



Periyodik Sınır Değer Problemlerinin Artık Sinir Ağı Çözümleri için Optimizasyon Yöntemleri Üzerine Karşılaştırmalı Bir Çalışma

Gülsüm İŞMAN^{1,*} , Korhan GÜNEL² 

¹ Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 09010, Aydın, Türkiye

² Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 09010, Aydın, Türkiye

MAKALE BİLGİSİ

Makale Gönderim 01/07/2024

Kabul 01/07/2024

Anahtar Sözcükler:

Yapay Sinir Ağları

Derin Öğrenme

Diferansiyel Denklemler

Optimizasyon

Periyodik Sınır Koşulları

ÖZET

Bu makale, periyodik sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde artık sinir ağlarının kullanımını araştırmaktadır. Çalışmada, adi diferansiyel denklemler için mevcut nümerik tekniklerden bahsedildikten sonra, verilen denklemlerin artık sinir ağları (ResNet) ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu süreçte oluşturulan artık sinir modelinin eğitimi aşamasında, derin öğrenmede sıklıkla kullanılan ve türev tabanlı optimizasyon algoritmalarından olan AdaDelta, Adam, Nesterov Momentum ve Gradient Descent gibi yöntemleri kullanarak çözüme olan etkilerini incelemek için toplam karesel hata (SSE) metriklerine odaklanan deneysel çalışmalar yapılmıştır. Bulgularımız, önerilen derin öğrenme modelinin nümerik analizde kullanılan geleneksel sayısal çözüm yöntemlerine karşı etkili bir alternatif olduğunu ortaya koymaktadır.

1. GİRİŞ

Bu çalışma; reaksiyon-difüzyon problemleri (Wang vd., 2007) veya Güney Okyanusu'nda Antarktika Çevresel Akım olarak bilinen sıvı akışı problemi (Wang vd., 2021) gibi gerçek dünya problemlerini modellemek için kullanılan, analiz ve sayısal çözümleme alanlarında çalışan araştırmacıların ilgi konularından biri olan periyodik sınır değer koşullu adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi için makine öğrenmesi modelleri kullanılmıştır. Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek amacıyla Yapay Sinir Ağlarının (YSA) kullanılması, geleneksel nümerik yöntemlere göre çok sayıda avantaj sunar. Kısaca özetlemek gerekirse; yapay Sinir Ağları (YSA), karmaşık diferansiyel denklemlerin çözümleri de dahil olmak üzere fonksiyonlara yaklaşıma olanak tanıyan bir esnekliğe sahiptirler. Eğitim verilerinden çıkarım yaparak yeni, gözlemlenmemiş veri noktaları için hemen hemen kesin çözümler üretebilirler. Dolayısıyla özellikle kapalı formda verilen karmaşık ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmede avantaj sağlarlar.

Ayrıca klasik nümerik yöntemler, tanım uzayı boyutunun yüksek olduğu diferansiyel denklemleri çözerken sıklıkla zorluklarla karşılaşır. YSA modellerinin topolojisindeki esneklik ve derinlik bu tip problemlerin çözümünde kolaylık sağlayabilir. Üstelik paralel programlama yöntemleri ile eğitilebildiklerinden klasik sayısal yöntemlere kıyasla daha hızlı çözüm üretebilirler.

YSA modellerinin sunduğu bir diğer avantaj ise sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi klasik nümerik yöntemler, problemin tanım bölgesinin ayrıklaştırılarak bir ızgara oluşturmasını gerektirir. Üstelik nümerik çözümler sadece ızgaranın düğüm noktalarında elde edilebilir. Bunun aksine, YSA'lar ızgara oluşturma ihtiyacını ortadan kaldırır, ön işleme süresini azaltır, tanım bölgesinin her noktasında yaklaşık çözüm üretebilir.

Ek olarak model, eğitim süreci sırasında verilerden uyarlanabilir bir şekilde öğrenebilmelidir. Böylelikle keyfi parametre ve sabit adım boyutlarının manuel olarak ayarlanmasını gerektirebilen klasik yöntemlerin aksine, uyarlanabilir parametre

yaklaşımlarıyla nümerik metottan kaynaklı hatayı daha çok minimize edebilirler.

Periyodik sınır koşullarına sahip diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede kullanılan ve literatürde sıklıkla karşılaşılan klasik nümerik yöntemler kabaca sınıflandırıldığında, öne çıkan ilk yöntem olan Sonlu Farklar yönteminde, nümerik türevler sonlu farklarla ifade edilerek diferansiyel denklemin çözümleri oluşturulan ızgaradaki düğüm noktalarında sağlanır. Sonlu Elemanlar yönteminde ise karmaşık geometrik yapıya sahip tanım bölgesi daha küçük boyuttaki temel geometrik şekiller cinsinden parçalanıp çözüm elde edilmeye çalışılır. Geleneksel yöntemlerden periyodik sınır değer problemleri için en uygun yöntemlerden olan Spektral veya Galerkin yöntemlerinde çözüm fonksiyonu ağırlıklı olarak trigonometrik fonksiyonları baz fonksiyon olarak kullanarak çözüm fonksiyonuna yaklaştırmaya çalışır. Fourier serileri yaklaşımında olduğu gibi baz fonksiyonların periyodik karakteristiğe sahip baz fonksiyonların kullanımı çözüme yakınsamayı nispeten kolaylaştırır. Spektral yöntemlerin bir alt kümesi olan Pseudospectral Yöntemler ise genellikle Fourier dönüşümleri veya Chebyshev polinomlarını baz fonksiyon olarak kullanırlar. Diferansiyel denklemlerin makine öğrenmesi yaklaşımlarıyla çözülmesi literatürdeki yeni bir fikir değildir (Günel, ve Gör, 2022). Özel olarak periyodik sınır değer koşullarına sahip diferansiyel denklemlerin sinir ağı çözümleri üzerine çalışılmamıştır. Lakshmikantham (1989)'ın çalışması, periyodik sınır değer problemleri alanında literatüre öncü bir katkı sağlamıştır. Bu çalışmada yazar, alt ve üst çözüm kavramlarından yararlanarak periyodik sınır değer problemleri bağlamında ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için temel sonuçlar ortaya koymuştur. Ayrıca yazar çözülmemiş soruları tanımlayarak sonraki araştırma çabalarına ilham vermiştir. Çalışmasının ardından araştırmacılar, bu dar kapsamlı ve henüz yeterince olgunlaşmamış problem üzerinde çalışmaya başlamışlardır. Problemin yarattığı zorluğun temel nedeni, verilen periyodik sınır koşulları nedeniyle, çözümlerin düzenli aralıklarla tekrarlanmasını gerektirmesidir. Bu gereklilik, hem çözüm fonksiyonunun hem de türevlerinin sürekliliğin korunmasını zorunlu kıldığından çözüm varlık ve tekliliğinin gösterilmesini zorlaştırmaktadır. Dolayısıyla literatürdeki çalışmalar, ağırlıklı olarak Tanım 1 ile genel hali tanımlanan periyodik sınır değer problemlerinin belli bir sınıfını kapsar. Bu çalışmada ise, diferansiyel denklemlerin özel bir sınıfı olan ve Tanım 1 ile ifade edilen periyodik sınır koşullarına sahip diferansiyel

denklemlerin nümerik çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır.

Tanım 1. $t \in \Omega \subset \mathbb{R}$ bağımsız değişken, u , x değişkenine bağımlı bilinmeyen fonksiyon $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir Carathéodory fonksiyonu olsun.

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), x \in \Omega = [a, b] \\ u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b) \end{cases} \quad (1)$$

eşitlikleri tanımlı denkleme 2. mertebeden periyodik sınır koşullu adi diferansiyel denklem denir.

Lakshmikantham (1989), (1) eşitliğinin bir özel formu olarak $f \in C[\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere $\Omega = [0, 2\pi]$ için,

$$\begin{cases} -u'' = f(x, u), x \in \Omega = [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \quad (2)$$

biçimindeki ikinci mertebeden periyodik sınır değer koşullu diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı üzerine çalışmıştır.

Hu ve Lakshmikantham (1989) bu araştırmayı, birçok gerçek dünya uygulamasında evrimsel süreçlerin karakteristiği olan dürtüsel etkileri içeren birinci mertebeden diferansiyel denklemler için periyodik sınır değer problemlerini kapsayacak şekilde genişletmiştir. Nieto (2002), birinci mertebeden doğrusal olmayan impulsif diferansiyel denklemler için periyodik sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini araştırmıştır. He ve He (2004) yılında monoton iteratif yaklaşımı kullanarak birinci mertebeden impulsif integro-diferansiyel denklemler için doğrusal periyodik sınır değer problemlerinin minimum ve maksimum çözümlerini araştırmışlardır. Ardından Liu (2007), birden fazla pozitif çözüme sahip birinci dereceden periyodik sınır değer problemlerinin varlığını göstermek için Leggett-Williams teoremini ve sabit nokta teoremini koni genişlemesi ve sıkıştırmasını birlikte kullanmıştır. Ayrıca, Geng vd. (2008) zaman skalasında birinci mertebeden periyodik sınır değer problemleri için klasik alt ve üst çözüm yaklaşımını genişletmişlerdir.

Takip eden yıllarda araştırmacılar problemin kapsamını ikinci mertebeye genişletti. Taddei ve Zanolin (2007), Mawhin'in süreklilik ilkesini kullanarak doğrusal olmayan ikinci mertebeden periyodik sınır değeri problemlerine başarılı bir şekilde çözümler türetmiştir. Graef vd. (2008), ikinci mertebeden periyodik sınır değeri problemleri için Green fonksiyonuna güvenmeden negatif olmayan çözümler gösterdiler. Agarwal vd. (2010) sabit nokta teorisini kullanarak ikinci mertebeden periyodik sınır değeri problemlerine pozitif çözümler belirlemiştir.

Fu ve Wang (2010) ve Wang vd. (2011) bu tür problemlerin çözümünü açıklamak için üst ve alt çözüm yöntemini vurgulamışlardır. Zhao vd. (2014), dürtülerle ikinci mertebeden periyodik sınır değeri problemleri için çoklu pozitif çözümler gösterdiler. El-Sayed ve Gaafar (2018), periyodik sapsmalara sahip çok noktalı sınır koşulları, periyodik integral sınır koşulları ve periyodik yerel olmayan integral koşulları dahil olmak üzere üç tür sınır koşulu için çözümler oluşturmuşlardır.

Literatürde, yüksek mertebeden periyodik sınır değer problemleri ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır (Aftabizadeh, Xu ve Gupta, 1990; Omari ve Trombetta, 1992; Cabada, 1995; Kong vd., 2001; Sun ve Liu, 2005; Chu ve Zhou, 2006; Baslandze ve Kiguradze, 2006; Mukhigulashvili, 2007; Hall, 2008; Yu ve Pei, 2010). Ancak bu tip problemler merteye düşürme yöntemi kullanılarak rahatlıkla diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebileceğinden bu çalışmanın ilgi alanına girmemektedir. Ayrıca, son yıllarda kısmi türevli diferansiyel denklem üzerinde periyodik sınır değer problemleri üzerinde çalışma eğilimi olmuştur (Bikchantaev, 2020; Kulikov ve Kulikov, 2021).

(1) ve (2) eşitlikleri ile verilen formdaki periyodik sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin elde edildiği bu çalışmanın 2. Bölümünde; denklemi bir makine öğrenmesi modeli ile çözmek için gerekli sınır koşullarını sağlayan deneme fonksiyonu fonksiyonunun nasıl üretildiğinden bahsedilecek ve çalışmada tercih edilen Artık Yapay Sınır Ağının en iyileştirilmesi için literatürde kullanılan türev tabanlı optimizasyon algoritmalarından kısaca bahsedilecektir. Bölüm 3 ile çalışmada çözümü gerçekleştirilen örneklere ve deneysel çalışmalardan elde edilen bulgulara yer verilecektir. Bölüm 4 kullanılan yöntemlerin karşılaştırılmalarından elde edilen bulguların tartışıldığı ve yorumlandığı sonuç bölümüdür. Bu bölümde ayrıca bazı açık problemlere değinilmiştir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde Dirichlet koşulu sağlayan diferansiyel denklemlerin çözümü için bilinen optimizasyon algoritmalarından GMO algoritması anlatılacaktır.

2.1. Hermite Interpolasyonu ile Deneme Fonksiyonu Formunun Belirlenmesi

Hermite interpolasyonu, $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i \in [a, b]$ noktaları için x_i noktalarında bilinmeyen bir f fonksiyonunun değerlerini ve bu noktalardaki türev değerlerini kullanarak f fonksiyonunu yaklaşık olarak temsil etmek için kullanılan bir interpolasyon yöntemidir ve genel olarak $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \cong H(x)$ olacak şekilde Hermite interpolasyon polinomu $H(x)$, (3) denklemi ile tanımlanır.

$$H(x) = \sum_{i=0}^n [h_i(x)f(x_i) + k_i(x)f'(x_i)] \quad (3)$$

Eşitlik (3) ile görüldüğü üzere interpolasyon polinomu tanımlı $h_i(x)$ ve $k_i(x)$ Hermite baz fonksiyonlarının lineer bileşimlerinin toplamı olarak ifade edilebilir ve bahsi geçen baz fonksiyonları (1) denklemine verilen sınır koşulları kullanılarak Bölünmüş Farklar tablosuyla belirlenebilir. Bu amaçla,

$$u(a) = u(b) = A \text{ ve } u'(a) = u'(b) = B$$

periyodik sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için öncelikle kuadratür düğümlerini $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ olarak belirledikten sonra

$$z_0 = z_1 = x_0 \text{ ve } z_2 = z_3 = x_1$$

noktalarından oluşan yeni kuadratür kümesi oluşturulur. Ardından $i = 0, 1, \dots, n$ için 0. dereceden bölünmüş farklar $f[z_i] = f(z_i)$ ve 1. dereceden bölünmüş farklar ise (4) eşitliği ile tanımlanır.

$$f[z_i, z_{i+1}] = \begin{cases} f'(z_i), & z_{i+1} = z_i \text{ ise} \\ \frac{f(z_{i+1}) - f(z_i)}{z_{i+1} - z_i}, & \text{Aksi halde} \end{cases} \quad (4)$$

Çizelge 1: İkinci mertebeden periyodik sınır koşullu adi diferansiyel denklem için Bölünmüş Farklar tablosu.

i	z_i	$u[z_i]$	$u[z_i, z_{i+1}]$	$u[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}]$	$u[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}]$
0	a	A	B	$\frac{-B}{b-a}$	$\frac{2B}{(b-a)^2}$
1	a	A	0	$\frac{B}{b-a}$	
2	b	A	B		
3	b	A			

En genel haliyle, $m \in \mathbb{Z}^+$ için $\forall x_i$ noktası için $z_{i,m} = z_{i,m+1} = \dots = z_{(i+1),m-1} = x_i$ olacak şekilde

yeni kuadratür düğümleri kümesi oluşturulur ve m . dereceden bölünmüş farklar ise (5) eşitliği ile

tanımlanır.

$$f[z_i, \dots, z_{i+m}] = \begin{cases} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, & i = 0 \text{ ise} \\ \frac{f[z_{i+1}, \dots, z_{i+m}] - f[z_i, \dots, z_{i+m-1}]}{z_{i+m} - z_i}, & \text{Aksi halde} \end{cases} \quad (5)$$

Ardından bölünmüş farklar tablosu kullanılarak Hermite interpolasyon polinomu (6) denklemi tanımlandığı haliyle inşa edilebilir.

$$H(z) = \sum_{i=0}^n \{f[z_0, \dots, z_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (z - z_j)\} \quad (6)$$

(1) denkleminde verilen sınır koşulları ve (5) eşitliği ile tanımlı bölünmüş farklar kullanılarak Çizelge 1'de verilen bölünmüş farklar tablosu oluşturulur.

Bu durumda Çizelge 1 ve (6) denklemi kullanılarak (1) eşitliği ile tanımlı periyodik sınır değer problemi için Hermite interpolasyon polinomu (7) eşitliği ile ifade edilir.

$$H(z) = A + B(z - a) - \frac{B}{b - a}(z - a)^2 + \frac{2B}{(b - a)^2}(z - a)^2(x - b) \quad (7)$$

Eşitlik (7) ile tanımlı Hermite interpolasyon polinomunun ilgili problemin tüm sınır koşullarını sağladığı rahatlıkla görülebilir ve dolayısıyla makine öğrenmesi modeline bağımlı ve sınır koşullarını sağlayan deneme çözümü fonksiyonu $u_T(x)$ in formasyonu (8) denklemi ile tanımlanır.

$$u_T(x) = H(x) + \frac{1}{2}(x - a)^2(x - b)^2 \cdot \text{model}(x, \mathbf{W}) \quad (8)$$

Özel olarak (2) denklemi ile tanımlı sınır değer problemi için deneme çözümü formasyonu

$$u_T(x) = A + Bx - \frac{B}{2\pi}x^2 + \frac{B}{2\pi^2}x^2(x - 2\pi) + \frac{1}{2}x^2(x - 2\pi)^2 \cdot \text{model}(x, \mathbf{W})$$

haline dönüşür. (8) denklemde $x \in \Omega$ makine öğrenmesi modelinin girdisi ve d modelin bilinmeyen parametre sayısına bağlı problem uzayı boyutunu temsil etmek üzere $\mathbf{W} \in [-1, 1]^d$ modelin bilinmeyen ağırlık ve eşik değerlerini temsil eden satır vektörüdür.

$\forall x \in \Omega$ için $u_T(x) \approx u(x)$ olacağından $e(x) = |u(x) - u_T(x)|$ mutlak hata miktarı elde edilir. Ancak gerçek çözüm fonksiyonu olan u bilinmediğinden ve deneme çözümünün (1) eşitliğini yaklaşık olarak sağlaması gerektiğinden, maliyet fonksiyonu olarak aralığın parçalanışından elde

edilen düğüm noktalarında (9) eşitliği ile verilen toplam karesel hata değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

$$SSE(x, \mathbf{W}) = \sum_{x \in \Omega} \left(\frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} - f\left(x, u_T(x), \frac{\partial u_T}{\partial x}\right) \right)^2 \quad (9)$$

Dikkat edilirse (9) eşitliğinde tanımlı maliyet fonksiyonu, deneme çözümü fonksiyonunun x girdi değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin hesaplanmasını gerektirir. Çalışmada bu türevler yeterince küçük bir $h > 0$ sabit adım uzunluğu için sırasıyla (10) ve (11) eşitliklerinde verildiği haliyle 2. mertebeden yakınsama sağlayan nümerik türev yaklaşımıyla hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial u_T}{\partial x} = \frac{u_T(x+h) - u_T(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} = \frac{u_T(x+h) - 2u_T(x) + u_T(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (11)$$

Eşitlik (9)'dan görüleceği üzere maliyet fonksiyonu sadece girdi değişkenine bağlı değil aynı zamanda makine öğrenmesi modelinin bilinmeyen ağırlıkları ve eşik değerlerini içeren \mathbf{W} vektörüne bağlıdır. Dolayısıyla periyodik sınır değer problemini çözecek makine öğrenmesi modelini belirleme (12) denklemiyle belirlenen global optimizasyon problemine dönüşmüş olur.

$$\mathbf{W}^* = \underset{\mathbf{W} \in [-1, 1]^d}{\text{argmin}} \{E(x, \mathbf{W}) \mid x \in \Omega\} \quad (12)$$

Bu çalışmada, (8) denklemde ifade edilen makine öğrenmesi modeli, $\text{model}(x, \mathbf{W})$ Artık Sinir Ağı (Residual Neural Network, ResNet) olarak belirlenmiştir. Daha farklı sinir ağı modellerinin seçimi uygundur ve farklı bir çalışmaya konu edilebilir. Mevcut çalışmamızda ResNet modelinin eğitiminde kullanılan türev tabanlı optimizasyon algoritmalarının çözüme olan etkisi araştırılmıştır. Her ne kadar farklı tipte sınıflandırma, tahminleme ve kümeleme problemleri için optimizasyon algoritmalarının karşılaştırılmasını içeren araştırmalar (Akila ve Anitha, 2019; Tian, Zhang ve Zhang, 2023) mevcut olsa da çalışmada geçen problemin çözümü için bu tip bir inceleme yapılmamıştır. Çalışmada derin öğrenme modellerinin en iyileştirilmesinde sıklıkla kullanılan güncel optimizasyon yaklaşımlarından Gradyen Düşüm, Momentum, Nesterov Momentum, RMSProp, AdaDelta, AdaGrad, AdaMax ve Adam yöntemleri kullanılmıştır. Yöntemlerin tanımlarına ilgili literatür çalışmalarından erişilebilir (Kingma ve Ba, 2014; Fatima, 2020).

Takip eden bölümde (1) ve (2) ile tanımlı periyodik sınır değer problemlerine örnekler ve deneysel çalışmalardan elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Çalışmada en basit haliyle önce (2) formundaki ikinci mertebeden lineer periyodik sınır değer problemine örnek verilmiştir. Ardından daha genel olarak (1) ile tanımlı lineer olmayan bir periyodik sınır değer problemi önerilen yöntemle çözülmüştür. Deneysel çalışmaların tümünde öncelikle $i = 0, 1, \dots, N = 15$ için olacak şekilde $x_i = \frac{i\pi}{8}$ olacak şekilde $[0, 2\pi]$ aralığının parçalanışı elde edilmiştir. Elde edilen 16 kuadratur düğümü ResNet modelinin eğitimi için kullanılmıştır. Test aşamasında ise aralık içinde rassal olarak üretilen noktalarda çözüm aranmıştır. Tüm örneklerde karşılaştırmanın daha sağlıklı yapılabilmesi için aynı ağ topolojisi ve parametre değerleri kullanılmıştır. ResNet modeli bir girdi, 5 ara katman ve 1 çıktı katmanından oluşur. Ara katmanların tümünde altışar proses elemanı kullanılmış ve modelin atlama indeksi 3 olarak belirlenmiştir. Böylelikle model toplamda 229 bağlantı içerir ve ağın proses elemanları arasındaki bu bağlantıların ağırlıklarını temsil eden satır vektörü $\mathbf{W} \in [-1, 1]^{229}$ olarak belirlenmiştir. Ağ katmanları arasında geçişi düzenleyen aktivasyon fonksiyonu ReLU (Rectified Linear Unit) olarak seçilmiştir.

Optimal \mathbf{W}^* vektörünün belirlenebilmesi için ağın eğitimine başlanmadan ilk değer ataması yapılır. Ağın çözüme yakınsadığını gösterebilmek için her defasında farklı başlangıç değerlerine sahip \mathbf{W} vektörleri kullanılarak işlem 10 kez tekrarlanmıştır. Ağın eğitim sürecinin sonunda elde edilen ve (9) eşitliği ile tanımlı maliyet fonksiyonu değerlerinin ortalaması ve standart sapmaları hesaplanmıştır.

Ağın eğitim aşamasında durma kriterleri olarak belirlenen maksimum iterasyon sayısı 1000, ardışık iki iterasyonda oluşan mutlak değer değişimi

Çizelge 2: (13) eşitliği ile tanımlı lineer periyodik sınır değer problemi için eğitim kümesindeki bazı noktalarda elde edilen mutlak hata miktarları.

x	Adam	AdaDelta	AdaGrad	AdaMax	Gradyan		Nesterov	
					Düşüm	Momentum	Momentum	RMSProp
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\pi/8$	0.191	1.872	6.584	0.198	0.621	0.000	0.000	0.285
$3\pi/8$	0.409	5.653	13.472	0.425	1.978	0.120	0.525	0.685
$5\pi/8$	0.335	9.135	14.143	0.352	3.393	1.304	1.695	0.768
$7\pi/8$	0.007	8.827	8.193	0.004	4.247	0.154	2.951	0.488
$9\pi/8$	0.347	3.725	0.259	0.335	4.071	0.009	3.743	0.090

tolerans değeri ve bağıl hata tolerans değeri 10^{-12} ile sınırlandırılmıştır. Ek olarak, (10) ve (11) eşitlikleri ile tanımlı nümerik türev hesaplamalarında sabit adım uzunluğu $h = 0.05$ olarak alınmıştır. Tüm bu kısıtlamalar altında, iki farklı periyodik sınır değer problemi için türev hesabı gerektiren sekiz farklı optimizasyon yönteminin karşılaştırılması yapılmıştır.

Örnek 1.

$$\begin{cases} -u'' = u, & x \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) = 0, \\ u'(0) = u'(2\pi) = 1 \end{cases} \quad (13)$$

(13) denklemini ile tanımlı periyodik sınır değer probleminin gerçek çözümünün $u = \sin(x)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Çizelge 2 ve Çizelge 3 ResNet ağının farklı optimizasyon yöntemi ile eğitimi sonucu elde edilen mutlak hata değerlerinin sonuçlarını göstermektedir. Çizelge 2 ile problemin tanım bölgesinin ayrıklaştırılmasından elde edilen eğitim kümesi içinde yer alan noktalarda oluşan mutlak hata değerleri listelenmiştir. Çizelge 3 ise $[0, 2\pi]$ aralığında rastgele üretilen noktalarda hesaplanan nümerik çözümlerde oluşan mutlak hata miktarlarını gösterir.

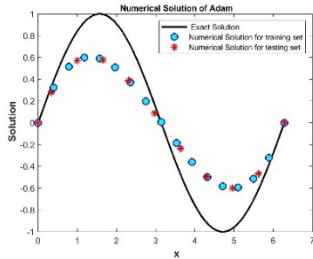
(13) ile tanımlı periyodik sınır değer problemi için önerilen yöntemden elde edilen yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 1'de gösterilmiştir.

Çizelge 2, Çizelge 3 ile (13) denkleminin farklı başlangıç değerlerine sahip \mathbf{W} parametre vektörü ile oluşturulan ResNet ağının 10 kez çalıştırılması sonucu elde edilen en iyi sonuçlara dair mutlak hata değerleri ve Şekil 1'de ise nümerik çözüm grafikleri verilmiştir.

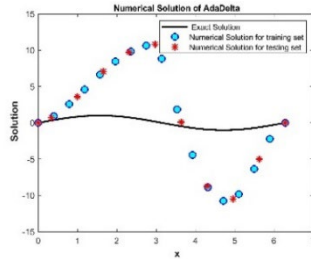
$11\pi/8$	0.417	9.757	4.255	0.408	2.800	0.137	3.629	0.137
$13\pi/8$	0.194	5.658	2.938	0.191	1.005	0.158	2.517	0.098
$15\pi/8$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0640	0.908	0.000
2π	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Çizelge 3: (13) eşitliği ile tanımlı lineer periyodik sınır değer problemi için bazı test noktalarında elde edilen mutlak hata miktarları

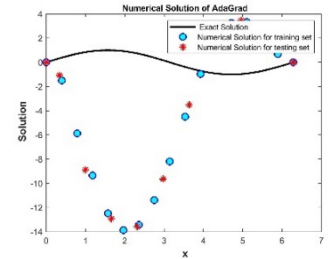
x	Gradyan				Nesterov			
	Adam	AdaDelta	AdaGrad	AdaMax	Düşüm	Momentum	Momentum	RMSProp
0.330	0.000	0.384	0.000	0.000	0.125	0.084	0.105	0.0640
0.992	0.044	2.784	1.390	0.046	0.936	0.576	0.793	0.404
1.653	0.266	6.065	9.712	0.275	2.135	1.147	1.832	0.713
2.314	0.419	8.987	13.912	0.434	3.328	0.158	2.892	0.774
2.976	0.351	10.638	14.300	0.364	4.141	0.045	3.640	0.567
3.637	0.082	0.549	9.803	0.086	4.272	0.093	3.793	0.230
4.299	0.234	7.798	3.044	0.230	3.588	0.166	3.212	0.051
4.960	0.416	9.502	2.566	0.412	2.242	0.136	2.019	0.149
5.621	0.365	4.361	4.434	0.363	0.750	0.047	0.678	0.078
6.283	0.147	0.000	2.352	0.146	0.000	0.000	0.000	0.000



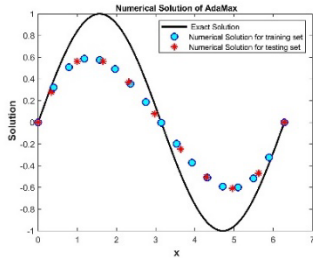
(a)



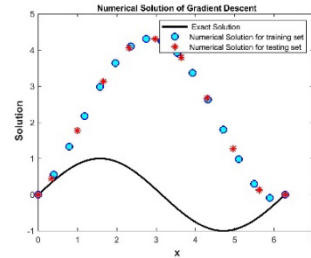
(b)



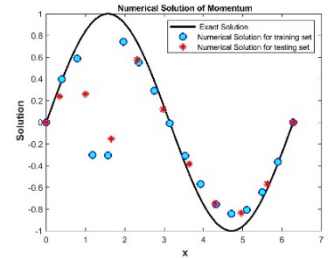
(c)



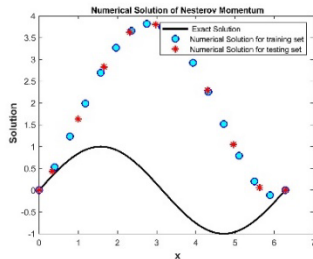
(ç)



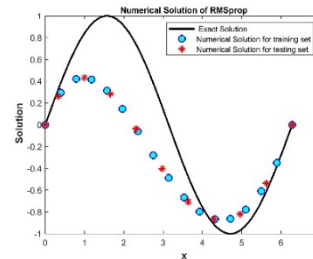
(d)



(e)



(f)



(g)

Şekil 1: (13) eşitliği ile tanımlı periyodik sınır değer problemi için ResNet modelinin çözüm grafikleri (a) Adam, (b) AdaDelta, (c) AdaGrad, (ç) AdaMax, (d) Gradyan Düşüm, (e) Momentum, (f) Nesterov Momentum, (g) RMSProp

Örnek 2. İkinci mertebeden lineer olmayan,

$$\begin{cases} (u')^2 = u \cdot u'' + 2, 0 \leq x \leq 2\pi \\ u(0) = u(2\pi) = 1 \\ u'(0) = u'(2\pi) = 1 \end{cases} \quad (14)$$

periyodik sınır değer probleminin genel çözümü $u = \cos x + \sin x$ şeklindedir. Bu problem için Hermite interpolasyonu yardımıyla inşa edilen

$$u_T = 1 + x - \frac{1}{2\pi}x^2 + \frac{1}{2\pi^2}x^2(x - 2\pi) + \frac{1}{2}x^2(x - 2\pi)^2 \text{Net}(x, \mathbf{W})$$

deneme fonksiyonu kullanılmıştır (İşman, 2014). ResNet modelinden eğitim ve test kümeleri için elde edilen mutlak hatalar sırasıyla Çizelge 4 ve Çizelge 5’de sunulmuştur. (14) ile tanımlı ikinci mertebeden lineer olmayan periyodik sınır değer problemi için önerilen yöntemden elde edilen yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 2’de gösterilmiştir.

Çizelge 4, Çizelge 5 ve Şekil 2’de, (14) denklemi ile tanımlı lineer olmayan sınır değer problemi için başlangıçta farklı \mathbf{W} parametre vektörü ile oluşturulan ResNet ağına 10 kez çalıştırılması

Çizelge 4: (14) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan periyodik sınır değer problemi için eğitim kümesindeki bazı noktalarda elde edilen mutlak hata miktarları.

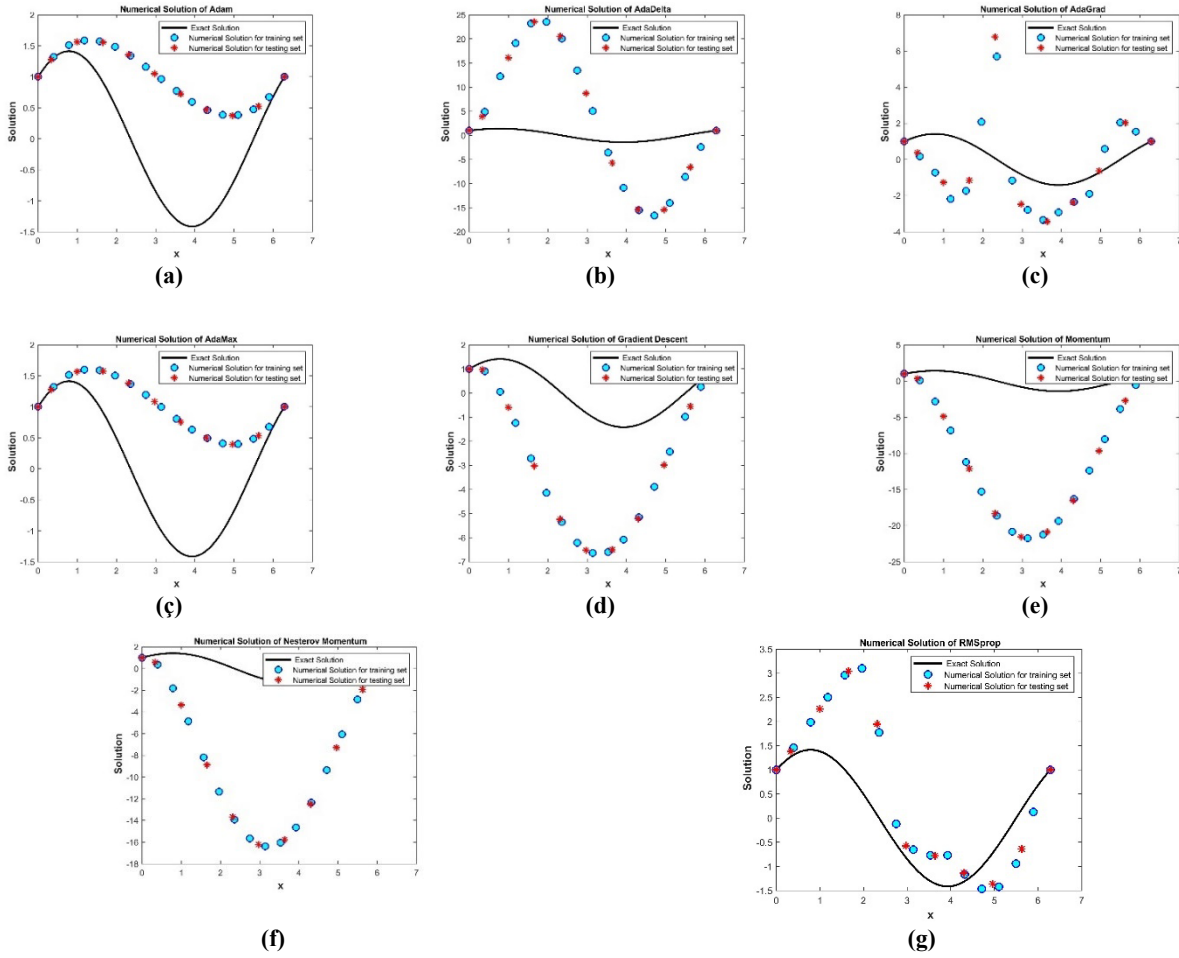
x					Gradyan		Nesterov	
	Adam	AdaDelta	AdaGrad	AdaMax	Düşüm	Momentum	Momentum	RMSProp
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\pi/8$	0.096	0.000	2.133	0.101	0.000	4.252	3.227	0.569
$3\pi/8$	0.572	10.816	2.726	0.589	1.361	12.205	9.191	1.962
$5\pi/8$	1.341	22.205	5.694	1.368	3.707	18.623	13.913	1.775
$7\pi/8$	1.966	20.048	1.779	2.000	5.345	20.745	15.386	0.3470
$9\pi/8$	2.012	6.079	1.499	2.046	5.638	17.945	13.235	0.643
$11\pi/8$	1.386	9.463	0.904	1.411	4.667	11.383	8.369	0.467
$13\pi/8$	0.475	15.615	2.042	0.485	2.885	3.869	2.843	0.943
$15\pi/8$	0.000	8.596	0.000	0.000	0.977	0.000	0.000	0.000
2π	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Çizelge 5: (14) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan periyodik sınır değer problemi için bazı test noktalarında elde edilen mutlak hata miktarları

x					Gradyan		Nesterov	
	Adam	AdaDelta	AdaGrad	AdaMax	Düşüm	Momentum	Momentum	RMSProp
0.330	0.009	2.657	0.879	0.010	0.294	0.895	0.682	0.107
0.992	0.179	14.715	2.644	0.187	1.973	6.246	4.731	0.878
1.653	0.645	22.693	2.058	0.663	3.932	13.020	9.796	2.132
2.314	1.300	20.521	6.722	1.326	5.290	18.378	13.735	1.890
2.976	1.872	9.557	1.644	1.904	5.692	20.715	15.386	0.249
3.637	2.078	4.321	2.082	2.114	5.148	19.512	14.417	0.576
4.299	1.786	14.040	1.051	1.817	3.888	15.172	11.170	0.182
4.960	1.099	14.656	0.098	1.119	2.257	8.934	6.565	0.639
5.621	0.351	6.760	1.855	0.358	0.726	2.870	2.110	0.815
6.283	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Çizelge 6: (13) ve (14) periyodik sınır değer problemleri için ortalama SSE değerleri

Yöntem	Örnek 1 (SSE)		Örnek 2 (SSE)	
	Eğitim Kümesi	Test Kümesi	Eğitim Kümesi	Test Kümesi
	Adam	$7.556 \times 10^{-2} \pm 3.109 \times 10^{-4}$	$7.556 \times 10^{-2} \pm 3.281 \times 10^{-4}$	$1.461 \pm 5.707 \times 10^{-2}$
AdaDelta	$4.266 \times 10^2 \pm 9.294 \times 10^2$	$4.277 \times 10^2 \pm 9.333 \times 10^2$	$3.058 \times 10^2 \pm 4.946 \times 10^2$	$3.065 \times 10^2 \pm 4.956 \times 10^2$
AdaGrad	$0.457 \times 10^2 \pm 4.470 \times 10^2$	$0.472 \times 10^2 \pm 4.468 \times 10^2$	$1.619 \times 10^2 \pm 2.117 \times 10^2$	$1.620 \times 10^2 \pm 2.120 \times 10^2$
AdaMax	$0.564 \times 10^{-2} \pm 4.549 \times 10^{-4}$	$0.564 \times 10^{-2} \pm 4.551 \times 10^{-4}$	$1.487 \pm 5.059 \times 10^{-4}$	$1.487 \pm 5.059 \times 10^{-4}$
Gradyan Düşüm	$1.961 \times 10^2 \pm 2.954 \times 10^2$	$1.961 \times 10^2 \pm 2.954 \times 10^2$	$2.415 \times 10^2 \pm 2.512 \times 10^2$	$2.415 \times 10^2 \pm 2.513 \times 10^2$
Momentum	$1.550 \times 10^2 \pm 1.887 \times 10^2$	$1.553 \times 10^2 \pm 1.887 \times 10^2$	$2.550 \times 10^3 \pm 5.295 \times 10^3$	$2.550 \times 10^3 \pm 5.295 \times 10^3$
Nesterov Momentum	$2.720 \times 10^2 \pm 2.644 \times 10^2$	$2.720 \times 10^2 \pm 2.644 \times 10^2$	$6.222 \times 10^1 \pm 1.019 \times 10^2$	$6.255 \times 10^1 \pm 1.019 \times 10^2$
RMSProp	$1.457 \times 10^1 \pm 2.125 \times 10^1$	$1.454 \times 10^1 \pm 2.137 \times 10^1$	$9.482 \times 10^2 \pm 1.809 \times 10^2$	$9.437 \times 10^2 \pm 1.797 \times 10^2$



Şekil 2: (14) eşitliği ile tanımlı periyodik sınır değer problemi için ResNet modelinin çözüm grafikleri (a) Adam, (b) AdaDelta, (c) AdaGrad, (ç) AdaMax, (d) Gradyan Düşüm, (e) Momentum, (f) Nesterov Momentum, (g) RMSProp modellerinin çalışmanın Giriş bölümünde bahsi

4. SONUÇ

Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin çözülmesi güç olan problemlerinden biri olarak periyodik sınır koşullu adi diferansiyel denklemlerin çözümleri makine öğrenmesi yaklaşımları ve derin öğrenme ağlarında kullanılan en iyileştirme yöntemleri ile elde edilmeye çalışılmıştır. Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi geleneksel yöntemlerle nümerik çözümleri elde edilirken genellikle problemin tanım bölgesinin ayrıştırılması yoluna gidilir. İstenilen hata payıyla çözüme yakınsama sağlanması için ayrıklaştırma yoluyla oluşturulan ızgaranın çok sayıda düğüm noktası içermesi gerekir ve bu süreç oldukça maliyetlidir. Bununla birlikte klasik yöntemler sadece düğüm noktalarında yaklaşık çözüm sunarken sinir ağı modelleri tüm tanım bölgesi üzerinde bir çözüm sunarlar. Çalışmada Artık Sinir Ağı kullanılması tercih edilmesinin temel sebebi budur.

Periyodik sınır koşullu diferansiyel denklemlerin çözümünde makine öğrenmesi

geçen klasik nümerik yöntemlerle karşılaştırılması ayrı bir çalışma konusu olacaktır.

Çözümü gerçekleştirilen örneklerden ilki, lineer yapıda olan ve çözümün varlığı teorik olarak ispatlanabilen ikinci mertebeden periyodik sınır problemidir. İkinci örnekte verilen problemin formu için ise çözümün var ve tek olduğuna dair teorik çalışmalar henüz yeterli düzeyde değildir. Bu örnek gerçek çözümden yola çıkılarak üretilmiştir. Çözüme yakınsamada karşılaşılan en büyük güçlük; periyodik sınır koşullarından kaynaklı olarak belli aralıklarla sürekli çözüm değerinin kendini tekrarlamasıdır. Bu durum toplam karesel hata miktarının yeterince düşmemesine neden olmaktadır. Üstelik çalışmada çözülen problemler için çözüm fonksiyonunun periyodu sınırlı tutulmuştur. Çözüm fonksiyonunun periyodu daha yüksek olan örnekler için çalışma tekrarlanabilir. Bu durumda hata miktarının daha çok artabileceği tarafımızdan öngörülmektedir. Karşılaştırılması yapılan optimizasyon yöntemleri arasından performans değerlendirilmesi yapıldığında

tek başına hangi yöntemin ayrıştığını söylemek güçtür. Örnek 1 ve Örnek 2 için Adam, AdaMax ve nispeten RMSProp yöntemleri çözüme daha iyi yakınsama gösterse de hangi optimizasyon yönteminin genelleme yapmak doğru olmaz. Problemin lineerliği, mertebesi ve derecesi, periyodu, sınır koşullarına göre optimizasyon yönteminin uygunluğu değişir. Bu aşamada önerilen, çalışmada kullanılan türev tabanlı yaklaşımların optimizasyon probleminin yüksek boyutundan kaynaklanan yerel minimumlarda takılma olasılığı nedeniyle popülasyon tabanlı heuristik en iyileme yöntemlerinin kullanılmalıdır.

Her ne kadar çalışmada yapılan çözümü gerçekleştirilen problemlerde gözlenmesi de, yapay sinir ağlarının eğitim sürecinde eğitim verilerine gereğinden fazla uyum sağlayıp genelleme yeteneklerini kaybedebileceği mutlaka dikkate alınmalıdır. Bu durumda test verileri için ağın ürettiği sayısal çözüm gerçek çözümlerden fazlaca uzaklaşabilir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için tez, toplu öğrenme (batch learning) yaklaşımı kullanılabilir.

Çalışmada kullanılan ResNet makine öğrenmesi modelinin, periyodik sınır değer problemlerini çözerken, çözüm fonksiyonunun periyodik yapısından dolayı tekrarlı davranışlarını tanımlamada yeterli düzeyde eğitilemediği görülmüştür. Bunun temel nedeni olarak, modelin topolojisi çok yalın ise ağın istenilen çözümleri üretmediği veya tersine önerilen model oldukça bir karmaşık topolojiye sahipse bu kez de ağın eğitimi çok maliyetli olacağı yorumuna ulaşılmıştır. Çalışmada önerilen model sezgisel olarak belirlenmiştir. Gözlendiği üzere, periyodik sınır koşullu diferansiyel denklemi çözebilecek ideal yapay sinir ağı topolojisini belirlemek oldukça güçtür. Haliyle elde edilen bulguların optimal sonuçlar olduğu söylenemez ve önerilen modelden daha iyi çözüm üreten daha farklı topolojiye sahip bir sinir ağı modeli bulunması daima olasıdır. Bu aşamada tarafımızdan önerilen, bağımsız alt yapay sinir ağları sürüsü ve sürü zekası yaklaşımları ile optimal ağ topolojisinin belirlenmesidir. Oluşturulacak sürü zekâsı yaklaşımı için sürüdeki ajanlar; yapay sinir ağının türü ve topolojisi, girdi verisinin kodlanması ve uygulanacak normalizasyon tekniği, ağın ara katman sayısı, ara katmanlardaki nöron sayısı, aktivasyon fonksiyonu, maliyet fonksiyonu, ağın çıktı formatının belirlenmesi, ağ ağırlıklarının başlangıç değerlerinin belirlenmesi

yöntemi gibi bileşenler ile karakterize edilip bu bileşenlerin optimal değerleri belirlenmelidir.

KAYNAKÇA

- Aftabizadeh, A.R., Xu, J. ve Gupta, C.P. (1990). Periodic boundary value problems for third order ordinary differential equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 14(1), 1-10 (1990). doi: [10.1016/0362-546X\(90\)90130-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90130-9).
- Agarwal, R., Sun, Y. ve Wong, P. (2010). Existence of positive periodic solutions of periodic boundary value problem for second order ordinary differential equations. *Acta Math. Hung.* 129(1-2), 166-181. doi: [10.1007/s10474-010-9268-6](https://doi.org/10.1007/s10474-010-9268-6).
- Akila Agnes, S., Anitha, J. (2019). Analyzing the Effect of Optimization Strategies in Deep Convolutional Neural Network. In: Hemanth, J., Balas, V. (eds) Nature Inspired Optimization Techniques for Image Processing Applications. Intelligent Systems Reference Library, vol 150. Springer, Cham. doi: [10.1007/978-3-319-96002-9_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96002-9_10)
- Baslandze, S.R. ve Kiguradze, I.T. (2006). On the unique solvability of a periodic boundary value problem for third-order linear differential equations. *Differ. Equ.* 42, 165-171. doi: [10.1134/S0012266106020029](https://doi.org/10.1134/S0012266106020029).
- Bikhantaev, I.A. (2020). Periodic Boundary Value Problem for a Linear Elliptic Equation of the Second Order in a Half Plane.. *Differ. Equ.* 56, 813–818. doi: [10.1134/S0012266120070010](https://doi.org/10.1134/S0012266120070010).
- Cabada, A. (1995). The method of lower and upper solutions for third order periodic boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 195, 568-589. doi: [10.1006/jmaa.1995.1375](https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1375).
- Chu, J. ve Zhou, Z. (2006). Positive solutions for singular non-linear third-order periodic boundary value problems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 64(7), 1528-1542. doi: [10.1016/j.na.2005.07.005](https://doi.org/10.1016/j.na.2005.07.005).
- El-Sayed, A.M.A. ve Gaafar, F.M. (2018). Existence of Solutions for Singular Second-Order Ordinary Differential Equations with Periodic and Deviated Nonlocal Multipoint Boundary Conditions. *J. Funct. Spaces*, 11. doi: [10.1155/2018/9726475](https://doi.org/10.1155/2018/9726475).
- Fatima, N. (2020). Enhancing Performance of a Deep Neural Network: A Comparative Analysis of Optimization Algorithms. *ADCAIJ: Advances in Distributed Computing and Artificial Intelligence Journal*, 9(2), 79–90. doi: [10.14201/ADCAIJ2020927990](https://doi.org/10.14201/ADCAIJ2020927990)
- Fu, X. ve Wang, W. (2010). Periodic Boundary Value Problems for Second-Order Functional Differential Equations. *J. Inequal. Appl.* 2010, 598405. doi: [10.1155/2010/598405](https://doi.org/10.1155/2010/598405).

- [10.1155/2010/598405](https://doi.org/10.1155/2010/598405).
- Geng, F., Xu, Y. ve Zhu, D. (2008). Periodic boundary value problems for first-order impulsive dynamic equations on time scales. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 69(11), 4074-4087. doi: [10.1016/j.na.2007.10.038](https://doi.org/10.1016/j.na.2007.10.038).
- Graef, J.R., Kong, L. ve Wang, H. (2008). A periodic boundary value problem with vanishing Green's function. *Appl. Math. Lett.* 21(2), 176-180. doi: [10.1016/j.aml.2007.02.019](https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.02.019).
- Günel, K. ve Gör, İ. (2022). Solving Dirichlet boundary problems for ODEs via swarm intelligence. *Math. Sci.*, 16, 325-341. doi: [10.1007/s40096-021-00424-2](https://doi.org/10.1007/s40096-021-00424-2).
- Hall, R. (2008). Periodic boundary-value problem for third-order linear functional differential equations. *Ukr. Math. J.* 60, 481-494 (2008). <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0069-9>.
- He, Z. ve He, X. (2004). Periodic boundary value problems for first order impulsive integro-differential equations of mixed type, *J. Math. Anal. Appl.* 296(1), 8-20. doi: [10.1016/j.jmaa.2003.12.047](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.12.047).
- Hu, S. v Lakshmikantham, V. (1989). Periodic Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Differential Systems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 13(1), 75-85. doi: [10.1016/0362-546X\(89\)90036-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(89)90036-9).
- İşman, G. (2024). *Derin Sinir Ağları Kullanarak Periyodik Sınır Koşullu Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümlerinin Elde Edilmesi*, Doktora Tezi, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi.
- Kingma, D. P., ve Ba, J. (2014). Adam: A Method for Stochastic Optimization. *ArXiv*. /abs/1412.6980
- Kong, L., Wang, S. ve Wang J. (2001). Positive solution of a nonlinear third-order periodic boundary value problem. *Int. J. Comput. Appl. Math.* 132(2), 247-253. doi: [10.1016/S0377-0427\(00\)00325-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00325-3).
- Kulikov, A.N. ve Kulikov, D.A. (2021). Cahn–Hilliard equation with two spatial variables. Pattern formation. *Theor. Math. Phys.* 207, 782–798. doi: [10.1134/S0040577921060088](https://doi.org/10.1134/S0040577921060088).
- Lakshmikantham, V. (1989). Periodic Boundary Value Problems of First and Second Order Differential Equations. *J. Appl. Math, Simulation*, 2(3) 8, doi: [10.1155/S1048953389000110](https://doi.org/10.1155/S1048953389000110).
- Liu, Y. (2007). Multiple solutions of periodic boundary value problems for first order differential equations. *Comput. Math. Appl.* 54(1), 1-8. doi: [10.1016/j.camwa.2006.09.007](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.09.007).
- Mukhigulashvili, S. (2007). On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 66(2), 527-535. doi: [10.1016/j.na.2005.11.046](https://doi.org/10.1016/j.na.2005.11.046).
- Nieto, J.J. (2002). Periodic Boundary Value Problems for First-Order Impulsive Ordinary Differential Equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 51(7), 1223-1232. doi: [10.1016/S0362-546X\(01\)00889-6](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00889-6).
- Omari, P. ve Trombetta, M. (1992). Remarks on the lower and upper solutions method for second- and third-order periodic boundary value problems. *Appl. Math. Comput.* 50(1), 1-21. doi: [10.1016/0096-3003\(92\)90007-N](https://doi.org/10.1016/0096-3003(92)90007-N).
- Sun, J. ve Liu, Y. (2005). Multiple Positive Solutions of Singular Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Acta Math. Sci.* 25(1), 81-88. doi: [10.1016/S0252-9602\(17\)30263-1](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30263-1).
- Taddei, V. ve Zanolin, F. (2007). Bound Sets and Two-Point Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations. *Georgian Math. J.* 14(2), 385-402. doi: [10.1515/GMJ.2007.385](https://doi.org/10.1515/GMJ.2007.385).
- Tian, Y., Zhang, Y., Zhang, H. (2023). Recent Advances in Stochastic Gradient Descent in Deep Learning. *Mathematics*, 11(3): 682. doi: [10.3390/math11030682](https://doi.org/10.3390/math11030682).
- Wang, W., Shen, J. ve Nieto, J.J. (2011). Periodic boundary value problems for second order functional differential equations. *J. Appl. Math. Comput.* 36, 173–186. doi: [10.1007/s12190-010-0395-6](https://doi.org/10.1007/s12190-010-0395-6).
- Wang, Y., Li, J. ve Cai, Z. (2017). Positive solutions of periodic boundary value problems for the second-order differential equation with a parameter. *Boundary Value Problems*, 49. doi: [10.1186/s13661-017-0776-y](https://doi.org/10.1186/s13661-017-0776-y).
- Wang, J., Zhang, W. ve Fečkan, M. (2021). Periodic boundary value problem for second-order differential equations from geophysical fluid flows. *Monatsh. Math.*, 195, 523–540. doi: [10.1007/s00605-021-01539-3](https://doi.org/10.1007/s00605-021-01539-3).
- Yu, H. ve Pei, M. (2010). Solvability of a nonlinear third-order periodic boundary value problem. *Appl. Math. Lett.* 23(8), 892-896. doi: [10.1016/j.aml.2010.04.005](https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.04.005).
- Zhao, Y., Chen, H. ve Qin, B. (2014). Periodic boundary value problems for second-order functional differential equations with impulse. *Adv. Differ. Equ.* 2014, 134. doi: [10.1186/1687-1847-2014-134](https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-134).