Beytulhikme An International Journal of Philosophy
ISSN: 1303-8303 | Volume 5 Issue 1 June 2015
Research Article | Doi: 10.18491/bijop.90919

Riemann'ın Geometri Felsefesinde Uzay Görüsünün Yeri Var mı?

Is There Any Room for Spatial Intuition in Riemann's Philosophy of Geometry?

DİNÇER ÇEVİK
Muğla Sıtkı Koçman University

Received: 16.04.15 | Accepted: 15.06.15

Abstract: In his famous *Habilitationsvortrag* Riemann underlines important points on the very nature of space with respect to philosophy, mathematics, and physics. Although Riemann's greatness in mathematics has been well acknowledged, and the importance and implications of his geometry studied widely by philosophers, the same does not seem to be true of his philosophy of geometry. In part, this paper is motivated by this very fact. In his *Habilitationsvortrag* Riemann sets aside the usual approaches that had been taken until then, and instead tries out new ideas and approaches. Riemann thought that while Euclidean geometry made an interesting proposal for the construction of a theory of space, there was in fact no *a priori* connection between the concept of space and the axioms of Euclidean geometry. He argued, then, that the fundamental concepts central to Euclidean geometry do not have to be part of every system of geometry imaginable. That is, the fundamental concepts of Euclidean geometry should not be thought of as necessary for the construction of all possible systems of geometry. Riemann wanted to depict nature from the perspective of its inner structures and one aspect of this endeavor entailed questioning the nature of space and geometry from heterogeneous points.

Keywords: Kant, Riemann, manifold, spatial intuition, space.

✉ Dinçer Çevik, *Arş. Gör.*
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümü
48000, Kötekli, Muğla, TR | dincorcevik@gmail.com

Giriş

İlginç bir şekilde *Habilatitionsvortag*[1]'ında Riemann "Öklidyen olmayan geometri" terimini kullanmaz; ne Bolyai ve Lobaçevski[2]'ye referans verir ne de Kant'ın uzay ve geometrinin doğasına dair görüşleri ile bir hesaplaşma girişiminde bulunur. Yaşadığı dönem itibariyle Riemann'ın Bolyai, Lobaçevski ve Gauss'un Öklidyen olmayan geometriler üzerine çalışmalarından haberdar olmakla birlikte bu konuda bir tartışmaya girmez.[3] Ancak Riemann'ın kendi adıyla anılan geometrisi ve onu destekleyen felsefi arka plan ile beraber Öklidyen geometriyi ve onun temelinde yükselen felsefi görüşleri bilgi kuramsal olarak yeniden değerlendirmemizi gerektirir.

Bilindiği gibi Kant için uzay ve zaman kavram değillerdir, onlar saf görünün a priori formlarıdırlar. Uzay üç boyutlu Öklidyen geometri ve onun önermeleriyle belirlenmiştir. Kant'ın *Kritik*'inde yer alan uzayın doğasına dair temel argümanları tekrar hatırlayalım. Uzay, geometrinin tüm sentetik a priori önermelerinin kaynağıdır. Uzay empirik olarak gerçek ama transendental olarak idealdir. Uzay objektif deneyimimizin zorunlu koşuludur. Uzaysal ilişkideki nesnelerin tüm deneyimi onların düzene sokulduğu bir uzayı önceden varsayar. Uzay a priori görüdür. Biz kendimize uzayın yokluğunu gösteremeyiz. Uzay şeylerin ilişkisinden türetilen bir kavram değildir. Yalnızca bir uzay vardır ve parçalar bütüne önsel olmadığından onlar bu bütünün içinde yer almalıdırlar. Geometrinin önermelerinin sentetik apriori olması yalnızca uzay a priori görüyse mümkün olabilir. Uzay verili sonsuz büyüklüktür.

---

1 Riemann'ın yaşadığı dönemde üniversitede bir akademik pozisyon elde edebilmek için tüm fakültelere ve halka açık olarak verilen ders.

2 Riemann bu isimlerden bahsetmemesine rağmen muhtemelen Onların çalışmalarından haberdardı. Bolyai'nin bir çalışması 1837 yılında "The Journal für die reine und angewandte Mathematik" *Journal for Pure and Applied Mathematics* adlı dergide yayınlanmıştı. Bkz. Bottazzini & Tazzioli, 1995: 27). Ek olarak Riemann, Bolyai ve Lobaçevski geometrilerinden hocası Gauss aracılığıyla da haberdardı. Bkz. Laugwitz, 1999: 224.

3 Riemann'ın Kant'ın geometriye dair fikirleriyle doğrudan bir hesaplaşmaya girmemesi Laugwitz'e (1999: 222) göre dersin dinleyicileri arasında yer alan R.H. Lotze gösterilebilir. Lotze, Kantçı geleneğin sıkı bir takipçisiydi ve Öklidyen olmayan geometrilere "saçma" oldukları iddiasıyla karşıydı. Ayrıca Bottazini'ye (1994: 25) göre Riemann'ın bu dersi "Privatdozent" olmak için verdiği düşünülürse böylesine hassas bir sınavda Kant ile doğrudan bir hesaplaşma girişiminde bulunmaması anlam kazanmaktadır.

İlk bakışta Riemann bu iddialarının hiçbirinde Kant ile aynı fikirde değilmiş gibi görünmektedir. Riemann'ın amacı, *Habilatitionsvortag*'ın yapısının net bir şekilde gösterdiği gibi, Öklidyen geometrinin aksiyomlarının bilgi kuramsal statüsünü sorgulamaktansa bu aksiyomları fiziğe dayalı bir yorum ile nasıl düşünebileceğimizi göstermektir. Riemann için uzay fiziksel bir gerçekliğe sahiptir ve deneyimde metrik belirlenmeyle beraber verilen bir şeydir. Riemann pragmatik amaçlarla farklı boyutlarda uzaylar kurulabileceğini gösterir ve hangi geometrinin fiziksel gerçeklikle uyumlu olduğu sorusu empirik araştırmanın konusudur dolayısıyla a posterioridir.

1. Riemann'ın Araştırma Programı

Riemann'ın *Habilatitionsvortag*'ı felsefe ve matematiğin karşılıklı etkileşiminin en mükemmel örneklerinden biridir. Felsefeci Herbart'ın şeyleri nitelik demetleri olarak gören yapısalcı bakışı ve Gauss'un diferansiyel geometrisini verimli bir şekilde bir araya getirmesi Riemann'ın çok boyutlu küresel geometrisini kurabilmesine olanak tanımıştır. Riemann, uzayı saf görünün formu olarak ele alan Kant'ın uzay ve geometri felsefesinin karşısında Herbart ve Gauss ile benzer düşünceleri paylaştığı görülür. Herbart ve Gauss'un etkisinde Riemann, uzayı fiziksel bir anlamı olan ve değişime, dönüşüme, çeşitlenmeye açık bir kavram olarak değerlendirir. *Habilatitionsvortag* boyunca Riemann'ın merkezi kaygısının sonsuz küçükler (infinitesimals) olduğunu görürüz. Bu kaygı temelinde geliştirdiği bakış açısı Riemann'ın farklı alanlardaki doğa yasalarını araştırmasında ve sonsuz küçük bölgelerdeki fenomenin araştırılabilmesine olanak verdi. Dış dünyanın bilgisini sonsuz küçük mesafelerin ve parçaların davranışlarından elde etmeye dayalı bu yöntem Riemann'ın araştırma programının belkemiğidir.

2. Saf Görünün Formu Olarak Uzay

Tekrar hatırlatmak gerekirse, Kant için saf görünün formları olan uzay ve zaman kavram değildirler. Bunun anlamı şudur; kavramların bir özneye yüklem olabilmeleri gerekir ancak uzay ve zaman şeylere yüklem olamazlar. Biz şeylerin uzay ve zamansallığından bahsedebiliriz ama bunu yaparken uzay ve zamanın kendisinden türetilen parçaları olarak bahsederiz, uzay ve zamanın kendisinden değil. Biz dış dünyayı uzay zaman adaları şeklinde düşünmeyiz, onu uzay zaman bütünlüğü içinde kavrarız; uzay ve

Beytulhikme An International Journal of Philosophy

zamanı tek, birlikli bütünlüklü olarak düşünürsek onları kavram olmaktan çıkartırız. Yine Kant'ın uzayın saf görü olduğuna dair "örtüşmeyen eşler" yardımıyla da uzayın neden kavram değil de görü olduğunu anlayabiliriz. Sağ ve sol elimizi biz tanımlayamayız dolayısıyla kavramsal düzeyde anlamlandıramayız. Sağ ve sol elimizin uzayda aynı alanı ve hacmi kapatamadıklarını kendi başına kavramsal analizle gösteremeyiz; bu farka yalnızca işaret edebiliriz. Kant'ın uzaydan kavram değil de görü olarak söz etmesinin nedeni budur (Reyhani, 2011). Kant'ı dikkatlice okuduğumuzda uzayın Öklidyen geometriyle tanımlanan özelliklere sahip olmak zorunda olmadığını söylediğini görürüz. Daha ziyade Kant Öklidyen*miş gibi* kavramamızın bir zorunluluk olduğunu iddia eder. Kant'ın iddiasının temel noktası bizim insan türü olarak uzayı belli bir geometrik sistem içinde kavradığımızdır. Öklidyen sistem bu noktada sınırları koyar. Riemann'ın manifold kavramını yarı felsefi bir şekilde tanımladığı doğru olmakla beraber Spivak'a göre Riemann manifoldların bölgesel olarak *n* boyutlu Öklidyen uzay benzeri olduğu konusunda nettir: "…[B]una rağmen çok açıktır ki kavram (manifold) onun (Riemann) zihninde tamamen nettir ve manifoldların bölgesel olarak *n* boyutlu Öklidyen uzaya benzemeleri ile karakterize edilirler" (1975: 155). Daha önce belirtildiği gibi Riemann'a göre geometrinin temellerine dair araştırma sonsuz yakın mesafelerdeki ölçümlerden yola çıkılarak araştırılmalıdır. R^2 hem de R^n'de standard Öklid mesafesi[4] tarafından verilen metrik R^2 ile aynıdır.[5] Riemann'ın *n* boyutlu eğriliği karakterize etmesinde manifoldun bir bölgesi içindeki iki nokta arasındaki en kısa mesafe Öklidyen metriği karşılıyorsa düz yüze (flat) olarak değerlendirilir. Dolayısıyla görüsel uzay, Riemann için topolojik bir yapıya sahiptir yani sonsuz yakın noktalar (infinitesimals) arasındaki mesafede Öklidyen bir yapısı vardır. Bu anlamda Kant'ın uzayın saf görünün

---

4 $ds^2=\Sigma_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$
g_{ij} koordinatların fonksiyonlarıdır ve $x^1 \ldots x^n$ manifold üzerindeki koordinatlardır. Bu ikinci dereceden denklem formu şu koşulları sağlar;
a) Simetrik, ($g_{ij}=g_{ji}$)
b) Positif ($1\leq i, j \leq n$) belirli matrixtir. Bu iki koşul Öklidyen uzayda mesafe ölçmenin temel koşullarıdır.

5 Burada altı çizilmesi gereken nokta, iddianın Pisagor Teoremi'nin tüm Riemann manifoldları için geçerli olduğu değil, manifold kavramı sayesinde kimi bilindik Öklidyen teoremleri *n*-boyutta da uygulanabildiğidir. Basit bir ifadeyle R^n de Pisagor Teoremini 2 boyutta, örneğin bir kağıt üzerinde uyguluyoruz. R^2 de ise 3 boyutta, örneğin bir küpte uyguluyoruz.

apriori formu olduğu iddiası ve Riemann'ın pozisyonu birbirini dışlamamaktadır. Riemann için topolojik yapı biricik ve zorunludur ancak metrik yapı empirik araştırmaya açıktır. Kant'a göre mantıksal olarak olanaklı farklı uzayların temsili için öncelikle uzay görüsüne ihtiyacımız vardır. Riemann'ın uzayı manifold olarak tanımlaması tam olarak Kant'ın bahsettiği farklı uzayların temsili için bu kavrama denk düşmektedir. Riemann'ın manifold kavramı aynı manifold üzerinde farklı metriklerin seçilmesiyle kurulabilen tüm geometrileri temsil edebilmemize olanak sağlar. Bu anlamda Riemann'ın geometri felsefesinde uzay görüsü Kant'ın apriori form olarak uzay anlayışı şeklinde anlaşılmalıdır. Daha ziyade Kant'a karşı olmak bir yana geometriyi çok büyük ve çok küçük ölçekte[6] fiziğe uygularken kullanabileceğimiz son derece değerli kavramsal kaynakları göstermektedir.

3. Riemann'ın "Sınırsızlık" ve "Sonsuzluk" ayrımı

Riemann *Habilatitionsvortag*'ının ikinci kısmın konusu, "mekândaki yapılar ölçülemeyecek büyüklüklere genişletildiği"nde görünür hale gelen "sınırsızlık" ve "sonsuzluk" ayrımıdır. Bu ayrım, "genişlik özellikleri" ve "ölçüm özellikleri" ayrımı ile anlaşılmalıdır. Çağdaş terminolojide "genişlik bağıntıları" "topolojik bağıntılara", "ölçüm bağıntıları" ise "metriksel bağıntılarına" tekabül eder. Bu farkı bir kürenin yüzeyini inceleyerek görebiliriz; bu yüzey sonsuz değildir ama sınırsızdır.

> Uzayın sınırsız üç boyutlu manifold olması dış dünyayı her kavrayışımızda kullandığımız bir *varsayımdır*. Bu varsayım sayesinde gerçek algının alanının her anı sağlanır ve peşinde olunan nesnelerin olası uzayları kurulur ve bu uygulamalarda bu varsayım sürekli olarak teyit edilir. Sonuç olarak, uzayın sınırsız oluşunun dış dünyanın herhangi bir deneyiminden daha kesin empirik bir kesinliği vardır. Ancak uzayın sonsuzluğu herhangi bir şekilde bundan çıkmaz (Riemann,1929,s.423).

Riemann'ın sonsuzluk ile ilgili vurgusunu bizim uzayın sonsuzluğun-

---

[6] Riemann *Habilatitionsvortag*'ın bu bölümünde, doğayı anlamada sonsuz küçüklükler üzerine yapılan çalışmaların faydası üzerinde durur; "ölçülemez büyüklükteki alanlarla ilgili sorular, doğayı açıklamak için oldukça kullanışsızdır. Ölçülemez küçüklükler içinse durum farklıdır. Fenomenlerin nedensel bağlantılarına dair bilgimiz temelde onları sonsuz küçüklüklere kadar takip ederkenki hassasiyetimize bağlıdır". Riemann da buradan "ölçümün sonsuz küçüklüklerdeki mekânsal bağıntıları bu yüzden kullanışsız değildir" sonucuna ulaşır.

dan emin olmamız onun sınırsızlığından emin olmamız ile bağdaşır mı? Sorusu takip eder. Riemann'ın bakış açısıyla uzayın 3 boyutlu manifold olmasının onun sonsuz olmasıyla aynı empirik kesinliğe sahip olduğunu iddia etmek yanlış olmayacaktır. Yukarıdaki alıntı gösteriyor ki Riemann için bizim dış dünya kavrayışımız 3 boyutlu Öklidyen geometri ile sınırlanmıştır ancak bu bağlamda o Kant'ın uzay görüsüne herhangi bir referans vermemektedir.

Kant uzayın görüsel doğasıyla ilgili *Arı Usun Eleştirisi* nde B40'da onun bizim önsel farkındalığımızla garanti edilen sonsuz olmasına vurgu yaparak uzayın görüsel doğasına dair iddiasını ortaya koyar Tek bir topoloji üzerinde farklı metriklerin tanımlanabilmesinin olanağı fikri Kant'ın uzay anlayışının yorumlanışında kullanılabilir. Mekânın *metafiziksel* açımlamasında dört temel önerme mevcuttur:

1. Uzay dış deneyimlerden türetilen görgül (empirik) bir kavram değildir (2008: B38)

Kant'a göre mekândaki şeylerin ilişkisel kısmı ile elde edilen dışsal deneyim mekânın temsilini bize vermez. Bu ilişkisellik ancak mekânı önceden varsayarsak mümkündür.

2. Uzay tüm dış görülerin temelinde yatan zorunlu bir apriori tasarımdır (2008: A24/B39)

Kant'a göre şeyler olmaksızın mekânı tasarımlayabildiğimizden ama mekân olmaksızın şeyleri tasarımlayamadığımızdan mekân zorunlu aprioridir.

3. Uzay genel olarak şeylerin ilişkilerinin diskürsif ya da, söylendiği gibi, evrensel bir kavramı değil, ama arı bir görüdür (2008: A25).

Kant'a göre mekânın parçalarından bahsederken bile biz bir ve aynı mekândan bahsederiz, öyleyse o genel bir kavram değil görüdür.

4. Uzay verili sonsuz bir büyüklük olarak tasarımlanır (2008: B40).

Kant'a göre mekânın tüm bölümleri ebedi biçimde aynı zamanda olduğundan o bir kavram değil saf görüdür (2008: B40). Kant metafiziksel açımlamayla birlikte uzayın süreklilik, sınırsızlık gibi özelliklerini vererek bir topoloji tanımlamaktadır. Benzer şekilde Torretti de şunları yazar:

Kant uzay olarak adlandırılan görünün a priori manifoldunu yalnızca bir

> nokta seti olarak değil ama (büyük ihtimalle 3 boyutlu) süreklilik olarak kavrar, buradan varsaymalıyız ki o, "görünün saf formu"nun geometrinin nesnesi üzerinde kesin bir topolojik yapıyı kazandırdığı anlayışının sınırlanmasını bekler. Ancak bundan bağımsız olarak, bu anlayış kendi sahip olduğu yasalar dışında başka yasalara gerek olmaksızın ona bir belirlenim kazandırabilir. Klasik geometrinin önermeleri mantıksal olarak zorunlu olmadığı için bu anlayışı farklı alternatif geometriler (önceden tanımlanan topoloji ile uyumlu) geliştirmek ve fizikte kullanmaktan kimse alıkoyamaz (Torretti, 1984: 33).

Dolayısıyla Kant'ın uzayın eşsiz (unique) bir belirlenimini vermediği öncülünden hareketle olanaklı herhangi bir uzayın herhangi bir geometrik yapıya (insanın kavrayışından farklı olanlar dahil) sahip olacağını öne sürmek mümkündür. Ancak süreklilik, 3 boyutluluk ve sınırsızlık gibi topolojik özellikler saf görü tarafından konulmuş sınırlamalardır. Sonuç olarak Riemann'ın *n*-boyutlu manifold kavramı Kant'ın saf görüsü tarafından konulan topolojik sınırlamalar ile uyumludur. Kant'ın saf görüsü kendisi yardımıyla fiziksel uzayı temsil edebildiğimiz bir şeydir. Boş uzayı düşünebildiğimizden ama uzayın yokluğunu düşünemediğimizden uzay saf görünün formu olarak aprioridir. İkinci olarak, Kant için saf görü olarak uzay sıradan deneyimin fiziksel uzayıyla aynı şeydir ve empirik olarak gerçek ve transendental olarak ideal uzaydır. Wiredu (1970: 5-6) ve Friedman'a (1985; s.455,506, 1992; s.94)göre Kant'ta mantıksal olanaklı uzaydan bahsetmek mümkündür. Öyleyse önümüzde yanıtlanması gereken iki soru durmaktadır: 1) Kant için olanaklılık ne demektir? 2) Kant için mantıksal olanaklı uzay ne anlama gelmektedir?

4. Kant, Olanaklılık ve Mantıksal Olanaklı Uzay

Kant'a göre geometri yalnızca mantık yardımıyla ilerlemez yani geometrik akıl yürütme analitik değildir. Geometrinin önermelerini sentetik yapan şey inşa (inşa etme) işidir. Yani Kant'ın saf görüsü Öklid'in ispat işlemlerinde gerekli olan geometrik figürlerin varlığı için sürekli tekrarlanan prosedürünün yerine işlev görür. Kant Öklid'e benzer şekilde geometrik akıl yürütmelerde şekillerin rolünün mantık ispatlarında ispat basamaklarının akıl yürütmenin ilerlemesine yönelik olarak oynadığı role paralel şekilde görür. Geometrik önermelerin sentetik oluşu geometrik şekillerin inşa etme işinde kullanılmasından ileri gelmektedir (Bağçe, 2003: 29,38).

Kant olanaklı olanın görü ve kavramların biçimsel koşullarını sağlaması gerektiğini, yalnızca bir çelişkinin bulunmamasının mümkün bir geometrik figürü kurmak için yeterli olmadığını belirtir:

> Böyle bir kavramda hiçbir çelişkinin kapsanmaması gerektiği hiç kuşkusuz mantıksal koşuldur; ama kavramın nesnel olgusallığı için,.e.d. kavram yoluyla düşünüldüğü biçimiyle bir nesnenin olanağı için bu hiçbir biçimde yeterli değildir. Böylece, iki düz çizgi arasına kapatılmışmış bir beti kavramında hiçbir çelişki yoktur. Çünkü iki düz çizginin ve bunların kesişmelerinin kavramları bir betinin olumsuzlanmasını, kapsamaz; tersine, olanaksızlık kendinde kavramdan değil, ama onun uzayda yapılaştırılmasından, e.d. uzayın belirlenimінin koşulundan kaynaklanır (2008: A221/B268).

Kant'a göre geometrik bir figürün olanağını saptayabilmek için gereken şey olanaklı deneyimin bütün nesnelerine temel olabilecek koşullar altında düşünülebilir olmasıdır (2008: A224). Kant olanaklı olana dair görüşlerine şöyle devam eder:

> Olanaklı tüm deneyim alanımıza ait olanların dışında başka algıların ve dolayısıyla bütünüyle bir özdek alanın var olup olamayacağı konusunda anlak karar veremez. Onun işi yalnızca verili olanın sentezi ile ilgilenmektir. Dahası edimsel her şeyi (tüm deneyim nesneleri) salt küçük bir parçası olarak kapsayan geniş bir olanak alanına açılmamızı sağlayan alışıldık tasımlarımızın yoksulluğu apaçık gözler önündedir. Edimsel her şey olanaklıdır; doğal olarak buradan mantıksal evirme kuralına göre şu salt tikel önerme çıkar: Olanaklı kimi şeyler edimseldir; ve bu öyle görünür ki , 'Edimsel olmayan çok şey olanaklıdır' anlamına da gelecektir (2008: A231).

Bu alıntılardan yola çıkarak Friedman Kant'ın iki anlamda olanaktan bahsettiği sonucuna varır. Ona göre Kant'ın olanaklılık anlayışı şöyle açıklanabilir. Düşünmenin koşulları ile görü ve kavramanın birlikteliği tarafından sağlanan olanaklılık arasında bir ayrım vardır. Kant için düşünmenin koşulları bizim anladığımız anlamda mantıksal olanaklılığa değil daha çok 'kendinde şey' in boş fikrine çelişmezlik ilkesi aracılığıyla sınır çizen düşünmenin koşullarına karşılık gelir. Dolayısıyla bizim anladığımız *man-*

tıksal olanaklılık düşünmenin koşulları tarafından sağlanır. *Gerçek olanaklılık* ise düşüncenin koşulları ve empirik görü aracılığı ile belirlenir. Bu anlamda mantıki olanaklılık *saf matematiğe* karşılık gelirken gerçek olanaklılık *matematiksel fiziğe* ve bizim *fiziksel olanaklılık* anlayışımıza yakındır (Friedman; 1985,s.503,504, 1992; s.99,100).

Burada mantıki olanaklılık ile bugünkü anlamda (modern niceleyiciler teorimize denk gelen) *mantıki olanaklılığı* anlarsak onun Öklidyen uzay tarafından bir eleman olarak içerildiği ve Öklidyen olmayan uzayları da içeren daha geniş bir küme olarak, *gerçek olanaklılığı ise* yalnızca Öklidyen uzayı içeren bir küme olarak düşünme yanılgısına düşeriz (Friedman, 1985: 503). Kant için mantıki olanaklılık düşüncenin koşullarıyla yani genel mantıkla yani çelişmezlik ilkesi ile uyum içinde olmaktır. Bu meseleyi 'İki çizginin bir uzayı kapatamaması' önermesinden yola çıkarak daha iyi anlayabiliriz. Bu önermenin tersini aldığımızda 'İki çizginin bir uzay kapatabilmesi' önermesini elde ederiz ve bu önerme Öklidyen olmayan uzaylarda geçerli olabilen bir önermedir ve Kant bunun mantıki olarak kendisiyle çelişmeyen bir ifade olduğunu yani mantıki olarak olanaklı olduğunu kabul etmekle birlikte onun gerçekten olanaklı olduğunu kabul etmeyecektir. Çünkü insan zihni böyle bir geometrik figürü kuramaz, biz zaman ve uzayın Öklidyen görüsüyle nesneleri kurarız:

> Ama kavramların bizim duyusal sezgimizin ötesine bu genişlemesinin hiçbir yararı yoktur. Çünkü o zaman nesnelerin boş kavramlarıdırlar ve bu nesnelerin olanaklı olup olmadıklarını bile onlarla yargılayamayız. Yalnızca düşünce biçimleridirler ki hiçbir nesnel olgusallıkları yoktur, çünkü elimizde bu düşünce biçimlerinin biricik kapsamlarını oluşturan tam algının sentetik birliğinin uygulanabileceği ve böylece bir nesneyi belirleyebilecek hiçbir sezgi yoktur. Ancak bizim duyusal ve görüsel sezgimiz ona anlam verebilir (Kant, 2008: B149).

5. Uzay Görüsü Üzerine: Riemann ve Kant

Riemann'ın geometri felsefesi ile Kant'ın uzay görüsünün uzlaştırılamayacağını iddia etmek için var olan tüm nedenlere karşın, bu ikisinin zorunlulukla tutarsız olmadıklarını düşünüyorum. *Habilatitionsvortag*'da Riemann geometrinin temellerinde yatan hipotezlerin ve onların doğruluğunun "gözlemin sınırlarında" belirlenim kazanabileceğini iddia eder. Burada "gözlemin sınırları" ifadesinin altını çizmek istiyorum. Riemann bu ifadeyle Kant'ın uzay görüsüyle verili kavramsal kapasitemizi kastetmektedir. Aslında Kant'ın saf görünün mekân formunu Öklidyen almakla işaret ettiği sınırlamaya benzer bir sınırlamayı Riemann da yapar:

> Basitlik sırasındaki bir sonraki vaka, muhtemelen, doğru elemanının dördüncü dereceden bir diferansiyel ifadenin dördüncü kökü tarafından ifade edildiği manifoldları içerecektir. Daha genel olan bu sınıfı araştırmak için çok farklı ilkelere ihtiyaç olmayacaktır. Yalnız, özel olarak sonuçların geometrik olarak ifade edilemeyecek olmasından ötürü, bu araştırma çok zaman alacaktır ve uzay kuramına görece yeni bir ışık tutacaktır (1929: 417).

Ancak burada altı çizilmesi gereken bir nokta vardır. Kant için uzay özellikleri Öklidyen geometri tarafından belirlenir. İnşa saf uzay görüsünde gerçekleşir ve bu insanın geometrik akıl yürütmesinin doğal sonucudur. Yani Kant'ın vurgusu daha çok insanın uzay ve geometri anlayışının görüsel bir noktadan sınırlarken Riemann'ın dördüncü dereceden diferansiyellerle ifade edilen manifoldlar yerine sabit eğikliğe sahip manifoldlarla yola devam etmesi sürekli tikelden genel durumlara gitmeye çalışan bir matematikçi için J. Gray'in deyimiyle "yapay"dır (2003: 18). Yine de bu tutumun Riemann'ın kendi genel amaçlarıyla örtüştüğü iddia edilebilir.

Riemann'ın en temel amacı geometrinin temelinde yatan gerçek hipotezleri ortaya koymaktı. Dolayısıyla uzayın metrik ilişkilerinin kendisinden yola çıkılarak kararlaştırılacağı en temel verileri araştırmalıydı. Bu temel verilerden biri de uzaydaki niceliklerin ölçümünden yola çıkan uzayın sabit eğriliğe sahip manifold olması sonucuydu (Gray, 2003: 18).

Friedman'a göre Kant'ın Öklid aksiyomlarının dış dünyanın ayrıntılı bir tasarımının gösterilmesinin *en genel koşullarını* sunduğu düşüncesi Riemann'ın 1854 tarihli *Habilitationsvortrag*' ında sunmasıyla bu en genel koşullardan *daha genel koşulları* sağlayacak manifold kavramını sunmasıyla sorunlu bir hale gelir:

> Öklid'in aksiyomlarıyla ilgili ciddi bir soru cevaplanmayı beklemektedir. Üzerine gidilirse, Kant, muhtemelen şöyle diyecektir: Bu aksiyomlar öyle koşulları temsil etmektedir ki, bu koşullar altında tek başına bir yer kaplayan büyüklük kavramı ve dolayısıyla sıkı bir dış dünya anlayışı mümkün olmaktadır (B204). Ve artık şunu biliyoruz ki, Kant burada ciddi anlamda bir yanılgı

> içindedir. 1854'te Riemann n-boyutlu genel bir manifold kavramı geliştirmiştir ve bu kavram, üç boyutlu Öklid mekânını ve Kant'ın (veya 18. yy'da yaşamış herhangi bir kimsenin) hayal bile edemediği çok sayıda ek olanağı çok özel durumlar olarak içermektedir (Friedman, 1985: 505).

Bu iddiası için Friedman Kant'ın şu sözlerine referans verir:

> Uzam matematiği (geometri), belitleri ile birlikte- ki bunlar duyusal apriori sezginin dış görüngünün bir arı kavramının şemasının ortaya çıkmasını sağlayan koşulları anlatırlar-, şekillerin üretiminde üretken imgelem yetisinin bu ardışık sentezi üzerine dayanır; örneğin, 'İki nokta arasında salt bir doğru çizgi olanaklıdır'; ya da , 'İki çizgi bir uzay kapatamazlar' vb (2008: B204).

Halbuki burada Kant dış *görünüşten* (appearances) bahsetmektedir, Friedman ın iddia ettiği gibi dış dünyanın tasarımından değil. Riemann dış dünyanın farklı boyutlarda olabileceğinin olanağını gösterir ama Kant açısından burada dikkat edilmesi gerek şey onun nesnelerin bize görünüşte üç boyutlu Öklid geometrisinden farklı bir şekilde verilemeyeceğini söylemesidir. Dış dünya kaç boyutlu olursa olsun biz onunla Öklidyen geometrinin belirlenimleri ile ilişki içindeyizdir. Kant dış dünyanın Öklidyen aksiyomlara uymayacak bir şekilde yaratılamayacağı iddiasında değildir, geometrik olarak farklı bir dünya tasarımı mümkündür ama *görünüş* açısından baktığımızda bizim dış dünya ile ilişkimiz Öklidyendir.

Kaldı ki Friedman burada haklı olsa da Kant'ın kaygısı mümkün deneyimin koşullarını ortaya koyabilmektir. Görünün saf formları olan zaman ve mekân nesneleri *görebilmemizin* imkânını yaratırlar *düşünmemizin* değil (Reyhani, 2010: 213). Öyleyse 'İki çizgi bir uzay kapatmazlar' türünden bir önermenin biz tersini düşündüğümüzde mantıki olanaksızlık oluşturmaz, böyle bir önermenin tersini düşünmeyle dile getirilen ('İki çizgi bir uzayı kapatırlar') türünden Öklidyen olmayan bir önermede dile getirilen ilişkiyi düşünebiliriz ancak görmemiz mümkün olmaz.

Riemann'ın stratejisi görüsel uzayla mantıksal olanaklı uzaylardan sadece birini eşlemektir, zorunlulukla fiziksel uzayın doğru bir tanımıyla eşlemek değildir. Riemann'ın uzayı manifold olarak tanımlamasıyla getirdiği yenilik 3 boyutlu Öklidyen geometrinin tanımının zorunluluğunu elemek ve bunun bir sonucu olarak da Öklidyen geometrideki kavramları kullanarak önermelerin (kavramlardan oluşturulan önermeler) zorunluluğunu elemektir. Bunu yaparken Riemann bir geometri sistemindeki kavramların zorunluluğundan kaçınabilmenin olanağını gösterir.

Riemann için manifold (*n* boyutlu topolojik uzay) sonsuz sayıda uzayın olanağını gösterebilmede en genel yapıdır. Bu anlamda Riemann Kant'ın önerdiği tüm mantıksal olanaklı uzayların kuruluşunu gösterebilir konumdadır. Bu nedenle diyebiliriz ki Riemann için bu yapı olguları kavrayabilmek için en genel koşuldur ve saf görünün apriori formudur. Sonuç olarak Riemann'ın geometri felsefesi Kant'ın görüsel uzayı ile fiziksel uzayı eşlemesini reddeder ama Kant'ın herhangi bir geometri teorisi için a priori zorunlu olduğunu düşündüğü genel uzay görüsünü reddetmez.

Sonuç

Riemann'ın düşünceleri güçlü bir şekilde felsefi kaygılar taşımakla beraber bu fikirlerin Kant'a karşı geliştirildiğini düşünmüyorum. Daha ziyade bu kaygılar ona doğayı daha genel bir bakış açısıyla daha tatmin edici bir zemin bulması için rehber oldu. Riemann'ın asıl amacı Matematik ve Fizik'te devrim yapmak değildi. Daha ziyade Riemann'ın amacı kendi zamanına kadar süregelen ve halen gündemde olan bir soruyla ilgileniyordu; geometri için Öklid'den daha fazla bir şey söylenebilir mi? Öklid'in aksiyomlarının doğruluğundan nasıl emin olabiliriz? Riemann emin olmak için bir prosedür önerir. Ona göre herhangi bir uzayı *n* boyutlu manifold (*n* keyfi olarak gidebileceğimiz yönlerin sayısıdır) olarak düşünebiliriz. Riemann'nin manifold kavramı Kant'taki her uzaysal belirlenimin a priori koşulu olan saf görünün a priori formu olarak uzay gibi düşünülebileceğini göstermiştir. Buna ek olarak Kant'ın psikolojik tezi-yani mantıksal olarak olanaklı geometrilerden sadece 3 boyutlu olanın görüde temsil edilebileceği- Riemann'in mantıksal olarak olanaklı geometrileri kurmuş olmasından etkilenmemektedir. Riemann için sorun farklıydı; O geometrinin temelleriyle Öklid'in meşhur 5. Postulatının[7] çözüm denemeleri ve sonuçları[8] bağlamında ilgilenmek istemiyordu. Daha ziyade 1851 tarihli

7 Eğer bir düz çizgi diğer iki düz çizgiyi keserse, öyle ki, bir kenardaki iki iç açının toplamı iki dik açıdan küçükse, şu halde iki düz çizgi yeterince uzatıldığında, bu açıların olduğu ilk çizginin aynı kenarında kesişirler.

8 Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinin Kant'ın felsefesi ile ilişkisi üzerine tartışmalar

tezinin de gösterdiği gibi *n* boyutlu manifoldlar temelinde geometrik fikirler geliştirmek ve bu fikirleri Matematik ve Fizik'te kullanmak istiyordu. Riemann temel olarak sentetik apriori önermelerle değil, fiziksel uzayın geometrisi ile ilgilenmek istedi. Bu anlamda iddia edilebilecek tek şey Onun Öklidyen geometriye özel bir bağlılığının olmadığıdır. Bu Onun Öklidyen geometrinin doğruluğunun ya da geçerliliğin üzerine gölge düşürmek istediği anlamına gelmemektedir. Riemann'ın amacı geometriyi bilime ve empirik doğrulamaya açık olacak bir şekilde geliştirmekti.

Kaynaklar

Bağçe, S. (2003). Russell'ın Kant Eleştirisi Üzerine. *Felsefe Tartışmaları*, 30, 29-38.

Bağçe, S. (2004). Are Non-Euclidean Geometries Possible For Kant? *Muğla Üniversitesi Uluslararası Kant Sempozyumu Bildirileri* (ed. N. Reyhani). Ankara: Vdi Yayınları.

Bottazini, U. (1994). Geometry and Metaphysics of Space in Gauss and Riemann. *Romanticism in Science* (eds. S.Poggi & M. Rossi). Dordrecht: Kluwer, 15-29.

Friedman, M. (1985). Kant's Theory of Geometry. *Philosophical Review*, 94 (4), 455-506.

Friedman, M. (1992). *Kant and the Exact Sciences*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Friedman, M. (1999). *Reconsidering Logical Positivism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I. (1965). *Critique of Pure Reason* (trans. N. K. Smith) New York: St Martin's Press.

Kant, I. (2008). *Arı Usun Eleştirisi* (çev. A. Yardımlı).İstanbul: İdea Yayınevi.

Laugwitz, D. (1999). *Bernhard Riemann 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics.* Boston: Birkhauser.

başlıca iki görüş temelinde sürdürülmektedir. Birinci görüşe göre Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinin Kant'ın genel anlamda epistemolojisini daha özelde de uzay teorisini desteklemektedir. Diğer görüşe göre ise Öklid geometrisinden farklı ama yine de tutarlı bu geometrilerin keşfi Kant'ın epistemolojisini ve uzay anlayışının geçerliliğini yitirmesine neden olmuştur. Bu çalışmada ayrı bir tartışma konusu olduğundan bu görüşlerden hangisinin geçerli olduğunu tartışmayacağım. Bu tartışmalarla ilgili bkz. Bağçe, 2004: 29-37; Friedman, 1985: 455-506; Amit, 2008: 80-98.

Reyhani, N.(2010). Sentetik A Priori: Tarihsel Arkaplanı ve Bugün İçin Anlamı. *Bilgi Felsefesi* (eds. B. Çotuksöken & A. Tunçel). İstanbul: Heyamola Yayınları, 211-251.

Riemann, B. (1929). On the Hypotheses which Lie at the Foundations of Geometry. *A Source Book in Mathematics* (ed. D. E. Smith). New York: McGraw-Hill, 411-425.

Spivak, M. (1975). *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol 2. Boston: Publish or Perish Inc.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Wiredu, J. E. (1970). Kant's Synthetic A Priori in Geometry and the Rise of Non-Euclidean Geometries. *Kantstudien*, 61 (1), 5-6.

Öz: Riemann'ın ünlü *Habilitationsvortrag*'ında mekâna ilişkin felsefe, matematik ve fizik açısından son derece önemli tespitlerde bulunmuştur. Riemann'ın Matematik alanındaki önemi onaylanmış olmasına ve geometrisinin önemi ve etkileri felsefeciler tarafından çalışılmış olmasına rağmen aynı şeylerin O'nun geometri felsefesi için geçerli olduğunu söyleyemeyiz. Kısmen, bu makale bu motivasyon temelinde oluşturulmuştur. *Habilitationsvortrag*'ında Riemann kendi zamanına kadar süregelmiş yaklaşımları bir kenara bırakarak yeni fikirler ve yaklaşımlar geliştirmiştir. Riemann'a göre Öklidyen geometri, uzayın bir teorisini kurmak için ilginç bir öneri ortaya koymasına rağmen, aslında uzay kavramı ile Öklidyen geometrinin aksiyomları arasında a priori bir bağlantı yoktur. Ona göre Öklidyen geometrinin merkezi kavramları düşünülebilir her geometri sisteminin parçası olmak zorunda değildir. Yani, Öklidyen geometrinin temel kavramlarının kurulabilecek tüm geometri sistemleri için zorunlu olduğu düşünülmemelidir. Riemann doğayı iç yapısının perspektifinden hareketle tanımlamaya çalışmıştır. Bu tarz bir girişim geometri ve uzayın doğasının heterojen bir yaklaşımla ele alınmasını gerektirir.

Anahtar Kelimeler: Kant, Riemann, manifold, uzay görüsü, mekân.