o$ için, $\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}<\varepsilon<1$ dir. $\forall k \; için \; p_k \leq M$ olacağından $k>k_o$ iken, $\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{M} \leq \left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}<\varepsilon<1$ olacaktır. Buradan da,

$$\lim_{k\to\infty}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{M}=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} q(x_k)=0$$

elde edilir ki, bu da $x\in c_o(q)$ demektir.

Teorem 9

$t=(t_k) \; ve \; r=(r_k)$ sınırlı diziler ve $\forall k\in IN$ olsun. Bu durumda, $\ell(t,F,q)\subseteq \ell(r,F,q)$ dir.

İspat:

$x\in \ell(t,F,q)$ olsun. Bu durumda $\forall 1>\varepsilon>0 \; için \; \exists k_o \ni k>k_o$ iken, $\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{t_k}<\varepsilon<1$ dir. $\forall k \; için \; t_k \leq r_k$ olacağından $k \rangle k_o$ iken, $\left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{r_k} \leq \left[f_k\left(q(x_k)\right)\right]^{t_k}$ olur. Buradan da $x\in \ell(r,F,q)$ elde edilir.

Sonuç

$\forall k\in IN$ için,

i) $0<p_k\leq 1 \; ise \; \ell(p,F,q)\subseteq \ell(F,q)$

ii) $p_k \geq 1 \; ise \; \ell(p,F,q)\supseteq \ell(F,q)$

İspat:

i) Teorem 9 da $\forall k\in IN$ $p_k=t_k \; ve \; r_k=1$ alınırsa sonuç elde edilir.

ii) Yine Teorem 9 da $\forall k\in IN$ için $p_k=r_k \; ve \; t_k=1$ alınırsa sonuç elde edilir.

Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada $\ell(p,f,q,s)$, uzayının genelleştirmesi olan $\ell(p,F,q,s)$, uzayı incelendi. Daha önce tanımlanan uzayların çoğu özelliklerinin benzer şekilde $\ell(p,F,q,s)$ uzayında da geçerli olduğu (bazı durumlarda uzayların genelleştirilmesinde kullandığımız modulus fonksiyon dizilerine ek şartlar konuldu) görüldü. Biz çalışmamızda modulus fonksiyon yardımıyla tanımlanan ve daha önce modulus fonksiyon dizisi yardımıyla genelleştirilmemiş $\ell(p, f, q, s)$ uzayını ele aldık, benzer durumdaki diğer uzaylarda da benzer durumların geçerli olduğu gösterilebilir.

Kaynaklar

Banerji, P.K.; Galiz, A.S., 2000. Weighted composition operators on the modulus function space. J.Indian Math.Soc.67(1-4): 53-58.

Başarır, M., 2001. Strongly summable difference sequence spaces defined by a modulus. Plandöken Matematik Günleri Sempozyumu Bildirileri. 28-30 Haziran 2001, Erzurum. 43-44.

Bhardwaj, V.K., Singh, N., 2001. Some new sequence spaces defined by $\left|\bar{N}, p_n\right|$ summability and a modulus function. Indian J. pure appl. Math., 32(12):1789-1801.

Bhardwaj, V. K., Bala, I., 2009. The sequence space F(Xk, f, p, s) on seminormed spaces, Tamkang J. Math. 40: 247–256

Bilgin, T., 1992. Seminormlu uzaylarda $\ell(p, f, q, s)$ dizi uzayı ve $w(A, p, f, q, s)$ toplanabilme (Doktora tezi), Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematil Anabilim Dalı, Kayseri.

Bilgin, T., 1994. The sequence space `(p, f, q, s) on seminormed spaces. Bull. Calcutta Math. Soc. 86: 295–304.

Bilgin, T., 1996. On strong A-summability defined by a modulus, Chinese J. Math. 24 159–166.

Bilgin, T., 2003. Some sequence spaces defined by a modulus. Intern. Math. J. 3(3): 305-310.

Bilgin, T.,2004., Lacunary strong A-convergence with respect to a sequence of modulus functions, Appl. Math. Comput. 151: 595–600.

Bilgin, T, Altun, Y., 2007, Strongly (V λ , A, p)-summable sequence spaces defined by a modulus, Math. Model. and Anal. 12: 419–424.

Bulut, E., Çakar, Ö., 1979. The sequence spaces I(p,s) and related matrix transformations. Comm. Fac. Scie. Ankara University, Ser. A, 28: 33-44.

Connor, J., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull., 32 (2):194-198.

Esi, A., 1999b. Some new sequence spaces defined by a modulus function. Math. Slovaca, 49(1): 53-61.

Esi, A., 2000. Some new sequence spaces defined by a modulus function. İstanbul Üniv. Fen Fak.Mat.Derg. 55/56: 17-21.

Işik, M., 2011. Strongly almost (w, λ, q)-summable sequences, Math. Slovaca 61:779–788

Karakaya, V., Şimşek N., 2004. On lacunary invariant seuqence spaces defined by a sequence of modulus functions, Appl. Math. Comput. 156: 597–603.

Kolk, E., 1990. Sequence spaces defined by a sequence of modulus. Abstracts of Conference Problems of pure and applied mathematics. Tartu. 131-134.

Kolk, E., 1993. On strong boundedness and summability with respect to a sequence of moduli. Acta et Commentations Tartuensis, 960: 41-50

Kolk, E., 1997. F-seminormed sequence spaces defined by a sequence of modulus functions and strongly summability, Indian J. Pure Appl.Math., 28: 1547-1566.

Kolk, E., 2013. On generalized sequence spaces defined by modulus functions, Acta Et Commentationes

Univ. Tartuensis de Mathematica,Vol 17,No 2:179 - 205.

Maddox, I. J., 1970. Element of Functional Analysis. Camb. Univ. Press Maddox, I. J., 1986. Sequence spaces defined by a modulus. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100:161-166.

Nakano, H., 1953. Concave modulars. J. Math. Soc. Japan, 5:29-49.

Raj, K., Sharma, S. K., 2011. Difference sequence spaces defined by a sequence of modulus functions, Proyecciones 30: 189–199.

Ruckle, W. H., 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors in bounded. Canad. J. Math., 25:973-978.

Soomer, V., 2000. On r-convex sequence spaces defined by a modulus functions. Acta Comment. Univ.Tartu. Math.(4): 17-22.

Şahiner, A., 2002. Some new paranormed Spaces defined by modulus function. Indian J. Pure Appl. Math., 33(2): 1877-1888.

Wilansky, A., 1964. Functional analysis. Blaisdell publishing company, New York.