Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi/ Journal of the Institute of Natural & Applied Sciences 22 (2): 197-199, 2017

Araştırma Makalesi / Research Article

Bir T_n Turnuvasının Spanning Yollarının Ekstremum Sayıları Üzerine Bir Not

Mehmet Şerif Aldemir

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
msaldemir@yyu.edu.tr

Özet: Bu makalede bir T_n turnuvasının spanning yollarının maksimum ve minimum sayısının, bu turnuvadaki maksimal kuvvetli alt turnuvalarının spanning yollarının maksimum ve minimum sayılarının çarpımına eşit olduğu ispatlanmıştır. Bir turnuvanın spanning yollarının maksimum sayısı için daha önce verilmiş bulunan üst sınırın dahada küçülebileceği gösterilmiş ve minimum sayısı içinde yeni bir aralık elde edilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Graf Teorisi, Turnuva, Geren Yol, Ekstremum Sayılar

A Note On The Extremum Numbers Of Spannıng Paths Of A T_n Tournament

Abstract: In this paper, we prove that the maximum (minimum) number of spanning paths of a T_n tounament is equal to the product of the maximum (minimum) of spanning paths of maximal strong subtounaments in that tournament. It has been show that the upper bound given for the maximum number of the spanning paths of a tournament is possible to be decreased and a new interval is expressed in case of the minimum number.
Keywords: Graph Theory, Tournament, Spanning Path, Extremum Numbers

Giriş

Yönlü grafların bir sınıfını oluşturan ve yönsüz graflarla çözülemeyen pek çok probleme çözüm getiren turnuvaların ilk kez graf olarak ele alınması ve incelenmesi (Harary ve ark. 1965) tarafından yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda bunları (Harary ve Moser, 1966); (Moan, 1968) ve (Reid ve Beineke, 1978) çalışmaları izlemiştir.

Bu çalışmada, (Reid ve Beineke, 1978) tarafından daha önce verilen ve gelecek bölümde Teorem 2.3 olarak ifade edilen ve spanning yollar için verilen maksimum sayı daha da küçültülmüş ve yine (Reid ve Beineke, 1978) tarafından daha önce verilen ve gelecek bölümde Teorem 2.4 olarak ifade edilen ve minimum yollar için verilen aralık daraltılarak yeni bir aralık bulunmuştur. Yani daha önceki aralığın daha küçük bir alt aralığı elde edilmiştir.

Spanning Yollar

Turnuva tipleri ve spanning yollar hakkında detaylı bilgiler için (Harary ve Palmer, 1973); (Harary, 1969); (Moon, 1968); (Moon, 1966); (Wilson, 1972) ve (Reid ve Beineke, 1978) çalışmalarına bakılabilir. Spanning yollar hakkında bazı sonuçları detaya ve ispatlara girmeksizin verelim.

Teorem 2.1. (Moon, 1968) Her turnuvadaki spanning yolların sayısı tek sayılır.

Sonuç 2.2. (Wilson, 1972) Her turnuva bir spanning yola sahiptir.

Teorem 2.3. (Reid ve Beineke, 1978) Bir T_n turnuvasındaki spanning yollarının maksimum sayısı;

$$H(n) \le \frac{(n+1)!}{2^{\frac{3}{4}n-3}}$$

dir .

Teorem 2.4. (Reid ve Beineke, 1978) Herhangi bir kuvvetli T_n turnuvasındaki spanning yollarının minimum sayısı;

$$6^{\frac{1}{4}(n-1)} \leq h(n) \leq \begin{cases} 3.5^{\frac{1}{5}(n-3)}, n \equiv 0\ (mod\ 3) \\ 5^{\frac{1}{3}(n-1)}, n \equiv 1\ (mod\ 3) \\ 9.5^{\frac{1}{5}(n-5)}, n \equiv 2\ (mod\ 3) \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.5. (Aldemir, 1993) Bir turnuvanın üstünlük derecesine göre sıralanmış maksimal kuvvet alt turnuvaları $T^1, T^2, \dots, T^q$ ve $T_n = T^1 + T^2 + \cdots + T^q$ ise bu turnuvanın hiçbir spanning yolu üzerinde bulunamayan en az ayrıt sayısı;

$$|T^1|\sum_{k=3}^{q}|T^k| + |T^2|\sum_{k=4}^{q}|T^k| + \dots + |T^{q-2}||T^q|$$

dır .

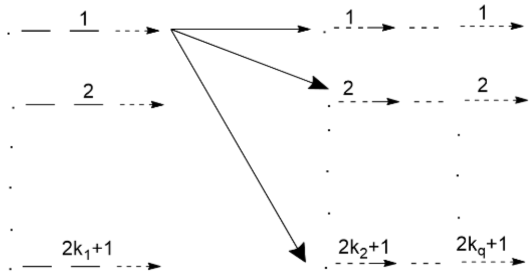
Tablo 2.1. Bir T_n turnuvasındaki spanning yolların sayıları

n	3	4	5	6	7
H(n)	3	5	15	45	189
h(n)	3	5	9	15	25

Tablo 2.1 de görüldüğü gibi; $n > 4$ olduğundan kuvvetli T_n turnuvasındaki spanning yolların ı maksimum sayısı minimum sayısından farklı olduğu için bu turnuvanın spanning yollarının ekstremum sayıları söz konusudur (Reid, 1968). (Chartrand ve ark. 1986) tarafından topolojik olarak verilen aşağıdaki teoremi yeniden amacımıza uygun olarak verelim.

Teorem 2.6. Bir T_n turnuvasının üstünlük derecesine göre sıralanmış maksimal kuvvetli altturnuvaları $T^1, T^2, \dots, T^q$ olmak üzere ve $T_n = T^1 + T^2 + \cdots + T^q$ ise, T_n turnuvasındaki spanning yolların max(min) sayısı, bu altturnuvaların spanning yolların max(min) sayılarının çarpımına eşittir.

İspat Teorem 2.1 den dolayı bir T_n turnuvasının üstünlük derecesine göre sıralanmış maksimal kuvvetli altturnuvaları $T^1, T^2, \dots, T^q$ ve altturnuvalarındaki spanning yolların max(min) sayıları sırasıyla, $2k_1 + 1, 2k_2 + 1, \dots, 2k_q + 1$ ve bunların her birinin spanning yollarını, Şekil 2.1. de görüldüğü gibi kesikli ayrıtlar ile gösterelim.



Şekil 2.1. Bir T_n turnuvasının üsütnlük derecelerine göre sıralanmış altturnuvaları

Maksimal kuvvetli $T^1, T^2, \dots, T^q$ altturnuvaları üstünlük derecesine göre sıralanmış olduklarından her $1 \leq i \leq j \leq q$ için $T^i \rightarrow T^j$ olur ki bu tümevarım ile gösterilebilir.

$T^1 \rightarrow T^2$ olduğundan T^1 deki her tepe T^2 deki her tepeden üstündür. Dolayısıyla T^1 deki $(2k_1 + 1)$ adet spanning yolun son tepeleri de T^2 deki $(2k_2 + 1)$ adet spanning yolun ilk tepelerinden üstündür. Bu son tepelerin hepsini ilk tepelerin tümü ile birleştirdiğimizde $(T^1 + T^2)$ altturnuvasında $(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)$ adet spanning yol elde edilir.

$(T^1 + T^2 + \cdots + T^{q-1})$ altturuvasında $2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_{q-1} + 1)$ adet spanning yol olduğunu varsayalım. $(T^1 + T^2 + \cdots + T^{q-1}) \rightarrow T^q$ olduğundan $(T^1 + T^2 + \cdots + T^{q-1})$ altturuvasındaki her tepe T^q turnuvasındaki her tepeden üstündür. Bu nedenle $(T^1 + T^2 + \cdots + T^{q-1})$ deki $(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_{q-1} + 1)$ adet spanning yolun son tepeleri de T^q turnuvasındaki $(2k_q + 1)$ adet spanning yolun son tepelerinden üstündür. Bu son tepelerin hepsini ilk tepelerin tümü ile birleştirdiğimizde $(T^1 + T^2 + \cdots + T^q)$ altturuvasında $(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \ldots (2k_q + 1)$ adet spanning yol olduğu sonucuna varılır. $T_n = T^1 + T^2 + \cdots + T^q$ olduğundan, T_n turnuvasındaki spanning yolların max(min) sayısı da $(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \ldots (2k_q + 1)$ adettir.

Sonuç 2.7. Bir T_n turnuvasının üstünlük derecesine göre sıralanmış maksimal kuvvetli altturnuvaları $T^1, T^2, \ldots, T^q$ olmak üzere ve $T_n = T^1 + T^2 + \cdots + T^q$ ise, T_n turnuvasındaki spanning yolların max(min) sayısı;

$$H(n) = H(|T^1|)H(|T^2|) \ldots H(|T^q|) \leq \prod_{i=1}^{q} \frac{(|T^i| + 1)!}{2^{\frac{3}{4}|T^i| - 3}}$$

olur.

İspat Teorem 2.3 ve Teorem 2.6 dan sonuç direkt olarak elde edilir.

Sonuç 2.8. Bir T_n turnuvasının maximal kuvvetli $T_n = T^1 + T^2 + \cdots + T^q$ altturnuvalarından *r* tanesi $3m_r$ tepeli, *s* tanesi $3m_s + 1$ tepeli ve *t* tanesi $3m_t + 2$ tepeli ise T_n turnuvasındaki spanning yolların minimum sayısı;

$$6^{\frac{1}{4}(n-q)} \leq h(n)$$
$$\leq \begin{cases} 3^r.5^{\frac{1}{3}(n-3r)}, & r = q \; ve \; s = t = 0 \; ise \\ 5^{\frac{1}{3}(n-s)}, & s = q \; ve \; r = t = 0 \; ise \\ 9^t.5^{\frac{1}{3}(n-5r)}, & t = q \; ve \; r = s = 0 \; ise \\ 3^r.5^{\frac{1}{3}(n-3r-s)}, & r + s = q \; ve \; t = 0 \; ise \\ 3^{(r+2t)}.5^{\frac{1}{3}(n-3r-5t)}, & r + t = q \; ve \; s = 0 \; ise \\ 9^t.5^{\frac{1}{3}(n-s-5t)}, & s + t = q \; ve \; r = 0 \; ise \\ 3^{(r+2t)}.5^{\frac{1}{3}(n-3r-s-5t)}, & r + s + s = q \; ise \end{cases}$$

dir.

İspat Teorem 2.4 ve Teorem 2.6 birlikte düşünülürse sonuç direkt olarak elde edilir.

Dikkat edilirse Sonuç 2.7 deki üst sınırın küçüldüğü ve Sonuç 2.8 deki aralığın daraldığı görülür. Bunun sebebi Teorem 2.5 te söz konusu olan ayrıtların hesaplamaya tabi olmamasıdır. T_n turnuvasındaki spanning yolların minimum ve maksimum sayısı ise sırasıyla geçişli ve düzgün (veya hemen hemen düzgün) turnuvalarda bulunmaktadır.

Kaynaklar

Aldemir, M.Ş., 1993. Bir T_n turnuvasının hiçbir spanning yolları üzerinde bulunmayan ayrıtlarının sayısı üzerine. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi. 4; 4:26-35.

Chartrand, G., Lesniak, L., Zhang, P., 1986. Graphs and Digraphs. Chapman and Hall/CRC 375p. New York, USA.

Harary, F., Moser, L., 1966. The theory of round robin tournaments. Amer. Math. Monthly. 73: 213-246.

Harary, F., Palmer, E.M., 1973. Graphical Enumeration. Academic Press. 498p. New York, USA

Harary, F., 1969. Graph Theory. Addison-Wesley Reading. 203p. New York, USA.

Harary, F., Norman, R.Z., Cartwright, D., 1965. Structural models: An introduction to the theory of directed graphs. John Wiley & Sons 456p. New York, USA.

Moon, J.W., 1968. Topics on Tournaments. Holt Rinehart and Winston. 306p. New York, USA.

Moon, J.W., 1966. On subtournaments of a tournament. Canad. Math. Bull. 9: 297-301.

Reid, K.B., Benieke, L.W., 1978. Selected Topics in Graph Theory. Academic Press. 256p. London, UK.

Wilson, R.J., 1972. Introduction to Graph Theory. Academic Press. 345p. New York, USA.