International Journal of Science and Education, 7(2), 100-130
Uluslararası Bilim ve Eğitim Dergisi, 7(2), 100-130
DOI: 10.47477/ubed.1513272
Makale Türü: Araştırma Makalesi
Başvuru Tarihi: 09.07.2024
Yayına Kabul Tarihi: 30.08.2024

Dinamik Geometri Yazılımlarıyla Zenginleştirilmiş İspat Etkinliklerinin Tasarlanması

Mücahit ŞAHİN [1*], Fatih KARAKUŞ[2], Muhammed ÖZSOY[3] & Tuğçe ÇINARGİL[4]

Öz

Geometri tümdengelimsel bir yapıya sahip olmasına karşın araştırmalar dinamik geometri yazılımları (DGY) ile geometrik iddiaları inceleyen öğrencilerin sıklıkla tümevarımsal doğrulamaları ispata tercih ettikleri, bu nedenle ispata gerek duymadan iddianın doğruluğunu kabul ettikleri ifade edilmektedir. Daha çok kağıt-kalemle yapılan ispatın DGY ortamında da gerçekleştirilebileceğinin öğrenciler tarafından fark edilmesi önemlidir. Bu bağlamda, DGY'nin ilişki kurma, keşfetme ve varsayım oluşturma potansiyeli ile ispat için kullanımı arasında bir boşluk olduğu söylenebilir. Bu boşluğun giderilmesinde sınıf içerisinde kullanılan DGY destekli etkinlikler önemli bir role sahiptir. Bu doğrultuda çalışmanın amacı, öğretmenlerin derslerinde kullanacakları DGY ile zenginleştirilmiş ispat etkinlikleri tasarlamaktır. Eylem araştırması yönteminin benimsendiği çalışmanın katılımcıları uygun örnekleme yöntemiyle belirlenen; 12 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile 10 yüksek lisans öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmada DGY ile zenginleştirilmiş etkinliklerin tasarlanmasında Fahlgren ve Brunström (2014)'ün teorik çerçevesinden yararlanılmıştır. Araştırmada veriler çalışma yaprakları, video kaydı ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Elde edilen veriler bağlamında etkinlikler yeniden düzenlenmiş ve son şekli verilmiştir. Bu kapsamda araştırmada DGY ile zenginleştirilmiş üç ispat etkinliği tasarlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dinamik geometri yazılımı, ispat, geometri öğretimi

Designing Proof Activities Enriched with Dynamic Geometry Software

Abstract

Although geometry has a deductive structure, research shows that students who examine geometric claims with dynamic geometry software (DGS) often prefer inductive verifications to proof, therefore they accept the truth of the claim without needing proof. It is important for students to realize that proofs, which are mostly done with paper and pencil, can also be carried out in the DGS environment. In this context, it can be said that there is a gap between the potential of DGS to establish relationships, discover and create hypotheses, and its use for proof. DGS supported activities used in the classroom have an important role in eliminating this gap. In this regard, the aim of the study is to design proof activities enriched with DGS that teachers will use in their lessons. The participants of the study, in which the action research method was adopted, were determined by the convenient sampling method; It consists of 12 primary school mathematics teacher candidates and 10 graduate students. In the research, the theoretical framework of Fahlgren and Brunström (2014) was used to design DGS-enriched activities. In the research, data were obtained from worksheets, video recordings and semi-structured interviews. In the context of the data obtained, the activities were rearranged and given their final form. In this context, three proof activities enriched with DGS were designed in the research.

Key Words: Dynamic geometry software, proof, geometry teaching

---

[1*]**Corresponding Author:** Doktora öğrencisi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, Türkiye, mucahit0580581@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2062-3048
[2]Profesör, Sivas, Türkiye, fkarakus@cumhuriyet.edu.tr, ORCID: 0000-0001-9581-520X
[3]Doktora öğrencisi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, Türkiye, muhammedozsoy.mu@gmail.com ORCID: 0000-0003-4522-8124
[4]Doktora öğrencisi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, Türkiye, tugceuzman@hotmail.com ORCID: 0000-0002-7444-4240

Giriş

Bilgi ve teknolojinin hızla gelişerek yenilendiği günümüz dünyasında bireylerin geleceği; bilgiye ulaşma, bilgiyi kullanma ve üretme becerilerine bağlı bulunmaktadır (MEB, 2005). Bilgisayarlar yalnızca hesaplama ve grafik çizmeyi kolaylaştırmakla kalmayıp aynı zamanda matematiksel problemlerin ve kavramları ekranlara taşımış, matematikçilerin yöntemlerini de değiştirmiştir (Baki, 1996). Bu yollardan bir tanesi belki de en etkilisi ispat öğretimine yeni yaklaşımlar getiren Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) kullanımıdır (Hanna, 2000). DGY ifadesi; Cabri Geometry, Geometers Sketchpad, Cinderalla ve GeoGebra gibi geometri için kullanılan çok özel geometri programlarının ortak adıdır. Öğrencilerin geometri öğrenme süreçlerinin geliştirilmesinde hem Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) raporlarında, hem de matematik öğretim programlarında (MEB, 2018a; MEB, 2018b) geometri öğretiminde DGY kullanımının önerildiği tespit edilmiştir. DGY öğrencilerin kolay ve hızlı öğrenmesini sağlayarak anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmelerine katkı sağlamaktadır. Özellikle DGY'deki sürükleme özelliği sayesinde öğrenciler, şekilleri hareket ettirerek çok kısa sürede birçok şekil elde edebilmekte ve kağıt-kalem çalışmalarına göre daha hızlı geribildirimler sunulabilmektedir (Marrades ve Gutierrez, 2000). Bununla beraber DGY geometrik ilişkilerin keşfedilmesi, değişmez özelliklerin fark edilmesi (Laborde, 2005) soyut matematiksel kavramların somutlaştırılması ile öğrencilerin geometriye yönelik motivasyon ve ilgilerinin artmasına imkan tanır (Baki ve Özpınar, 2007).

Dinamik geometri yazılımlarının sunduğu olanaklar, öğrencilerin geometride "araştırma yapmalarını" teşvik etmektedir (Luthuli, 1996). Özellikle öğrenciler, geometrik nesneler üzerinde sürükleme yoluyla deneyler yapabilir, farklı geometrik şekiller oluşturabilir ve bir varsayımın doğruluğunu ya da yanlışlığını rahatlıkla gözlemleyebilirler (De Villiers, 2003). Bununla beraber çıkarımlarda bulunabilir; genellemelere veya teoremlere ulaşabilirler. DGY'nin keşif, tahminde bulunma, doğrulama ve açıklama gibi matematiksel faaliyetler için fırsatlar sağladığı bilinmektedir (Hanna, 2000). Bu tür etkinlikler, aynı zamanda ispatın fonksiyonları olarak birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (De Villiers 1990; Hanna ve Jahnke 1996; Stylianides ve Ball 2008). Matematiğin anlaşılması ve kullanılması sürecinde ispat yapmanın önemli bir yeri vardır. Ayrıca ispat yöntemleri matematiği tanıma yolunda insanlara katkıda bulunmaktadır (Baki, 2020). Matematikte bir iddiayla ilgili olarak yapılan ispatlar; ilişkileri keşfetmede, anlamlandırmada ve bilginin ortaya çıkarılmasında önemli role sahiptir (Pekşen-Sağır, 2013). Yani ispat her durum ve koşulda ortaya atılan bir yargı, iddia veya sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlama çabasıdır (Güler vd., 2012). Bu iddianın bütün koşullarda genellenebilirliği gösterildiğinde ise ispat tamamlanmış olur (Baki, 2020). Baki (2020)'ye göre matematiksel ispatlar üç aşamada tamamlanmaktadır. Birinci aşama, iddianın doğruluğu veya yanlışlığının özel durumlar için araştırıldığı doğrulama aşamasıdır. İkinci aşama, iddianın niçin doğru ya da yanlış olduğunun izahının yapıldığı açıklama aşamasıdır. Üçüncü aşama ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlamanın yapıldığı genelleme aşamasıdır.

Fahlgren ve Brunström (2014) çalışmalarında Baki (2020)'den farklı olarak matematiksel bir ispatın aşamalarını ayrıntılandırarak keşfetme ve varsayımda bulunma, doğrulama, açıklama, ispat oluşturma ve genelleme şeklinde ifade etmişlerdir. Ayrıca bu araştırmacılar, öğrencilerin DGY'leri kullanarak bu aşamaları daha kolay takip edebileceklerini de belirtmişlerdir. Yapılan çalışmalarda DGY'lerin, öğrencilerin geometrik düşünme, görselleştirme ve ispat becerilerinin gelişmesine katkı sağladığı belirtilmiştir (Kılıç, 2013). Benzer şekilde Hoyles ve Healy (1999), bilgisayarla bütünleştirilmiş öğretim deneylerinin, öğrencilerin ispata ilişkin görüşlerini genişletmede ve özellikle formal olmayan argümanları formal ispatla ilişkilendirmede büyük ölçüde başarılı olduğunu vurgulamışlardır. Buna karşın öğrencilerin, DGY ile bir varsayıma ilişkin keşfetme ve denemeler yapmalarına rağmen nedeni açıklarken DGY'yi kullanmak yerine cebirsel formda ispat yapmaya yöneldikleri yine yapılan çalışmalarda belirtilmektedir (Fahlgren ve Brunström, 2014). Benzer şekilde yapılan araştırmalarda DGY kullanarak geometriye yönelik bu keşfetmeye dayalı yaklaşımın, bazı eğitimciler ile öğrenciler de geometride tümdengelimli ispatın tümevarımsal bir yaklaşım lehine terk edilmesi şeklinde bir anlayışın oluşmasına neden olduğu da ifade edilmektedir. Alan yazında DGY'lerin sınıf içi kullanımlarına yönelik etkinliklere rastlanmasına (Kaya ve Öçal, 2018; Genç, 2010; Genç ve Öksüz, 2016; Sarı, 2021; Yılmaz vd., 2013) karşın DGY ile ispatı birleştiren etkinlikleri geliştirmeye yönelik çok az sayıda çalışmaya (De Villiers, 2003; 2004; Fahlgren ve Brunström, 2014; Güven vd., 2010) rastlanmaktadır. Ayrıca DGY ile zenginleştirilmiş ortamlarda verilen bir iddiaya ilişkin ispatın nasıl yapılacağına ilişkin etkinliklere de çok fazla rastlanmamaktadır. Öğretmenlerin DGY'leri derslerinde kullanmalarında bazı sorunlarla karşılaştıkları alan yazında yapılan çalışmalarda ifade edilmektedir. Örneğin Hohenwater ve Lavicza (2008), öğretmenlerin derslerinde etkili bir şekilde GeoGebra'yı kullanabilmeleri için yardıma ihtiyaçları olduğunu belirtmişlerdir. Hanna (2000) ise öğretmenlerin geometri öğretiminde DGY'i kullanırken tümdengelimsel ispat anlayışını terk ederek deneysel doğrulama yönünde bir inanışa sahip olduklarını vurgulamıştır. Öğretmenlerin DGY'leri derslerine entegre edebilmelerinin bir yolu DGY ile zenginleştirilmiş etkinlikleri tasarlamak ve kullanmaktır. Yani DGY ile etkinlik temelli bir öğretimle (Komatsu ve Jones, 2018) matematik öğretimi zenginleştirilmeye çalışılmalıdır.

1980'lerden itibaren DGY'ler kullanılmasına rağmen, DGY'lerle etkinlik tasarımı ve etkinlerin DGY ortamında nasıl uyguladıklarına yönelik az sayıda çalışmaya rastlanmaktadır (Komatsu ve Jones, 2018). Bundan dolayı DGY ile zenginleştirilmiş ortamlarda ispat etkinliklerinin nasıl yapılacağına ilişkin öğretmenlere yol gösterici etkinliklerin sunulması öğretim programlarında yer alan bilgi ve iletişim teknolojilerden yararlanılması vurgusunun da amacına ulaşmasına katkı sağlayacaktır. Bunun yanında bu tür etkinlikler öğretmenlerin derslerinde kendilerinin geliştireceği etkinlikler için de bir yol haritası sunacaktır. Bu doğrultuda bu araştırmanın amacı, DGY ile zenginleştirilmiş ispat etkinlikleri tasarlamaktır.

Teorik Çerçeve

DGY, geometri öğretiminde geometrik şekiller ve kavramlar arasındaki özellikleri incelemeye ve ilişkileri keşfetmeye yardımcı olan araçlardır. DGY'nin dinamik olmasını sağlayan en önemli özelliği sürükleme fonksiyonuna sahip olmasıdır (Arzarello vd., 2002; Frank ve Mariotti, 2010; Hölzl, 2001; Laborde, 2002; Leung, 2011). Hölzl (2001) temel olarak DGY'deki sürükleme özelliği sayesinde bir yapının istenen bir özelliğe sahip olup olmadığını belirleme ve yapı içerisinde yeni özellik ve ilişkileri arama şeklinde iki farklı kullanımının olabileceğini ifade etmiştir. DGY'deki sürükleme özelliği, ilişkilerin belirlenmesi ve keşfedilmesinde yardımcı olurken aynı zamanda bu özellik sayesinde ilişkilerin nedenleri de belirlenebilmektedir. Okullarda yeni teknolojilerin kullanımının artması, teknolojinin geometri öğretimine entegrasyonunu zorunlu kılmaktadır. Bununla beraber yapılan çalışmalar, DGY kullanımının sağladığı olanakları, sınıftaki öğrenme ortamına yansıtan etkinliklere ihtiyaç olduğunu göstermektedir. Alan yazında yapılan birçok çalışmada dinamik geometri ortamlarının; öğrencilere keşfetme, tahminde bulunma, açıklama ve genelleme gibi matematiksel faaliyetleri gerçekleştirme imkanı sağladığı ifade edilmektedir. Bu bağlamda Fahlgren ve Brunström (2014) DGY ile öğrencilerin keşfetme, tahminde bulunma, açıklama ve genelleme yapma gibi matematiksel faaliyetleri gerçekleştirebilecekleri etkinlikler tasarlamak amacıyla teorik bir çerçeve öne sürmüşlerdir.

Bu araştırmada ispat süreçlerini inceleyen Fahlgren ve Brunström (2014)'ün kullandığı teorik çatıdan yararlanılmıştır. Fahlgren ve Brunström (2014) teorik çerçevelerinde DGY ile zenginleştirilmiş bir etkinliğin;

- Uygun bir yapı inşa etme ve bir iddia oluşturma
- İddianın doğrulanması ya da çürütülmesi
- İddianın doğruluğunu açıklama

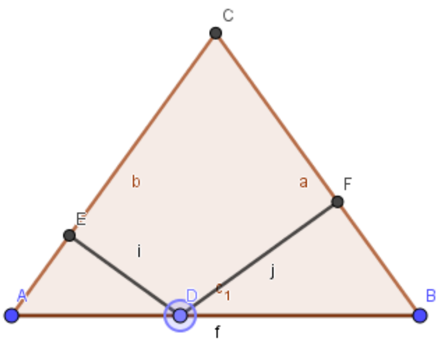
- Bir ispat oluşturma
- Yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma

Şeklinde beş aşamadan oluşması gerektiğini ifade etmektedir. Aşağıda bu aşamalara ilişkin detaylı bilgilere ve örneklere yer verilmiştir.

Uygun yapı inşa etme ve iddia oluşturma:

Bu aşamada öğrencilerden matematiksel bir durumla/problemle ilgili DGY'de uygun bir yapı oluşturması ve oluşturdukları yapı içerisindeki ilişkileri incelemeleri beklenir. Öğrenciler inceledikleri ilişkiler sonucunda verilen matematiksel duruma yönelik çeşitli iddialar oluştururlar. Örneğin "*İkizkenar üçgen şeklindeki bir adanın eşit olmayan kenarı üzerine bir ev inşa edilecektir. Bu ev eşit olmayan kenar üzerinde nereye inşa edilirse evin, adanın eşit kenarlarına olan uzaklıkları toplamı en az olur*?" şeklindeki probleme ilişkin öğrencilerden DGY kullanarak uygun bir yapının inşası ve bu yapıya dayanarak bir iddianın oluşturulması beklenir. Öğrencilerden aşağıdaki adımları takip ederek Şekil 1'deki görsele benzer bir yapı oluşturarak bu yapıya uygun bir iddia oluşturması istenmektedir.

- DGY kullanarak bir ABC ikizkenar üçgeni inşa ediniz.
- ABC ikizkenar üçgeninin eş olmayan kenarı üzerinde bir D noktası belirleyiniz. Bu nokta evin inşa edileceği noktayı göstermektedir.
- D noktasından ABC üçgeninin eş olan kenarlarına dikmeler çizip bu dikmelerin uzunluklarını hesaplayınız.
- Dikmelerin uzunlukları toplamını bulunuz.
- D noktasını [BC] üzerinde sürükleyiniz. Uzunluklar toplamı nasıl değişmektedir? Gözlemleyiniz.
- Gözlemlerinizi göz önüne alarak bir iddia oluşturunuz ve aşağıya yazınız.



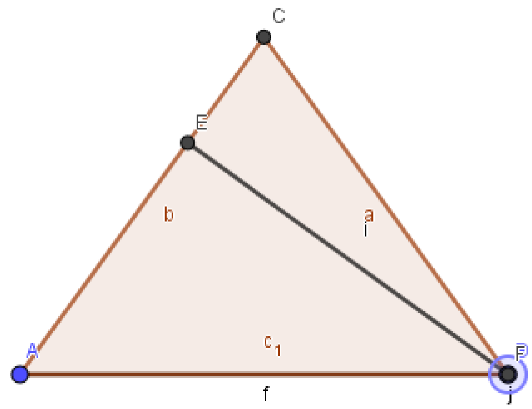
Şekil 1. Uygun Yapı İnşa Etme ve İddia Oluşturma Aşamasında Öğrenci Çizimi

Öğrenci, D noktasını hareket ettirdiğinde "İ" ve "J" doğru parçalarının toplam uzunluklarının değişmediğini gözlemleyerek "*bir ikizkenar üçgende eş olmayan kenar üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamının her zaman sabit*" olduğuna ilişkin iddiasını oluşturması beklenmektedir.

İddianın doğrulanması ya da çürütülmesi:

Bu aşamada öğrencilerden oluşturdukları iddiaların geçerli olup olmadığını sınamalarına yönelik eylemleri yapmaları beklenmektedir. Bunun için öğrenciler DGY'nin sürükle-bırak ya da iz oluşturma gibi özelliklerini kullanarak oluşturdukları iddiaların geçerliğini test ederler. Bu aşamada öğrenciden aşağıdaki adımı takip ederek iddiasını doğrulaması veya çürütmesi beklenmektedir.

• ABC üçgenini köşe noktalarından sürükleyiniz ve farklı ikizkenar üçgenler oluşturunuz. D noktasını bu üçgenlerin [BC] üzerinde sürükleyiniz. Neler gözlemlediniz? İddianız hala geçerli midir?



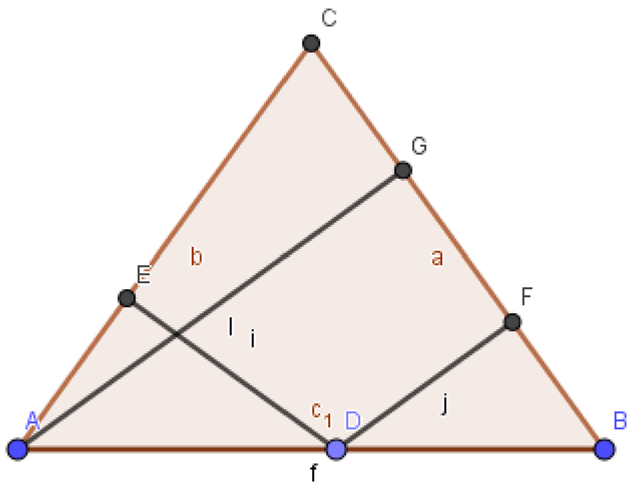
Şekil 2. İddianın Doğrulanması ya da Çürütülmesi Aşamasında Öğrenci Çizimi

Öğrenci, farklı ikizkenar üçgenlerde D noktasını hareket ettirdiğinde eş kenarlara çizilen uzunlukların hala aynı kaldığını test ederek iddianın korunduğunu ifade etmesi beklenmektedir.

İddianın doğruluğunu açıklama:

Bu aşamada öğrencilerden iddialarının doğruluğunu DGY kullanarak açıklamaları beklenmektedir. "*Tahmininizin neden doğru olduğunu kendi kelimelerinizle açıklayın*" gibi ifadelerle öğrenciler formal olmayan ve sezgisel temsillerin önemli olduğu açıklamalara teşvik edilmelidir. Ayrıca öğrenci isterse açıklamalarını bir kâğıda da yazabilir. Bu aşamada öğrenciden aşağıdaki adımları takip ederek iddiasının doğruluğunu gerekçelendirmesi beklenmektedir.

• B noktasından [AC]'ye [BG] yüksekliğini çiziniz.
• D noktasını B noktası üzerine gelecek şekilde sürükleyiniz. [DF] ile [BG] arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz.
• Benzer şekilde C noktasından [AB]'ye [CH] yüksekliğini çiziniz.
• D noktasını C noktası üzerine gelecek şekilde sürükleyiniz. [DE] ile [CH] arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz.



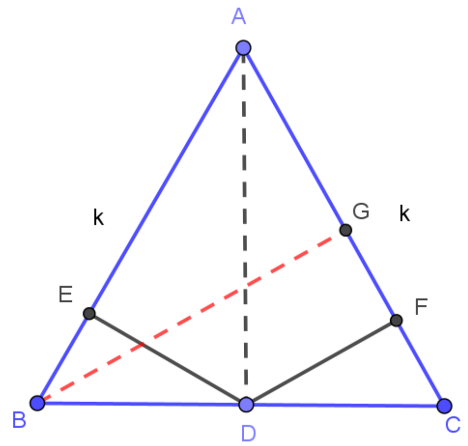
Şekil 3. İddianın Doğruluğunun Açıklanma Aşamasında Öğrenci Çizimi

Öğrenci, bir ikizkenar üçgende eş olmayan kenar üzerinde alınan bir noktadan eş kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamının eş olan kenara çizilen yüksekliğin uzunluğuna eşit olmasından dolayı her zaman sabit olacağını ifade etmesi beklenir.

İspat oluşturma:

Aksiyomatik yapıya uygun olarak öğrencilerden bir ispat oluşturmaları beklenir. İspat oluşturma aşamasında öğrenciler DGY'den yararlanabilir. Bu aşamada öğrenciden aşağıdaki adımları takip ederek formal bir ispat oluşturması beklenir.

- A ile D noktasını birleştiriniz ve ABD ile ACD üçgenlerini oluşturunuz. ABC üçgeninin eş kenarlarını IABI=IACI=k olarak ifade ediniz (Şekil 4).
- ABC, ABD ve ACD üçgenlerinin alanlarını k kenar uzunluğu ile sırasıyla [BG], [DE] ve [DF] yüksekliklerini kullanarak hesaplayınız.
- [DE]+[DF] ile [BG] arasındaki ilişkiyi açıklayınız.



Şekil 4. A ile D Noktalarının Birleştirilmesi Sonucu Oluşan Üçgenler

Öğrenci, ABC üçgeniyle ABD ve ACD üçgenlerinin alanlarını toplamının birbirine eşit olduğunu gözlemleyerek [BG] uzunluğu ile [DE] ve [DF] uzunlukları toplamının eşit olduğunu kavraması neticesinde [DE]+[DF] ile [BG] arasındaki ilişkiyi ortaya koyması beklenmektedir.

Yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma:

Bu aşamada matematiksel durum/problemle ilgili bağımsız değişkenler ve hipotezler değiştirilerek yeni iddia ve hipotezler ortaya konulur. Ortaya konulan bu durumlarla ilgili olarak matematiksel durum/problemle ilgili genellemeler ve farklı soyutlamalar gerçekleştirilir. Bu aşamada öğrenciden aşağıdaki adımları takip ederek iddiasını farklı durumlara genellemesi beklenmektedir.

- ABC üçgeninde D noktası [BC]'nin dışında (kenar uzantısı üzerinde) bir nokta olursa yukarıda bulduğunuz ilişki hala geçerli olur mu?
- ABC üçgeninde D noktası [BC]'nin dışında (kenar uzantısı üzerinde) bir nokta olduğunda farklı bir ilişki gözlemleyebildiniz mi? Bu ilişkiyi yazınız.
- ABC üçgeni bir eşkenar üçgen olsaydı yukarıda bulduğunuz ilişki hala geçerli olur mu?
- ABC üçgeni herhangi bir üçgen olsaydı yukarıda bulduğunuz ilişki hala geçerli olur mu?

• ABC üçgeni herhangi bir üçgen olduğunda problemde verilen durumun geçerli olması için belirlenen noktanın yerinin neresi olması gerektiğine ilişkin bir iddia oluşturup, iddianızın geçerliliğini sağlayınız.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmanın amacı DGY ile zenginleştirilmiş bir ispat etkinliğini tasarlamak olduğu için eylem araştırması yöntemi kullanılmıştır. Eylem araştırmaları; bir probleme yönelik bilgi toplamayı, uygulama yapmayı, verileri analiz etmeyi ve iyileştirmeye ilişkin tekrar birtakım eylemlerde bulunmayı içeren döngüsel bir süreçtir (Mills, 2003; akt. Uzuner, 2005). Eylem araştırmaları, nihai olarak çalışma boyunca yürütülen tüm adımların etraflıca değerlendirildiği ve yeni fikirlere ulaşmanın hedeflendiği çalışmalardır (Johnson, 2005). Bu çalışmada, eylem araştırmasının doğasına uygun olarak bir soruna ilişkin plan hazırlama, uygulama, iyileştirme ve değerlendirme amacıyla döngüler kullanılmıştır. Bu döngüler; tasarım, birinci uygulama, ikinci uygulama ve değerlendirme basamaklarından oluşmaktadır. Bu aşamalar Şekil 5 te gösterilmiştir.

Şekil 5. Araştırmanın Eylem Döngüleri

1. Döngü: Tasarım

Tasarım aşamasında öncelikle tasarlanacak etkinliklere ilişkin kazanımlar belirlenmiştir. Kazanımlara karar verilirken bilgi ve iletişim teknolojilerinin kullanılabileceği kazanımlar tercih edilmiştir. Daha sonra araştırmacılar tarafından Fahlgren ve Brunström (2014)'ün kullandığı teorik çerçeveye göre 3 taslak etkinlik tasarlanmıştır.

2. Döngü: Birinci Uygulama

Bu döngüde, tasarlanan etkinlikler matematik öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Araştırmacılar uygulama sonucunda elde ettikleri veriler ile her bir etkinliği birbirinden bağımsız olarak incelemişlerdir. Daha sonra araştırmacılar bir araya gelerek incelemiş oldukları etkinlikleri bir matematik eğitimi uzmanı eşliğinde değerlendirerek gerekli düzenlemeleri yapmışlardır.

3. Döngü: İkinci Uygulama

Bu döngüde, düzenlenen etkinlikler matematik eğitiminde yüksek lisans yapan öğrencilere uygulanmıştır. Böylece etkinliklerin yeniden gözden geçirilmesi ve uygulama esnasında ortaya çıkabilecek eksikliklerin ortaya çıkarılması sağlanmıştır.

4. Döngü: Değerlendirme

Son döngüde, araştırmacılar tarafından üç etkinlik yeniden değerlendirilmiş ve ilk döngüden itibaren tüm süreçler gözden geçirilerek etkinliklere son hali verilmiştir.

Çalışma Grubu

Birinci uygulamanın katılımcılarını İç Anadolu Bölgesi'nde bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi İlköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören üç erkek, dokuz kız olmak üzere toplam 12 öğretmen adayı oluşturmaktadır. İkinci uygulamanın katılımcılarını ise aynı üniversitenin Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda yüksek lisans yapan bir erkek, dokuz kız olmak üzere toplam 10 öğrenci oluşturmaktadır. Her iki uygulamada farklı katılımcılara etkinliklerin uygulanmasının bir nedeni katılımcıların yeterli düzeyde DGY kullanma becerisine sahip olmalarının gerekliliğidir. Bu nedenle birinci uygulama ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında "Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi" dersini alan ve bu dersten 3.00 ve üzeri ortalama ile başarılı olan gönüllü öğretmen adaylarına etkinlikler uygulanmıştır. İkinci uygulamada ise yine "Matematik Eğitiminde Teknoloji Kullanımı" dersini alan ve bu dersten başarılı olan gönüllü yüksek lisans öğrencileri ile çalışma gerçekleştirilmiştir. Her iki uygulamada da farklı katılımcıların tercih edilmesinin nedeni takip edilen teorik çatının yapı inşa etme ve iddia oluşturma ile iddianın doğrulanması ve çürütülmesi aşamalarının gerçekleştirilme durumundaki tereddütlerdir. Çünkü ilk uygulamada problem üzerine çalışan öğrencilerin ikinci uygulamada aynı problem için teorik çatıda yer alan aşamaları tam olarak gerçekleştirmeleri anlamlı olmamaktadır. Ayrıca bu etkinlikleri tamamlayabilmek için katılımcıların hem geometri alan bilgilerinin hem de DGY kullanma bilgi ve becerilerinin yeterli olması gereklidir. Bu nedenle her iki uygulamada farklı katılımcılarla yürütülmüştür.

Veri Toplama Aracı ve Uygulama Süreci

Çalışmada kullanılan veri toplama araçları ile veri toplama süreci Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Araştırma Döngüsüne göre Verilerin Toplanması Süreci

Veri toplama süreci			
1. Döngü	2. Döngü	3. Döngü	4. Döngü
-Literatür taraması -Kazanımların belirlenmesi -Taslak etkinliklerin oluşturulması	-Etkinliklerin uygulanması -Video kaydı -Yapılandırılmamış gözlem -Yarı-yapılandırılmış mülakat - Etkinlik kağıtları	-Düzenlenen etkinliklerin uygulanması -Video kaydı -Yapılandırılmamış gözlem -Yarı-yapılandırılmış mülakat - Etkinlik kağıtları	- Etkinliklerin yeniden düzenlenmesi ve son halinin verilmesi

	-Etkinliklerin yeniden düzenlenmesi	

Tablo 1'e göre birinci döngüde belirlenen kazanımlara göre teorik çerçeve doğrultusunda taslak etkinlikler oluşturulmuştur. İkinci ve üçüncü döngüde uygulama sonucu etkinlikler yeniden düzenlenmiştir. Bu iki döngüde veri toplama araçları olarak etkinlik kağıtları, video kaydı, yapılandırılmamış gözlem ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardır. Katılımcıların etkinlikte verilen yönergeleri takip ederek ispatı nasıl gerçekleştirdiklerine ilişkin ikinci ve üçüncü döngüde kullanılmak amacıyla yarı yapılandırılmış mülakat soruları ve gözlem formu hazırlanmıştır. Bu formda katılımcıların zorlandırdıkları aşamalara, anlaşılmayan yönergelerin hangilerinin olduğuna ve katılımcıların ifadelerine odaklanılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakat formunda ise etkinlikte verilen problem durumunun ve yönergelerin anlaşılır olup olmadığı, yönergelerdeki adımlara dikkat ederek iddialar oluşturup oluşturamadıkları ve yönergede çıkarılması veya düzeltilmesi gereken ifadelerle ilgili mülakat soruları hazırlanmıştır. Son döngüde ise veri toplama araçlarıyla elde edilen verilen neticesinde etkinliklere son hali verilmiş ve etkinlik tasarım süreci tamamlanmıştır.

Niçin GeoGebra?

Öğretmenlerin GeoGebra yazılımını matematiksel etkinlikler ya da materyaller hazırlamak amacıyla derslerinde sık sık kullandıkları ifade edilmektedir (Kaya ve Öçal, 2018). Okul programlarında birçok DGY öğretim sürecine dahil edilmektedir. Bu yazılımlardan biri olan GeoGebra yazılımını diğer dinamik yazılımlardan farklı kılan en önemli unsur GeoGebra'nın geometri, cebir ve sayı sistemlerini bir arada bulundurmasıdır (Hohenwarter, 2004). Bunun yanında GeoGebra'nın ülkemizdeki okul uygulamalarında kullanımının artması (Kaya ve Öçal, 2018) da bu yazılımın tercih edilmesinin bir diğer nedenidir.

Yapılandırılmamış Gözlem

Nitel araştırmalarda herhangi bir kurumda veya ortamda ortaya çıkan davranışı detaylı bir şekilde tanımlayabilmek için kullanılan veri toplama tekniğine gözlem denilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Öğretim sırasında elde edilen video kayıtları ve sınıf içi gözlemler, bir nitel çalışmada en temel veri toplama araçlarındandır (Powell vd., 2003). Bu çalışma kapsamında yapılandırılmış bir gözlem formu kullanılmamıştır. Özellikle çalışmada yapılandırılmamış gözlem formunun kullanılmasının nedeni, gözlenen ortamın belli boyutlarının yanında önceden ön görülmeyen farklı boyutlarının da ortaya çıkabileceğinin beklenmesidir. Bununla beraber katılımcılarında çalışma ortamını bozmamak ve dikkatlerini dağıtmamak için yapılandırılmamış gözlem tercih edilmiştir. Nitel çalışmalarda veri kaybını en aza indirgemek amacıyla araştırmacıların gözlem yaptığı ortamı kaydetmesi ve uygulamalarda ortaya çıkan durumları aktarabilmeleri için gözlem notları almaları gerekmektedir (Confrey ve Lachance, 1999). Bundan dolayı bu araştırmada veri kaybı yaşanmaması için araştırmacılar, katılımcıları etkinlikleri yaparken video kamerayla kayıt altına almışlardır. Bu gözlemlerde araştırmacılar; katılımcıların zorlandırdıkları aşamalara, anlaşılmayan yönergelerin hangileri olduğuna, gereksiz görülen yönergelere odaklanılmıştır. Aynı zamanda bu gözlemlerde; katılımcıların, yönergelerin takip ederek bir etkinliği yaparken ispatın aşamalarını gerçekleştirip gerçekleştiremedikleri ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Yarı-yapılandırılmış Mülakat

Mülakatlar; bireylerin görüşleri, deneyimleri, algıları ve duyguları hakkında bilgi edinmek amacıyla etkili bir veri toplama aracıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Özellikle iyi tasarlanmış mülakatlar sayesinde kişinin iç dünyası hakkında görüş ve düşüncelere rahatlıkla ulaşılabilir. Bununla beraber gözlem yoluyla katılımcılar hakkında yeterli bilgiye ulaşılamadığı zamanlarda ve kişilerin görüş ve düşüncelerine öğrenmek ve bakış açılarını ortaya çıkarmak amacıyla da kullanılmaktadır (Patton, 1987). Bu çalışmada yarı yapıldırılmış mülakat kullanılmıştır. Bu teknikte araştırmacıların, mülakattaki sorulara bağlı kalma zorunluğu olmaması ve kısmi hareket özgürlüğü ve esneklik tanımasından (Bryman, 2012) dolayı tercih edilmiştir. Araştırma kapsamında araştırmacılar, yarı yapılandırılmış mülakat tekniğiyle problem durumunun ve yönergelerin anlaşılır olup olmadığı, yönergelerdeki adımlara dikkat ederek iddialar oluşturup oluşturamadıkları ve yönergede çıkarılması veya düzeltilmesi gereken hususlara ilişkin sorulara yer verilmiştir. Bununla beraber yarı yapılandırılmış mülakatlarla, gözlem tekniğiyle elde edilen verileri detaylandırmak ve gözlem tekniğiyle elde edilemeyen verilere ulaşmak amaçlanmıştır.

Verilerin Analizi

Etkinlik kağıtlarından elde edilen verilerin analizinde doküman analizinden yararlanılmıştır. Video kaydı, yapılandırılmamış gözlem ve yarı-yapılandırılmış mülakat verilerinin analizinde ise betimsel analiz kullanılmıştır. Betimsel analiz var olan durumun olduğu gibi betimlenmesini, belirli temalara göre özetlenmesini ve yorumlanmasını sağlar. Betimsel analiz, görüşme veya gözlem yoluyla toplanan verilerin doğrudan alıntısını vererek bulguların açık ve sistemli şekilde anlaşılmasına imkân tanır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Betimsel analiz Fahlgren ve Brunström (2014)'ün geliştirdikleri teorik çatı çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Yani teorik çerçevede ifade edilen aşamalar birer tema olarak ele alınmış ve yapılan gözlem ve mülakatlardan elde edilen verilerden ilgili temaya uygun olanlar örnek ifadelere yer verilerek sunulmuştur.

Bulgular

1. Döngü: Tasarım Aşaması

İlk olarak ispat etkinliklerine uygun olarak kazanımlar belirlenmiştir. Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında [OMDÖP] (2018), DGY ile zenginleştirilmiş ispat etkinliklerine yönelik kazanımları belirlemede kazanım açıklamalarında "Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır." ifadesinin yer alması ve kazanımın öğrencilerin keşfetme, tahminde bulunma, açıklama ve genelleme gibi süreçleri gerçekleştirmelerine yönelik olmasına dikkat edilmiştir.

Bu bağlamda her bir etkinlik için belirlenen kazanımlar Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Etkinlikler için Belirlenen Kazanımlar ve Kazanımların Seçilme Nedenleri

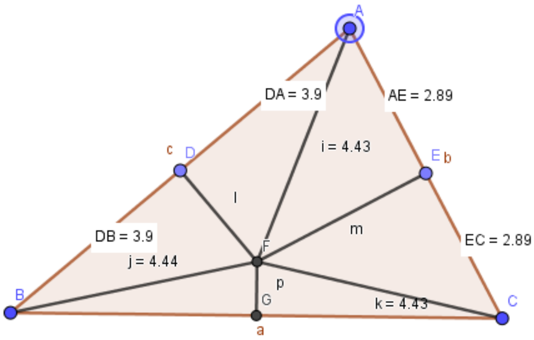
Etkinliğin Adı	Kazanım İfadesi

Üçgenin köşelerine eşit uzaklıktaki noktanın belirlenmesi ve bu noktadan çizilen geometrik şeklin keşfedilmesi	*9.4.3.3. Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini gösterir.* *a) Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her noktanın, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğu ve bunun karşıtının da doğru olduğu gösterilir.* *b) Pergel-cetvel veya bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.*
Bir paralelkenarın herhangi bir kenarı üzerindeki bir noktadan köşelerin birleştirilmesi ile oluşan üçgensel bölgelerin arasındaki alan bağıntılarını bulur.	*10.5.2.1. Dörtgenin temel elemanlarını ve özelliklerini açıklayarak problemler çözer* *a) Dışbükey ve içbükey dörtgen kavramları açıklanır. (Bundan sonra dörtgen denildiğinde dış bükey dörtgen anlaşılmalıdır.)* *b) Dörtgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı bulunur.* *c) Dörtgenin çevresi üzerinde durulur.*
Bir paralelkenarın iç açıortaylarının kesişimiyle oluşan şeklin belirlenmesi	*10.5.3.1. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer.* *a) Yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoid arasındaki hiyerarşik ilişkilere yer verilir.* *b) Hiyerarşik ilişkiye göre her bir özel dörtgen kendi içerisinde; açı, kenar, köşegen ve alan özellikleri bağlamında ele alınır.* *c) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.*

Kazanımlar doğrultusunda Fahlgren ve Brunström (2014)'ün geliştirdikleri teorik çatıya uygun 3 etkinlik tasarlanmıştır.

Birinci etkinliğin tasarlanma aşamasında ilk olarak üçgenin köşelerine eşit uzaklıktaki noktanın belirlenmesi ve bu noktadan çizilen geometrik şeklin keşfedilmesiyle ilgili problem belirlenmiştir.

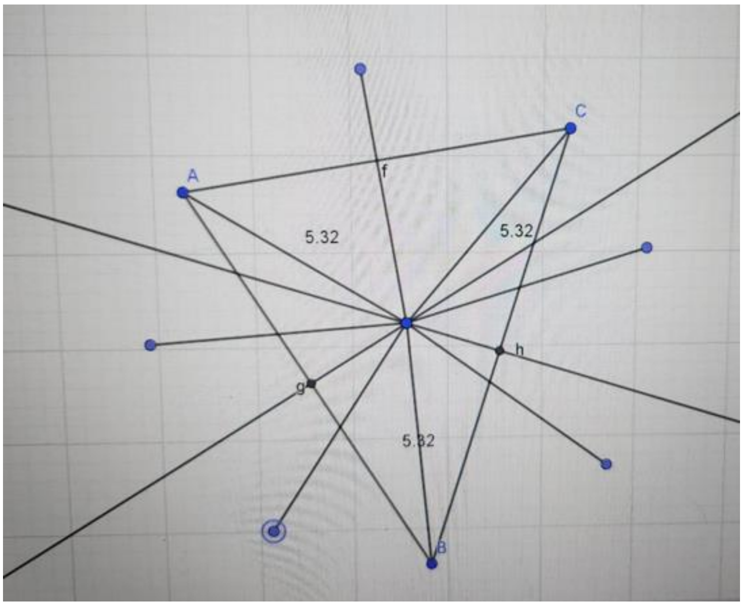
Bu problem doğrultusunda uygun bir yapının inşası ve bu yapıya dayanarak bir iddianın oluşturulması aşamasında DGY kullanarak bir ABC üçgeni inşa etme ve daha sonra üçgeninin kenarlarına dikme oluşturma işlemlerine etkinlikte yer verilmiştir. Bu aşamada araştırmacılar tarafından D, G ve E noktalarının özelliği hakkında yönergede bir bilginin olmadığını fark etmiş ve bu noktaların özelliğiyle ilgili ifade etkinliğe eklenmiştir (Şekil 6).



Şekil 6. Dar Açılı Üçgende Çizilen Dikmeler Yardımıyla D, G ve E Noktaları

Daha sonra dikmelerin kesişim noktası olan "O" noktasının hangi durumda A, B ve C köşelerine eşit uzaklıkta olacağına ilişkin bir açıklama etkinliğe eklenmiştir. DGY kullanılarak iddianın doğrulanması ya da çürütülmesi aşamasında ise iddiaların geçerliğini sınamak amacıyla açılarına göre farklı üçgen çeşitleri oluşturmaya yönelik ifadelere yer verilmiştir. Araştırmacılar ve alan uzmanı bir araya geldiğinde bu yönergenin genelleme aşaması için uygun olduğuna karar vererek iddianın doğruluğunu sadece farklı dar açılı üçgenlerde göstermeleri gerektiği konusunda fikir birliğine varmışlardır. Bunun için bu aşamada iddianızın geçerliğini sınamak amacıyla farklı dar açılı üçgenler oluşturunuz şeklindeki ifade yönergeye eklenmiştir.

İddianın niçin doğru olduğunun açıklanması ve bir ispat oluşturma aşamalarında ise belirlenen "O" merkezinden üçgenin kenarlarına eş uzunlukta doğru parçalarının çizilmesi ve eş doğru parçalarını farklı konumlara yerleştirmeleri beklenmiştir (Şekil 7). Daha sonra şekil yardımıyla iddianın doğruluğu veya yanlışlığını gerekçelendirme beklenmektedir.



Şekil 7. Dar Açılı Üçgend**e** Farklı Konumlarda Çizilmesi Beklenen Eş Doğru Parçaları

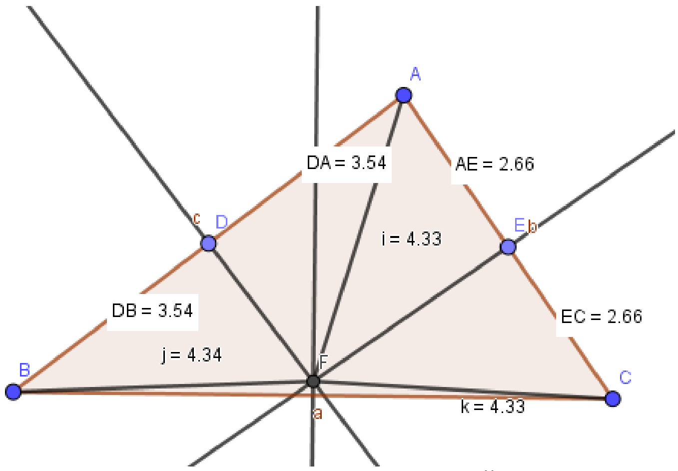
Son aşama olan yeni ilişkilerin keşfi aşamasında ise eğer A, B, C üçgeni dik veya geniş açılı üçgen olsaydı ilişkinin hala geçerli olup olmadığına ilişkin yönergenin eklenmesine karar verilmiştir. Bu etkinlikle birlikte diğer iki etkinliklerde de alan uzmanı ve araştırmacılar bir araya gelerek benzer şekilde geliştirilmiştir.

2. Döngü: Birinci Uygulama

Taslak etkinliklerin oluşturulmasından sonra etkinliklerin uygulamasına geçilmiştir. Katılımcı 12 öğretmen adayı dörder kişiden oluşan üç gruba ayrılmış ve tasarlanan etkinlikler bu gruplara uygulanmak üzere verilmiştir. Her bir grup yalnızca bir etkinlik üzerinde çalışma yürütmüştür.

Birinci uygulama sonucunda birinci etkinlikte yer alan problem ifadesinin uzun olduğu ve bu nedenle öğrencilerin problemi anlamakta zorlandıkları gözlemlenirken bu durum yarı yapılandırılmış mülakat sırasında da katılımcılar tarafından ifade edilmiştir. Örneğin ispat etkinliğinde verilen problem durumunu DGY ortamları için uygun buldunuz mu? Sorusuna katılımcılardan birisi, problem durumunu anlamakta güçlük çektiğini ve problemin anlamak için çok fazla zaman harcadığını ifade etmiştir. Bu nedenle birinci etkinlikte yer alan problem cümlesinin daha anlaşılır şekilde ifade edilmesine ve kısa cümlelerin kullanılmasına karar verilmiştir.

Birinci etkinlikte iddianın oluşturulması aşamasında etkinlikte yer alan "üçgeninin kenarlarına dikmeler çiziniz" açıklamasının öğrencileri yönlendirdiği ve kendi iddialarını oluşturmak yerine verilen ifadeyi DGY ile oluşturmaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Özellikle öğretmen adayları, iddialarını nasıl oluşturduklarını sorulduğunda, üçgenin kenarlarına dikmeler çizdiklerini daha sonra dikmelerin kesişim noktasından üçgenin köşelerine doğru parçaları oluşturdukları belirtmişlerdir. Ardından dikmeleri hareket ettirdiklerinde aradaki farkın bazen azaldığını bazen ise arttığını fark ettikleri ile bu dikmeleri sağ ve sol tarafa hareket ettirdiğinde üçgenin köşelerine üç doğru parçasının da uzaklıkların eşit olduğu gördüklerini ifade etmişlerdir (Şekil 8).



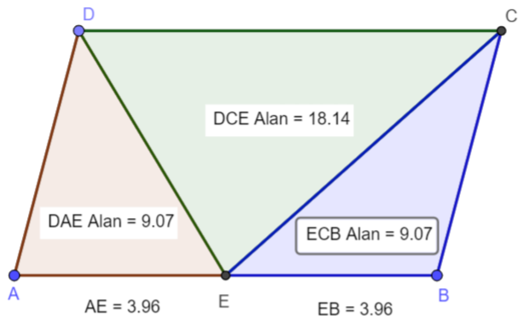
Şekil 8. Üçgende Çizilen Dikmelerin Kesim Noktasının Üçgenin Köşelerine Olan Uzaklıklarının Karşılaştırılması

Araştırmacılar tarafından, üçgenin kenarlarındaki D ve E noktaların özelliğini belirlemekte zorlanıp zorlamadıkları sorulmuştur. Bununla beraber bu noktaların yönergeye eklenmesinin gerekli olup olmadığı sorusu da yöneltilmiştir. Öğretmen adayları, rahatlıklar dikmelerin kesim noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıklarını karşılaştırdıkları ama bu uzaklıkların eşitliğini sağlarken biraz zaman kaybettiklerini ve uğraştırıcı bir eylem olduğunu vurgulamışlardır. Araştırmacılar ve uzmanla yapılan değerlendirme sonucunda etkinlik içerisindeki bu ifadenin "üçgenin yardımcı elemanları kullanılarak üçgenin iç bölgesinde A, B ve C köşelerine eşit uzaklıkta bir nokta belirleyiniz." şeklinde düzenlenmesine karar verilmiştir.

Bunun yanında birinci etkinlikte teorik çatının diğer üç aşamasını öğrencilerin başarılı bir şekilde tamamladıkları gözlemlenmiştir. Teorik çatının yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma aşamasında ise öğretmen adaylarından bazıları, genelleme aşamasında verilen iddianın sadece üçgenlerle sınırlı kalmaması gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu sebeple elde edilen sonucun üçgenler dışında diğer çokgenler için de geçerli olup olmadığının sınanması adına "düzgün çokgenler için iddianız hala geçerli olur muydu?" şeklinde bir yönergenin eklenmesine karar verilmiştir.

İkinci etkinlikte yer alan problem cümlesinin ve teorik çatıya göre hazırlanan yönergelerin öğrenciler tarafından anlaşıldığı ve yönergeler takip edilerek yapılabildiği tespit edilmiştir. Bu etkinlikte yer alan ifadeler ve yönergelerde bir değişiklik yapılmamıştır.

Üçüncü etkinlikte yönergelerde verilen görsellerin katılımcıların iddialarını oluşturmalarını sınırlandırdığı/yönlendirdiği gözlemlenmiştir. Aynı zamanda yapılan mülakatlarda öğretmen adayları yönergelerle beraber veriler görsellerin gereksiz olduğunu belirtmişlerdir. Örneğin bu etkinlikte, *"E noktası [AB]'nin orta noktası olduğunda, üçgensel bölgeler arasındaki A(DAE)=A(ECB) ve A(DCE)= 2.A(DAE)=2.A(ECB) bağıntılarını açıklayınız."* şeklindeki yönergeden sonra aşağıdaki görsel verilmiştir (Şekil 9).



Şekil 9. Yönergelerle Birlikte Verilen Görsel

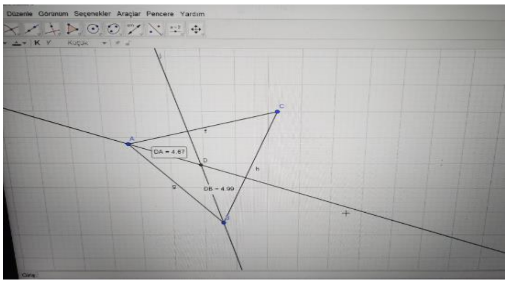
Araştırmacılar bir araya geldiklerinde, yönergelerde verilen görsellerin iddia oluşturulurken katılımcıları yönlendireceği ve sınırlandıracağını konusunda hem fikir olmuşlardır. Bu nedenle bu etkinlikte her aşamaya ilişkin verilen görseller kaldırılmıştır. Her üç etkinlikte de Fahlgren ve Brunström (2014)'ün teorik çatısında yer alan "iddianın doğruluğunu açıklama" ile ispat oluşturma" aşamalarında öğrencilerin benzer ifadeler yazdıkları ve iki aşamayı birlikte ele aldıkları gözlemlenmiştir. Bu nedenle etkinliklerde bu iki aşamanın birleştirilmesine ve tek aşama olarak ifade edilmesine karar verilmiştir.

3. Döngü: İkinci Uygulama

İkinci döngüde yapılan düzenlemeler sonucunda revize edilen etkinlikler aynı üniversitede öğrenim gören 10 yüksek lisans öğrencisine uygulanmıştır. Birinci etkinlik üç, ikinci etkinlik dört ve üçüncü etkinlik üç öğrenci tarafından oluşturulan gruplarla yürütülmüştür. Teorik çatıya göre düzenlenen etkinliklerin uygulanması sonucu elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

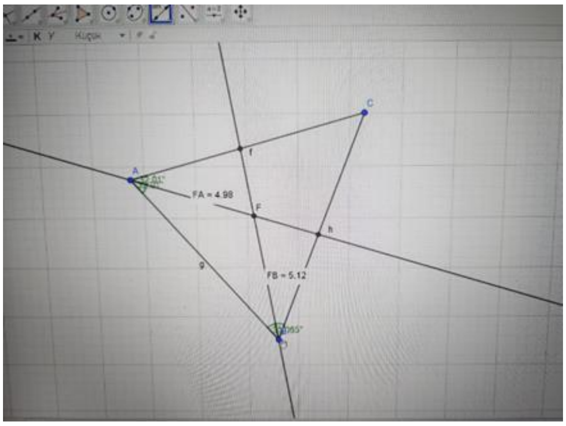
Uygun bir yapı inşa etme ve iddia oluşturma:

Etkinlik 1'de ilk olarak öğrenciler, üçgenin köşelerinden eşit uzaklıkta bulunan noktanın yerinin üçgenin yüksekliklerinin kesim noktası olabileceğini düşündüler. Bunun için öğrenciler, bir üçgen çizip bu üçgenin yüksekliklerini çizerek kesim noktası olarak D noktasını belirlediler. Daha sonra belirledikleri D noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıklarını ölçtüler (Şekil 10). Öğrenciler bu uzaklıkların farklı olduğunu görerek oluşturdukları iddiaların geçerli olmadığını fark ettiler ve üçgenin diğer yardımcı elemanlarını denemeye başladılar.



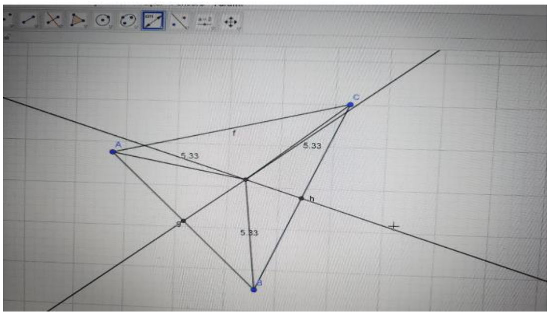
Şekil 10. Üçgende Yüksekliklerin Kesim Noktasının Üçgenin Köşelerine Olan Uzaklıklarının Karşılaştırılması

Öğrenciler, bu kez üçgenin açıortaylarını çizmeye karar verdiler. Üçgenin açıortaylarının kesim noktasını F olarak belirlediler ve F noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıklarını hesapladılar (Şekil 11). Açıortayların üçgenin köşelerine olan uzaklıklarının farklı olduğunu gözlemledikten sonra bu defa aynı işlemi kenar orta dikmeler için tekrarlamışlardır.



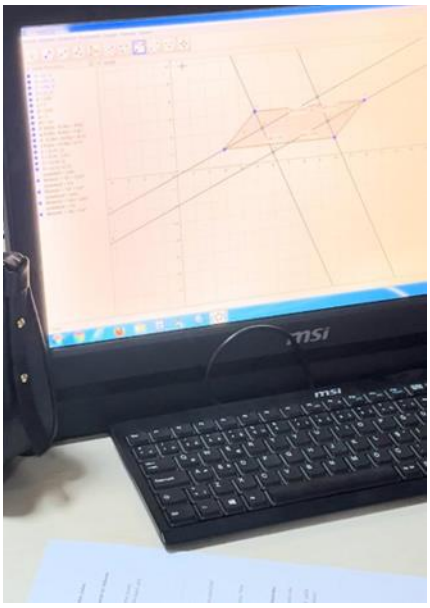
Şekil 11. Üçgende Açıortayların Kesim Noktasının Üçgenin Köşelerine Olan Uzaklıklarının Karşılaştırılması

Öğrenciler, [AB], [BC] ve [AC] kenarlarına ait kenar orta dikme çizmişler ve bu kenar orta dikmelerin kesim noktasını belirlemişlerdir (Şekil 12). Belirledikleri noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıklarının aynı olduğunu fark etmişlerdir. Böylece öğrenciler, "üçgende çizilen kenar orta dikmelerin kesişim noktaların üçgenin köşelerine uzaklıkları eşittir" şeklinde iddialarını oluşturmuşlardır.



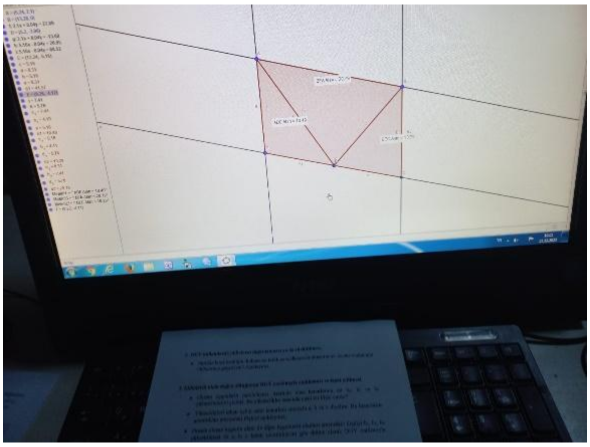
Şekil 12. Üçgende Kenar Orta Dikmelerin Kesim Noktasının Üçgenin Köşelerine Olan Uzaklıklarının Karşılaştırılması

İkinci etkinlikte öğrenciler, etkinlikte verilen yönergeleri takip ederek bir paralelkenar inşa ettiler ve bu paralelkenarın açıortaylarının kenarlar ile kesişimi sonucu oluşan şekle yönelik "*iç açıortayların kesişiminden elde edilen şekil dikdörtgene benziyor.*" şeklinde iddialarını oluşturdular (Şekil 13).



Şekil 13. Paralelkenarda İç Açıortayların Kesişiminden Elde Edilen Geometrik Şekil

Etkinlik 3'te ise öğrenciler bir ABCD paralelkenarı inşa edip paralelkenarın bir kenarı üzerinde bir E noktası belirlemişlerdir. Bu nokta ile paralelkenarın A ve B köşelerini birleştirerek paralelkenarı üç parçaya ayırmışlardır. Bu parçalanma sonunda ADE, BAE ve BCE üçgenlerini elde etmişlerdir (Şekil 14). Bu alanlar yardımıyla aşağıdaki iki iddiayı oluşturmuşlardır:



Şekil 14. Paralelkenarın Üç Parçaya Bölünmesi ve Alanlarının Hesaplanması

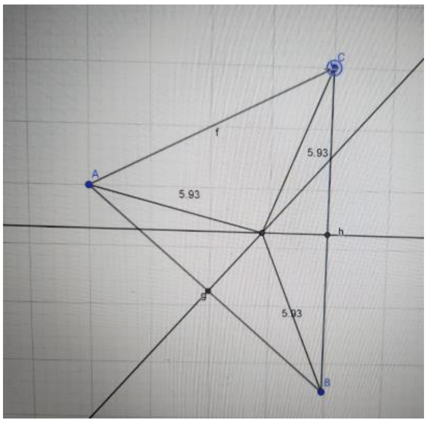
İddia 1: "Büyük kardeş E noktası üçgenin tepe açısı olmak üzere ortadaki BEA üçgenini seçmelidir."

İddia 2: "E noktası bulunduğu kenarın orta noktasında ise bu takdirde küçük kardeşlere eşit alanlı tarlalar düşecektir."

İddianın doğrulanması ya da çürütülmesi:

Bu aşamada öğrencilerin, DGY kullanarak oluşturdukları iddiayı doğrulamaları veya çürütmeleri beklenmektedir. Öğrenciler, oluşturdukları geometrik şekilleri sürükleyerek veya hareket ettirerek şekillerde oluşan değişikliklere göre iddialarının doğrulaması veya çürütülmesi üzerinde çıkarımlarda bulunmuştur.

Etkinlik 1'de öğrenciler farklı dar açılı üçgenler oluşturarak iddialarının geçerliliğini kontrol etmişlerdir (Şekil 15). Bunun için yazılımın sürükle bırak özelliğini kullanmışlar ve üçgeni köşe noktalarından hareket ettirerek farklı üçgenler için iddialarının doğruluğunu test etmişlerdir.

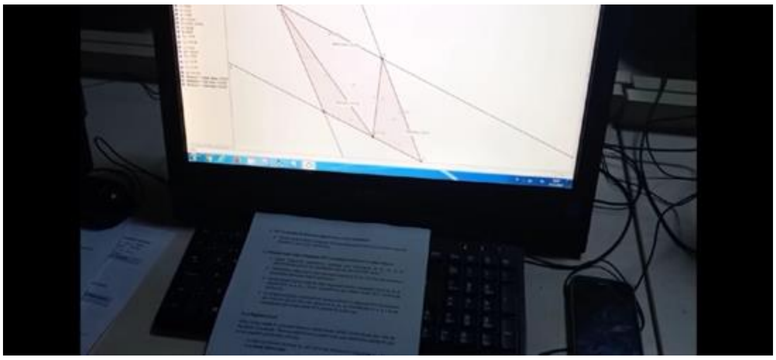


Şekil 15. Farklı Dar Açılı Üçgende Kenar Orta Dikmelerin Keşişim Noktası

Yapmış oldukları gözlemler farklı üçgenler için de iddialarının geçerli olduğunu göstermektedir.

İkinci etkinlikte öğrenciler yazılımın ölçme özelliğini kullanarak ortada oluşan şeklin iç açılarının ölçülerini hesaplamış ve 90 derece olduğunu görmüşlerdir. Daha sonra yazılımın sürükle bırak özelliği yardımıyla oluşturdukları paralelkenarı köşelerinden hareket ettirerek farklı paralelkenarlar için iddialarının doğruluğunu test etmişlerdir.

Etkinlik 3'te öğrenciler DGY'nin sürükle bırak özelliğini kullanarak farklı paralelkenarlar üzerinde iddialarının geçerliğini sorgulamıştır. Çizilen geometrik şeklin hareket ettirilmesiyle kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen veya farklı kenar uzunluklarına sahip paralelkenarlar için sorgulamalar yapılmıştır.



Şekil 16. Sürükle bırak özelliği ile farklı paralelkenarlar oluşturulması

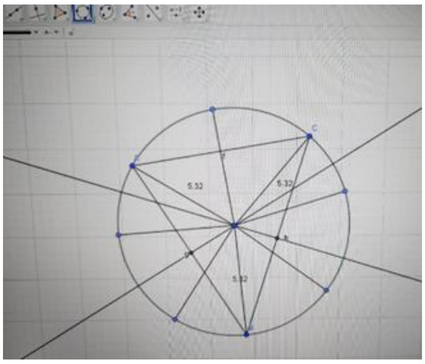
Şekil 16'da bu sorgulamaya yönelik bir öğrenci ifadesi aşağıdaki gibidir:

"Dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen şekillerinde tekrar denendiğinde İddia 1 ve 2 değişmedi."

İddianın doğruluğunu açıklama ve ispat:

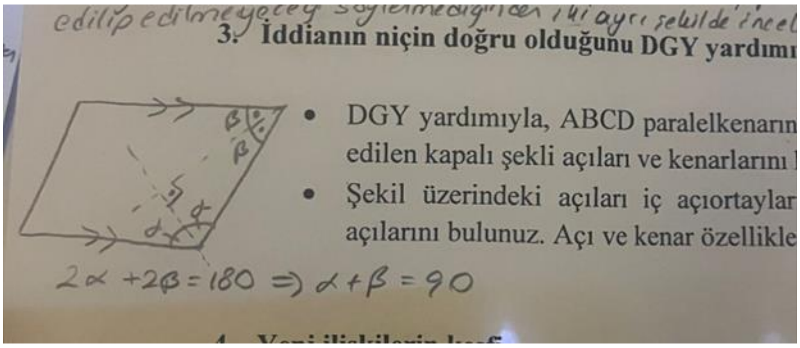
Bu aşamada öğrencilerden DGY kullanarak iddialarının niçin doğru olduğunu açıklamaları ve bir ispat oluşturmaları beklenmektedir.

Etkinlik 1'de öğrenciler, kenar orta dikmelerin kesişim noktası ile üçgenin köşe noktalarını birleştirdiklerinde bu uzunlukların birbirine eşit olduğunu belirttiler. Bu durumun nedenini kenar orta dikmelerin kesim noktasının üçgenin köşeleri ile birleştirilmesi sonucunda üçgenin içerisinde ikizkenar üçgenlerin oluşmasına bağladılar. İkizkenar üçgende tabana ait yüksekliğin aynı zamanda kenarortay olması nedeniyle oluşan bu üç üçgenin ikizkenar olduğunu ifade ettiler. Daha sonra kenar orta dikmelerin kesim noktasını merkez kabul ederek üçgenin köşelerinden geçen bir çember çizerek kesim noktasının aynı zamanda üçgenin çevrel çemberi olduğunu belirttiler (Şekil 17).



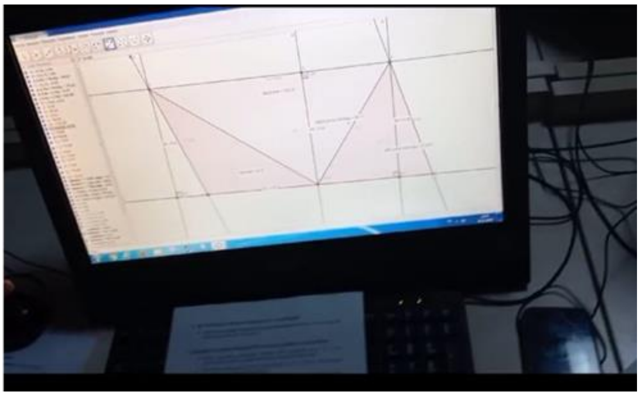
Şekil 17. Öğrencilerin çevrel çember çizimi

Etkinlik 2'de öğrenciler açıortayların kesim noktasındaki açının 90 derece olduğunu yazılımın açı ölçme özelliği ile belirledikten sonra diğer köşeler içinde bu durumun geçerli olduğunu ifade edip etkinlik kâğıdı üzerinde yaptıkları işlemin nedenini açıklamışlardır (Şekil 18).



Şekil 18. Öğrencilerin çizimleri

Etkinlik 3'te öğrenciler ADE, BAE ve BCE üçgenlerine ait yükseklikleri DGY yardımıyla çizip bu üçgenlerin alanlarını hesaplamışlardır. Ayrıca DGY'nin sürükle bırak özelliğini kullanarak alanlardaki değişimi gözlemlemişlerdir (Şekil 19). Öğrenciler iddialarının geçerliliğini açıklarken sezgisel ispatın yanında formal ispatı da kullanmışlardır.



Şekil 19. İddiaların doğruluğunun gerekçesinin açıklanması

İddialarının doğruluğunu açıklamaya ve ispatlamaya ilişkin bir öğrenci ifadesi aşağıdaki gibidir:

ADE, BAE ve BCE üçgenlerinin yükseklikleri eşittir (h1=h2=h3 olduğunu gözlemledim) ve bu üçgenlerin çizilen yüksekliklerine ait uzunlukları arasında a+b=c ilişkisi vardır.

"Yükseklikler eşit olduğu için tabanı en uzun olan yani c'nin alanı en büyük olur."

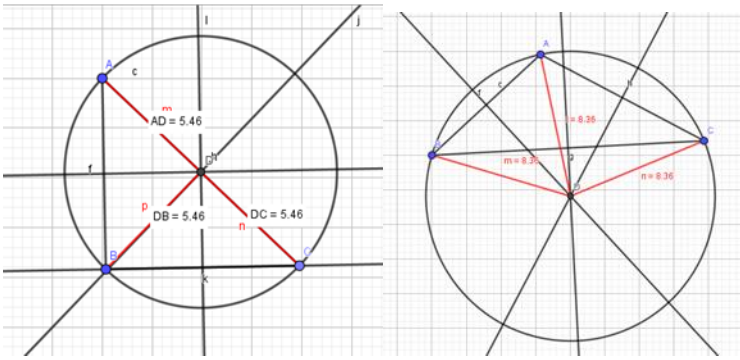
"E noktası orta noktada olduğu zaman h'ler yine eşit kalır. Tabanlar da eşit olduğu için orta noktadan alanlar eşit olur."

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2} = \frac{A(ABCD)}{2}$$

Yeni ilişkilerin keşfi ve genelleme:

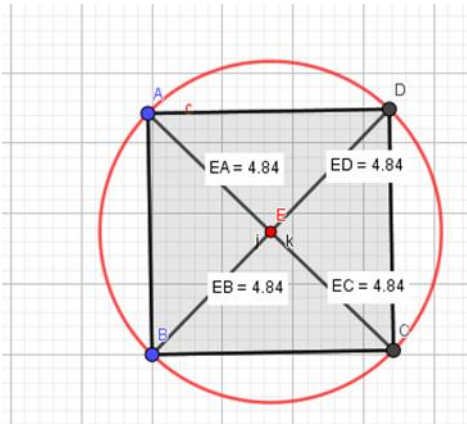
Bu aşamada öğrencilerden iddialarını farklı durumlar için genişletmeleri beklenmiştir.

Etkinlik 1'de öğrenciler, dar açılı üçgenler dışında; dik ve geniş açılı üçgenler için iddialarının geçerli olup olmadığını sorguladılar. Bu doğrultuda dik açılı üçgende kenar orta dikmelerin kesim noktasının hipotenüs üzerinde, geniş açılı üçgende ise üçgenin dışında olduğunu gözlemişlerdir. Bununla beraber bu üçgen çeşitlerinde de iddialarının korunduğunu gözlemlemişlerdir (Şekil 20).



Şekil 20. Geniş ve Dik Açılı Üçgenlerde Çevrel Çember Çizimi

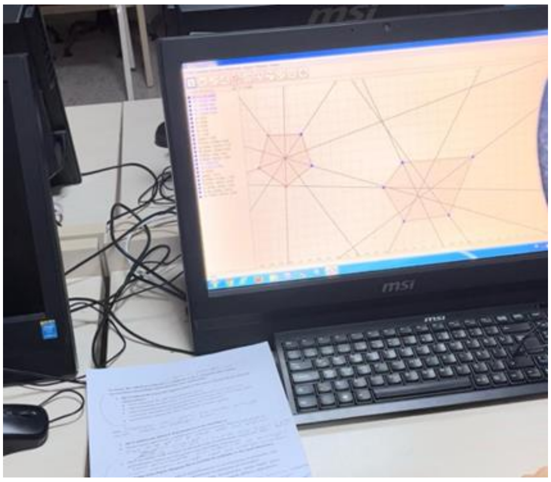
Öğrenciler iddialarının üçgenler dışındaki diğer çokgenlerde de geçerli olup olmadığını sorgulamışlardır. Örneğin kare için karenin köşegenlerinin kesim noktasını merkez kabul ederek karenin çevrel çemberini çizmişlerdir (Şekil 21).



Şekil 21. Karede Çevrel Çember Çizimi

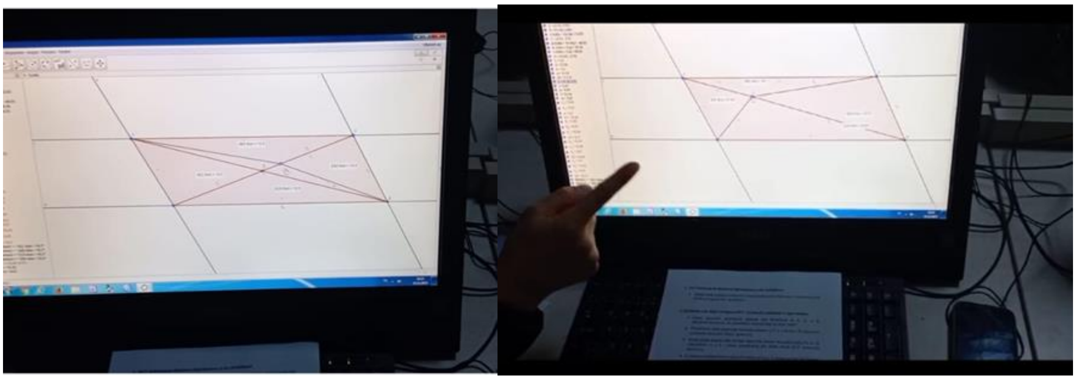
Etkinlik 2'de öğrenciler ABCD'nin bir kare olması durumunda iddialarının geçerli olup olmadığını incelemişlerdir. Gözlemleri sonucunda ABCD'nin bir kare olması durumunda iç açıortayların oluşturduğu şeklin bir nokta olacağını belirtmişlerdir. Bunun yanında ABCD'nin düzgün bir çokgen ve herhangi bir çokgen olması durumlarında iç açıortayların oluşturduğu şeklin ne olacağına ilişkin denemelerde bulunmuşlardır.

Öğrenciler "Dikdörtgende kare oluyor, eşkenar dörtgende nokta oldu. Şekil içbükey olduğunda oluşan şekil beşgen oldu." cevaplarını vermişlerdir. Ayrıca içbükey dörtgende kelebek (kum saati) oluşacağını gözlemlemişlerdir. Şekil bir beşgen olunca oluşacak şekil sorulduğunda ise düzgün beşgen için nokta oluşacağını, düzgün olmayan beşgen için bir gözlem yapılmadığını belirtmişlerdir (Şekil 22).



Şekil 22. Bir Beşgen Olunca İç Açıortayların Oluşturduğu Şekil

Etkinlik 3'te yer alan ilk problem farklılaştırılmış ve başka kazanımları da içine alacak şekilde genişletilmiştir. Böylece öğrencilerin farklı geometrik şekiller üzerinde genellenmesine yönelik fikirlerin üretilmesi amaçlanmıştır.



Şekil 23. Yeni Problem Duruma İlişkin Çizilen Geometrik Şekil ve Sürükle Bırak ile Yapılan Denemeler

İlk durumdan farklı olarak öğrencilerden paralelkenarın içinden bir nokta almaları ve bu noktayı paralelkenarın köşeleri ile birleştirerek dört üçgensel bölge oluşturmaları istenmiştir. Öğrenciler DGY'nin sürükle bırak özelliğini kullanarak yeni problem durumuna ilişkin iddia ve açıklamalar sunmuşlardır. Aşağıda bazı öğrencilerin açıklamaları sunulmuştur:

"İşaret taşını köşegenin üzerinde alırsak küçüklerin her durumda alacağı pay aynı olur."

"İşaret taşı köşegenin kesim noktasında olursa büyük kardeş ilk durumundan daha fazla almaz."

4.Döngü: Değerlendirme

İkinci uygulama sonucunda öğrencilerin etkinlikleri başarılı şekilde yaptıkları, etkinlikte yer alan yönergeleri rahat bir şekilde anladıkları tespit edilmiştir. Bu durum katılımcıların etkinlikte verilen problem ifadesini açık şekilde anladıklarını ve yönergelerin amacına uygun yazıldığını göstermektedir. Yapılan gözlem sonucunda etkinliği yürütürken öğrencilerin herhangi bir açıklamaya ihtiyaç duymadan yönergeler doğrultusunda aşamaları takip ettikleri görülmüştür.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada Fahlgren ve Brunström (2014)'ün geliştirdiği teorik çatı temel alınarak DGY ile zenginleştirilmiş ispat etkinlikleri tasarlanmıştır. Bu teorik çerçeve, öğrencilerin bir DGY ortamında heuristik_ispat ile formal ispat arasında ilişki kurmalarına yardımcı olmaktadır. Tasarlanan etkinlikler boyunca öğrenciler ilk olarak problem durumuna yönelik iddialarını oluşturmuşlar ve ardından DGY'nın sürükle bırak özelliğini kullanarak iddialarının geçerliğini kontrol etmişlerdir. Öğrenciler, iddiaların doğruluğunu kontrol ettikten sonra DGY yardımı ile iddialarının niçin doğru olduğunu açıklamış ve heuristik ile formal ispat örnekleri sunmuşlardır. Son aşamada ise yeni problem durumlarıyla iddialarının farklı durumlar için de genellenebilir olduğunu gözlemleyerek yeni ilişki ve keşiflere ulaşmışlardır. Matematik öğrenimini zenginleştirmeye yönelik yeni yaklaşımlardan birisi de etkinlik temelli öğretimdir (Komatsu ve Jones, 2018). Özellikle etkinlikler, matematik derslerinin temelini oluşturmaktadır (Watson ve Ohtani, 2015). Bu çalışmayla da tasarlanan etkinliklerle, öğretmenlerin DGY'i kullanılarak nasıl etkinlikler tasarlanacağı konusunda yol haritası sunmaktadır. Bununla beraber öğretmenler, öğrenciye hazır matematiksel bilgiyi aktarmaktan ziyade öğrencinin hazırbulunuşluk düzeyini dikkate alarak ve kendi matematiksel bilgisini inşa edeceği özel öğretimsel etkinlikler tasarlaması önemlidir (Uygan, 2019). Aynı zamanda DGY ile ispatı birleştiren etkinlikleri geliştirmeye yönelik alan yazında sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmıştır (De Villiers, 2003; 2004; Fahlgren ve Brunström, 2014; Güven vd., 2010). Bu çalışma kapsamında DGY ortamlarında öğretmenler, DGY ile ispatı birleştiren etkinlikleri daha hızlı ve kolay bir şekilde tasarlamaları beklenmektedir.

Tümevarımsal keşif ile geometrik ispatların tümdengelimsel yapısını birleştirme sorunu bir dizi araştırmaya konu olmuştur (Hanna, 1998, 2000; Jones, 2000; Mariotti, 2000). Öğrenciler DGY'de inşa ettikleri geometrik nesneler üzerinde sürükleme yoluyla denemeler yapabilir ve bu işlemler sonucunda belli özellikleri keşfedip, farklı çıkarsamalara ve genellemelere ulaşabilirler. Ancak bu olanaklar bazı araştırmacıların geometride tümdengelimli ispatın matematiksel gerekçelendirmeye yönelik deneysel bir yaklaşım lehine terk edilmesi gerektiğine inanmalarına yol açmıştır (Mason, 1993). Bu çalışmada tasarlanan etkinliklerin DGY kullanılarak heuristik deneyimlerle formal ispat arasında alan yazında ifade edilen teorik boşluğun giderilmesine yardımcı olabileceği söylenebilir.

DGY, matematiksel nesneler arasındaki farklı özellikleri ve ilişkileri keşfetmek için araçlar sağlar. Alanyazın, DGY'nin tanımlayıcı bir özelliği olarak sürükleme işlevini vurgulamaktadır (Hölzl, 2001; Laborde, 2002; Leung, 2011). Özellikle öğrenciler, bir teoremi ve geometrik nesneyi ispat ederken sürükleme yöntemiyle denemeler ve genellemeler yapma imkanı sağlamaktadır. DGY ortamında ispat yaparken bu aşamalarda DGY'nin sürükle bırak özelliği etkin olarak kullanılmıştır.

Araştırmacılar, etkinlikleri geliştirirken tasarım, birinci uygulama, ikinci uygulama ve değerlendirme döngülerini kullanmışlardır. Etkinlik geliştirilirken ilk olarak tasarım basamağında, kazanımların açıklamalarında yer alan "Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır." ifadesi dikkate alınarak kazanımlar incelenmiştir. Alanyazına göre bu kazanımlardan öğrencilerin en çok zorluk çektiği ile hata ve yanılgıya sürükleyen kazanımlar belirlenmiştir. Birinci uygulama basamağında tasarlanan üç etkinlik 12 öğretmen adayına uygulanmıştır. Uygulama sonucunda öğretmen adayları, etkinlikte yer alan problemlerin çok uzun olduğunu, anlamakta zorlandıklarını ve bundan dolayı problem cümlelerinin daha anlaşılır şekilde ifade edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Bununla beraber bazı yönergelerin neden verildiğini anlamadıklarını ifade etmişlerdir.

Birinci uygulama sonucunda, Fahlgren ve Brunström (2014)'ün geliştirdiği modeldeki iddiaların doğruluğunun DGY yardımı ile açıklanması ve bir ispat oluşturma basamakları benzer amaca hizmet ettiği için açıklama ve keşfetme aşamalarına ilişkin yönergeler öğrenciler tarafından tekrar cümleleri olarak algılanmıştır. Bundan dolayı öğrencilerin kafa karışıklığını ortadan kaldırmak için bu aşamalar birleştirilmiştir. Ayrıca cümle düşüklüğü olan ve tekrar eden ifadeler gözden geçirilmiş, dil bilgisi hataları giderilmiştir. Daha sonra ise araştırmacılar ve alan uzmanı bir araya gelerek problem cümleleri ve yönergelerde bazı değişiklikler yapılmıştır. Örneğin alan uzmanı bazı cümlelerde öğrencilerin yönlendirildiğini belirterek ispat oluştururken öğrencileri yönlendirmeden cümlelerin verilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

İkinci uygulama basamağında, yapılan düzenlemeler sonucunda revize edilen etkinlikler matematik eğitimi alanında öğrenim gören 10 yüksek lisans öğrencisine uygulanmıştır. Uygulama sonucunda öğrenciler, yönergelerin anlaşılır olduğunu ve gerekli aşamaları takip ederek kolaylıkla bir iddianın oluşturulabileceğini söylemişlerdir. Değerlendirme basamağında, yapılan gözlem sonucunda katılımcıların istekli olarak çalışmayı yürüttüğü ve yönergeleri uygularken herhangi bir açıklama beklemeden ilerledikleri gözlenmiştir. Uygulama sonunda katılımcılara problemin anlaşılması, yönergelerin açıklığı ve doğru yönlendirmesi üzerine sorular sorulmuştur. Katılımcılar problemin net şekilde anlaşıldığı, yönergelerin amacına uygun yazıldığını ifade etmişlerdir. Ayrıca yapılan görüşmede ise yönergelerdeki gerekli aşamaları takip ederek kolaylıkla bir iddianın oluşturulabileceğini belirterek geliştirilen etkinliklerin faydalı olduğunu, alana katkı sağlayacağını da belirtmişlerdir. Alan yazında DGY kullanarak geometri öğretiminin ilgi çekici (Şimşek ve Yücekaya, 2014) ve faydalı bir yöntem olduğunu, öğrenci başarısında anlamlı değişiklikler oluşturduğuna (Bintaş ve Bağcıvan, 2007) dair çalışmalarla paralellik göstermektedir. Millî Eğitim Bakanlığı, matematik öğretim programında bilgi ve iletişim teknolojisinin derslerde kullanması gerektiğine vurgu yapmaktadır (MEB, 2018). Geliştirilen etkinlikler ile öğretmenlere bilgi ve iletişim teknolojileri kullanılarak nasıl etkinlikler tasarlanacağı konusunda yol haritası sunmaktadır. DGY'nin matematik eğitiminde sıklıkla kullanılmasıyla beraber ispat öğretiminde köklü değişime neden olmuştur (De Villiers, 1996). Özellikle öğrenciler, bir teoremi ve geometrik nesneyi ispat ederken sürükleme yöntemiyle denemeler ve genellemeler yapma imkanı sağlamaktadır. Bu çalışmada geliştirilen bu etkinlikler ile öğrencilerin teknoloji destekli ortamlarda kolaylıkla ispat yapmasını katkı sağlayacağı da söylenebilir.

Öneriler

Tasarlanan etkinlikler öğretmen adaylarıyla ve yüksek lisans öğrencileriyle yürütülmüştür. Etkinliklerin öğrenci üzerindeki etkisine bakılmadığı için kazanım seviyesine uygun lise öğrencileri ile uygulamaları yapılabilir.

Bu tarz etkinliklerin tasarlanması öğrencilerin başarısını ve matematiğe karşı tutumlarını etkileyebilmektedir DGY yazılımının kullanması ve etkinliklerin tasarlanması için öğretmenlere hizmet içi eğitimin verilmesinin yanı sıra, örnek etkinliklerin de sunulması önem arz etmektedir.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı
Araştırma Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Bilimsel Araştırma Etik Kurulunun 25.03.2024 tarih ve 412284 sayılı kararı ile yürütülmüştür.

Yazarların Makaleye Katkı Oranları
Bu makaleye; 1. Yazar %25 oranında, 2. Yazar %25 oranında, 3. Yazar %25 oranında, 4. Yazar %25 oranında katkı sağlamıştır.

Çıkar Beyanı
Bu çalışmada yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Kaynakça

Akyüz, D. (2014). Mathematical practices in a technological setting: A design research experiment for teaching circle properties. *International Journal of Science and Mathematics Education,14,* 549-573.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. ve Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(3),* 66–72.

Frank, B. A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining draggin.* [Unpublished doctoral thesis]. University of New Hampshire, Durham. United Kingdom.

Frank, B. A. ve Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15(3),* 225–253.

Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar herşey midir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(12).

Baki A. (2020). *Matematik tarihi ve felsefesi.* Pegem Akademi, Ankara.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik.* Ceren Yayınları, İstanbul.

Baki, A. ve Özpınar, İ. (2007). Logo destekli geometri öğretimi materyalinin öğrencilerin akademik başarılarına etkileri ve öğrencilerin uygulama ile ilgili görüşleri. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 34(3)*, 153-163.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th Edition ed.): Oxford University Press.

Bintaş, J. ve Bağcıvan, B. (2007). İlköğretim yedinci sınıfta bilgisayar destekli geometri öğretimi. *Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi Dergisi, 7(1)*, 33-45.

Confrey, J. ve Lachance, A. (1999). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Routledge.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press. Euclid. (n.d.). Euclid's Elements: All Thirteen Books in one Volume. Santa Fe, NM: Green Lion Press.

Fahlgren, M. ve Brunström, M. (2014). A model fort ask design with focus on exploration, explanation, and generalization in dynamic geometry environment. *Technology, Konwledge and Learning, 19,* 287-315.

Genç, G. (2010). *Dinamik geometri yazılımı ile 5. sınıf çokgenler ve dörtgenler konularının kavratılması.* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Adnan Menderes Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın.

Genç, G. ve Öksüz, C. (2016). Dinamik geometri yazılımı ile 5. sınıf çokgenler ve dörtgenler konularının kavratılması. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 24(3),* 1551-1566

Gürbüz, T. (2022). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerinin öğrenme yörüngelerine dayalı öğretim tasarımı bağlamında incelenmesi* [Yayınlanmamış doktora tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Güven, B. (2002). *Dinamik geometri yazılımı cabri ile keşfederek geometri öğrenme* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Güven, B., Çekmez, E. ve Karataş, I. (2010). Using empirical evidence in the process of proving: the case of Dynamic Geometry. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA, 29(4),* 193-207.

Hanna, G. (1998). Proof as understanding in geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20,* 4–13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44(1)*, 5–23.

Healy, L. ve Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 235–256.*

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra software system for dynamic geometry and algebra in the plane.* [Master's thesis]. University of Salzburg, Austria.

Hohenwarter, M., ve Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics, 27(3)*, 49-54.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations—A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(1)*, 63–86.

Johnson, A. P. (2005). *Eylem araştırması el kitabı* (2. baskı). Anı Yayıncılık, Ankara.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students 'interpretations when using Dynamic Geometry Software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55–85.

Kaya, A. ve Öçal, M. F. (2018). Geogebra'nın öğrencilerin matematikteki akademik başarılarına etkisi üzerine bir meta-analiz. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 12(2*), 31-59.

Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7(1)*, 222-241.

Kieran, C. ve Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 393-414.

Komatsu, K. ve Jones, K. (2019). Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17(4)*, 801-824.

Kuzu A., Çankaya, S. ve Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 1(1)*, 19-35.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3)*, 283–317.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–35), South Korea: Korea National University of Education.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 43(3)*, 325–336.

Mariotti, A.M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44(1)*, 25–53.

Marrades, R. ve Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, *44*, 87-125.

Mason, J. (1991). Questions about geometry. *Teaching and learning school mathematics: A reader*, 77-90.

MEB, (2013). İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı, Ankara.

Millî Eğitim Bakanlığı (2018a). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1.–8. Sınıflar). Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı (2018b). Ortaöğretim Matematik Dersi (9.–12.Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

NCTM, (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

Öçal, M. F. (2017). The Role of GeoGebra in determining conceptual mistakes in geometry questions. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(3).

Powell, A. B., Francisco, J.M. ve Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 405-435.

Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Şimşek, E. ve Yücekaya, K. G. (2014). Dinamik geometri yazılımı ile öğretimin ilköğretim 6. sınıf öğrencilerinin uzamsal yeteneklerine etkisi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 15(1),* 65-80.

Uygan, C. (2019). Öğrenci matematiğini araştırmada öğretim deneyi yöntemi: Kuramsal temeller ve örnek bir uygulamadan yansımalar. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 7(2),* 792-825.

Uzuner, Y. (2005). Özel eğitimden örneklerle eylem araştırmaları. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi, 6 (2)* 1-12.

Watson, A. ve Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design: Editorial introduction. *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*, 3-15.

Yıldırım, A. ve Şimşek. H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma* (7. Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara

Yıldırım, A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (9. Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yılmaz, G., Ertem, E. ve Güven, B. (2013). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin 11.sınıf öğrencilerinin trigonometri konusundaki öğrenmelerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 1(2),* 200-216.

EXTENDED SUMMARY

One of the main objectives of mathematics and geometry teaching at all levels from pre-school education to university education is to ensure that students learn mathematics in a meaningful way. In today's world where information and technology are rapidly developing and renewed, the future of individuals depends on their ability to access, use and produce information (MEB, 2005). Computers not only facilitated calculation and graphing, but also brought mathematical problems and concepts to the screens and changed the methods of mathematicians (Baki, 1996). One of these ways, perhaps the most effective one, is the use of Dynamic Geometry Software (DGS), which brings new approaches to proof teaching (Hanna, 2000). Using dynamic geometry software (DGS) in geometry teaching has an important role in discovering geometric properties, reaching generalizations and constructing proofs. The immersive feature of the DGS helps students to identify different geometric relations and perform actions such as conjecturing, exploring or refuting claims. In the literature, although there are activities for the use of DGS's in the classroom, there are very few studies on developing activities that combine DGS and proof. In addition, there are not many activities on how to make a proof for a given claim in environments enriched with DGS. Mathematics curricula frequently emphasize the use of information and communication technologies. Providing teachers with guiding activities on how to carry out proof activities, especially in environments enriched with DGS, will contribute to achieving the purpose of this emphasis in the curriculum. In addition, such activities will also provide a road map for the activities that teachers will develop themselves in their lessons. In this direction, the aim of this study is to design proof activities enriched with DGS. Since the purpose of this study was to design a proof activity enriched with DGS, the action research method was used. The participants of the study consisted of 12 senior pre-service elementary mathematics teachers and 10 graduate students in mathematics education who were selected through convenience sampling method. The data were obtained from worksheets, video recordings and semi-structured interviews. In this study, we design proof activities enriched with DGS based on the theoretical framework developed by Fahlgren and Brunström (2014). This theoretical framework helps students to establish a relationship between heuristic proof and formal proof in an DGS environment. Throughout the designed activities, students first formulated their claims for the problem situation and then checked the validity of their claims using the drag-and-drop feature of the DGS. After checking the validity of their claims, students explained why their claims were true and provided examples of heuristic and formal proofs with the help of DGS. In the last stage, they reached new relationships and discoveries by observing that their claims are generalizable to different situations with new problem situations.

The problem of combining inductive discovery with the deductive nature of geometric proofs has been the subject of a number of studies (Hanna, 1998, 2000; Jones, 2000; Mariotti, 2000). Students can experiment with the geometric objects they construct by dragging them, and as a result of these processes, they can discover certain properties and reach different inferences and generalizations. However, these opportunities have led some researchers to believe that deductive proof in geometry should be abandoned in favor of an experimental approach to mathematical justification (Mason, 1993).
It can be said that the activities designed in this study can help to bridge the theoretical gap between heuristic experiences and formal proofs by using DGS.

DGS provides tools for exploring different properties and relationships between mathematical objects. The literature emphasizes the immersive function as the defining feature of an DGS (Hölzl, 2001; Laborde, 2002; Leung, 2011). It provides the opportunity to make experiments and generalizations with the dragging method, especially when proving a theorem or a geometric object. In these stages, the drag-and-drop feature of the DGS was used effectively while doing proofs in the DGS environment. The researchers used design, first implementation, second implementation and evaluation cycles while developing the activities. While developing the activity, firstly, in the design step, the gains were examined by taking into account the statement "Information and communication technologies are utilized." in the explanations of the gains. According to the literature, the objectives that students had the most difficulty with and those that led to errors and misconceptions were identified. Three activities designed in the first implementation step were applied to 12 pre-service teachers. As a result of the application, the pre-service teachers stated that the problems in the activity were too long, that they had difficulty in understanding them, and therefore the problem sentences should be expressed more clearly. They also stated that they did not understand why some instructions were given. The designed activities were carried out with teacher candidates and graduate students. Since the effect of the activities on the student is not taken into consideration, they can be implemented with high school students appropriate to their achievement level. Designing such activities will affect students' success and their attitudes towards mathematics. In addition to providing in-service training to teachers for using the DGS software and designing activities, it is important to present sample activities.

EKLER

Etkinlik 1: Üçgenin köşelerine eşit uzaklıktaki noktanın belirlenmesi ve bu noktadan çizilen geometrik şeklin keşfedilmesi

Kazanım: 9.4.3.3. Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini gösterir ve çemberde açılar konusuna ait kazanımlarını içermektedir.

Süre: 40+40 dakika

Araç-Gereç: Dinamik matematik yazılımı

Uygulama Süreci: Etkinlik uygulanmadan önce öğrenciler 2-3 kişilik gruplara ayrılır ve her gruba bir bilgisayar verilir.

Problem: Üçgen şeklindeki bir adanın köşelerinde birer ev bulunsun. Bu evlerden eşit uzaklıkta bulunan bir noktaya biz baz istasyonu kurulmak isteniyor. Böylece her evle aynı kalitede görüşme yapılma imkânı olacaktır. Buna göre bu baz istasyonu nereye kurulmalıdır? (Üçgen şeklindeki adanın üç köşesinin de iç açıları dar açıdır.)

1. DGY kullanarak uygun bir yapının inşası ve bu yapıya dayanarak bir iddianın oluşturulması
• DGY kullanarak bir dar açılı ABC üçgen inşa ediniz.
• Üçgenin yardımcı elemanlarını kullanarak üçgenin iç bölgesinde A, B ve C köşelerine eşit uzaklıkta bir nokta belirleyiniz. Belirlediğiniz bu noktayı "O" olarak isimlendiriniz.
• Bu noktanın bir özelliği var mı?
• Gözlemlerinizi göz önüne alarak bir iddia oluşturunuz ve aşağıya yazınız.
İddia……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2. DGY kullanılarak iddianın doğrulanması ya da çürütülmesi
• İddianızın geçerliğini sınamak amacıyla farklı dar açılı üçgenler oluşturunuz.
• İddianız bu üçgenlerde hala geçerliğini koruyor mu?

3. İddianın niçin doğru olduğunu açıklanması ve bir ispat oluşturma
• Belirlediğiniz O merkezinden [AO], [BO] ve [CO] doğru paçalarına eş uzunlukta doğru parçaları oluşturunuz.
• Başlangıç noktası O merkezi olan eş doğru parçalarını farklı konumlarda yerleştiriniz.
• Gözlemlediğiniz geometrik şekil ve özelliğini açıklayınız.
• Eğer bir geometrik şekil gözlemleyemediyseniz başlangıç noktası O merkezi olan farklı konumlardaki eş doğru parça sayısını artırarak oluşan geometrik şekli açıklayınız.

4. *Yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma*

• Dik açılı üçgende iddianız geçerli olur muydu?
• Geniş açılı üçgende iddianız geçerli olur muydu?
• Düzgün çokgenlerde geçerli olur muydu?

Etkinlik 2: Bir paralelkenarın iç açıortaylarının kesişimiyle oluşan şeklin belirlenmesi

Kazanım: 10.5.2.1. Yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoid ile ilgili açı, kenar ve köşegen özelliklerini açıklar.

Süre: 40 dakika

Araç-Gereç: Dinamik matematik yazılımı

Uygulama Süreci: Etkinlik uygulanmadan önce öğrenciler 2-3 kişilik gruplara ayrılır ve her gruba bir bilgisayar verilir.

Problem: Bir ABCD paralelkenarı verildiğinde A, B, C, D köşelerinden çizilen açıortayların oluşturduğu şekil hakkında neler söylenebilir?

1. DGY kullanarak uygun bir yapının inşası ve bu yapıya dayanarak bir iddianın oluşturulması:
• DGY kullanarak bir ABCD paralelkenarı inşa ediniz.
• ABCD paralelkenarında A, B, C ve D noktalarından birer iç açıortay çiziniz.
• ABCD paralelkenarının iç açıortaylarının kesişiminden elde edilen kapalı şekli inceleyiniz. Bu kapalı şekil hakkında neler söyleyebilirsiniz?
• Gözlemleriniz ışığında bir iddia oluşturunuz ve aşağıya yazınız.

İddia:………………………………………………………………………………………………………
………
………………………………………………

2. DGY kullanarak iddianın doğrulanması ya da çürütülmesi
• Oluşan kapalı şeklin kenar uzunluklarını ve açılarını ölçünüz. İddianız hala geçerli mi?
• DGY'nin sürükle bırak özelliğini kullanarak başka paralelkenarlar oluşturunuz. Neler gözlemlediniz? İddianızın hala geçerli olup olmadığını sorgulayınız.

3. İddianın niçin doğru olduğunu DGY yardımıyla açıklama ve bir ispat oluşturma
• DGY yardımıyla, ABCD paralelkenarının iç açıortaylarının kesişiminden elde edilen kapalı şekli açıları ve kenarlarını hesaplayarak gözlemleyiniz.
• Şekil üzerindeki açıları iç açıortayların kesişiminden oluşan kapalı şeklin açılarını bulunuz. Açı ve kenar özelliklerine dayanarak iddianızı doğrulayınız.

4. Yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma

• ABCD bir kare olsaydı iç açıortayların oluşturduğu şekil ne olurdu?

• ABCD başka bir dörtgen olsaydı iç açıortayların oluşturduğu şekil ne olurdu?

• Şeklimiz bir beşgen olsaydı oluşacak şekil ne olurdu?

Etkinlik 3: Bir paralelkenarın herhangi bir kenarı üzerindeki bir noktadan köşelerin birleştirilmesi ile oluşan üçgensel bölgelerin arasındaki alan bağıntılarını bulur.

Kazanım:" 10.5.3.1. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözer."

Süre: 40+40 dakika

Araç-Gereç: Dinamik matematik yazılımı

Uygulama Süreci: Etkinlik uygulanmadan önce öğrenciler 2-3 kişilik gruplara ayrılır ve her gruba bir bilgisayar verilir.

Problem: Açgözlü Büyük Kardeş Problemi

Üç kardeş babalarından kalan paralelkenar şeklindeki bir tarlayı aralarında bölüşeceklerdir. İlk başta üç eşit alana ayrılacak olan tarla, kardeşler arasında anlaşmazlık çıkması sonucunda aşağıdaki şekilde pay edilecektir:
Tarlanın herhangi bir kenarı üzerine büyük kardeş tarafından işaret taşı konulacak ve köşelerine ip çekilerek tarla üçe bölünecektir.
Oluşan tarlaların ilk seçim hakkı büyük kardeşin olacaktır.

a. En büyük toprağa sahip olmak isteyen büyük kardeş, tarlalardan hangi özelliklere sahip olanı seçmelidir ?
b. Büyük kardeş, küçük kardeşlerin eşit alanlı tarlalara sahip olmasını istediğinde işaret taşını herhangi bir kenar üzerinde nereye yerleştirmelidir?

1. DGY kullanarak uygun yapıların inşası ve bu yapılara dayanarak iddiaların oluşturulması
● DGY kullanarak bir ABCD paralelkenarı inşa ediniz.
● ABCD paralelkenarının herhangi bir kenarı üzerinde bir E noktası belirleyiniz. Bu nokta tarlayı bölmek için kullanılacak işaret taşının yerini göstermektedir.
● Daha sonra E noktasını ABCD paralelkenarının köşeleri ile birleştirerek üç adet üçgensel bölge elde ediniz.
● Elde edilen üçgensel bölgelerin alanlarını hesaplayınız ve en büyük üçgensel alanı belirleyiniz.
● E noktasını seçtiğiniz kenar üzerinde sürükleyiniz. Üçgensel bölgelerin alanlarındaki değişimi gözlemleyiniz.
● Gözlemleriniz ışığında, a şartına göre en büyük tarlanın seçilmesine ve b şartına göre eşit iki alan elde edilmesine ilişkin E noktasının konumu hakkındaki iddialarınızı aşağıya yazınız.

İddia1:
……
……
……………………………………………………………………………
İddia2:
……
……
……………………………………………………………………………

2. DGY kullanılarak iddiaların doğrulanması ya da çürütülmesi
● Sürükle bırak özelliğini kullanarak farklı paralelkenarlar oluşturunuz. Acaba bunlar için iddialarınız geçerli mi? Açıklayınız.

3. İddiaların niçin doğru olduğunun DGY yardımıyla açıklaması ve ispat edilmesi

● Oluşan üçgenlerin paralelkenar üzerinde olan kenarlarına ait h1, h2 ve h3 yüksekliklerini çiziniz. Bu yükseklikler arasında nasıl bir ilişki vardır?
● Yükseklikleri taban kabul eden kenarlara sırasıyla a, b ve c diyelim. Bu kenarların uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
● Ortada oluşan üçgenin alanı ile diğer üçgenlerin alanları arasındaki ilişkiyi h1, h2, h3 yükseklikleri ve a, b, c kenar uzunluklarını göz önüne alarak DGY yardımıyla açıklayınız.
● E noktasını seçtiğiniz kenar üzerinde hareket ettiriniz. E noktasının belli bir konumu için birbirine eşit iki alan elde edilmesini h1, h2, h3 yükseklikleri ve a, b, c kenar uzunluklarını göz önüne alarak DGY yardımıyla açıklayınız.

4. Yeni ilişkileri keşfetme ve genelleme yapma

Sahip olduğu toprak ile yetinmek istemeyen büyük kardeş sürekli olarak alacağı payı daha da büyütmek istemektedir. Bunu gerçekleştirmeye yönelik uzun uzun düşüncelere daldığı bir gün aklına aşağıdaki gibi bir fikir gelmiştir:
Tarlanın içerisindeki herhangi bir yere işaret taşı konulacak ve köşelerine ip çekilerek tarla dörde bölünecektir.

Oluşan dört tarlanın ikisini büyük kardeş alacaktır.

Kalan diğer tarlalar ise her biri birer tane almak üzere küçük kardeşler tarafından paylaşılacaktır.

Büyük kardeş bu teklifini kabul ettirmek ve kardeşlerini de bu fikre razı etmek için, işaret taşının konulacağı yeri küçük kardeşlerin belirlemesini istemiş fakat oluşacak tarlaların seçim hakkını ise kendisi kullanmak istemiştir. Bu teklifi diğer kardeşleri kabul etmiştir.
a. Küçük kardeşler işaret taşını nereye konumlandırırsa alacakları paylar her durumda eşit olur?

b. Büyük kardeş ilk durumdaki payından daha fazla pay almaması için küçük kardeşler işaret taşını nereye konumlandırmalıdır?

c. Büyük kardeş seçeceği iki tarlayı hangi stratejiye göre seçerse hiçbir zaman ilk bölüşmede elde ettiği toprak büyüklüğünün gerisine düşmez?