Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
e-ISSN: 2149-3367
DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1521702
AKÜ FEMÜBİD **25** (2025) 011302 (89-94)
AKU J. Sci. Eng. **25** (2025) 011302 (89-94)

Logaritmik İdeal Yakınsaklık

***Makale Bilgisi / Article Info**
Alındı/Received: 24.07.2024
Kabul/Accepted: 04.10.2024
Yayımlandı/Published: xx.xx.xxxx

Logarithmic Ideal Convergence

Ayfer BOZTEPE, **Erdinç DÜNDAR***

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar, Türkiye

Öz

Yapılan bu çalışmada, öncelikle, $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirlik kavramı tanımlanmıştır ve $(H,1)$-toplanabilirlik kavramı ile $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirlik kavramı arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra, logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ve logaritmik $\mathcal{I}$−Cauchy dizi kavramı tanımlanarak aralarındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlanarak logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir. Son olarak logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramı tanımlanarak logaritmik $\mathcal{I}$−Cauchy dizi ile arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *İdeal; $\mathcal{I}$-yakınsaklık; Logaritmik yakınsaklık; $\mathcal{I}$-Cauchy dizi; Logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık.*

Abstract

In this paper, firstly, the concept of $\mathcal{I}(H,1)$-summability is defined and the relation between the concepts of $(H,1)$-summability and $\mathcal{I}(H,1)$-summability is given. Then, the concept of logarithmic $\mathcal{I}$-convergence and the concept of logarithmic $\mathcal{I}$-Cauchy sequence are defined and their relations is investigated. Also, the concept of logarithmic $\mathcal{I}$*-convergence is defined and its relation with logarithmic $\mathcal{I}$-convergence is investigated. Finally, the concept of logarithmic $\mathcal{I}$*-Cauchy sequence is defined and its relation with logarithmic $\mathcal{I}$-Cauchy sequence is investigated.

Keywords: *Ideal; $\mathcal{I}$-convergence; Logarithmic convergence; $\mathcal{I}$-Cauchy sequence; Logarithmic $\mathcal{I}$-convergence.*

1. Giriş

Bu makalede $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olarak alınmıştır. Toplanabilme teorisinde önemli bir yakınsaklık çeşidi olan istatistiksel yakınsaklık kavramını Schoenberg (1959) ve Fast (1951) birbirinden bağımsız olarak yakınsak olan reel sayı dizilerinin bir genelleştirilmişi olarak tanımlamışlardır. Daha sonra Kostyrko vd. (2000) ideal yakınsaklık kavramını istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmiş hali olarak tanımlayarak bir çok önemli özelliklerini vermişlerdir. Bunla birlikte Gürdal (2004) ve aynı zamanda Nabiev vd. (2007) ideal Cauchy dizisi tanımlayarak ideal yakınsaklık ile ilişkisi ve önemli bazı özelliklerinin incelemişlerdir. Alghamdi vd. (2013) logaritmik yoğunluk ve logaritmik istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtmıştır. Nuray (2022) lacunary (H,1) toplanabilirlik, lacunary kuvvetli harmonik toplanabilirlik, lacunary istatistiksel (H,1) toplanabilirlik ve lacunary istatistiksel logaritmik yakınsaklık kavramlarını tanımlamış ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Bu çalışmada öncelikle, $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirlik kavramı tanımlanmıştır ve $(H,1)$-toplanabilirlik kavramı ile $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirlik kavramı arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra, logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ve logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizi kavramı tanımlanarak aralarındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlanarak logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir. Son olarak logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramı tanımlanarak logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizi ile arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bu çalışma logaritmik yoğunluk ile tanımlanan logaritmik istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olan logaritmik ideal yakınsaklık kavramının tanımlanması açısından toplanabilme teorisinde faydalı bir kaynak olacaktır.

2. Temel Tanımlar ve Kavramlar

Şimdi, makalede temel olarak kullanılan ve aşağıda belirtildiği gibi literatürde mevcut olan bazı önemli tanım ve kavramlar verilecektir. (Alghamdi et al. 2013, Alotaibi and Mursaleen 2012, Das *et al*. 2011, Edely and Mursaleen 2009, Fast 1959, Fridy 1985, Gürdal and Huban 2014, Gürdal and Açık 2008, Gürdal et al. 2009, Kostyrko *et al*. 2000, Moric 2004, Mursaleen and Mohiuddine 2012, Nabiev *et al*. 2007, Nabiev et al. 2019, Nuray 2022, Savaş and Gürdal 2015, Şahiner et al. 2011, Tripathy *et al*. 2012, Ulusu and Dündar 2014, Ulusu and Nuray 2020, Yamancı and Gürdal 2013).

**Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Erdinç DÜNDAR* *e-posta/e-mail: edundar@aku.edu.tr*

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}|\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel yakınsak denir.

Bir (x_i) dizisinin harmonik ortalaması

$$\tau_n := \frac{1}{\ell_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $n = 1,2, \dots$ için

$$\ell_n := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \approx \log n$$

dir.

Bir (x_i) dizisi eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ell_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i} = a$$

ise a ya $(H, 1)$-toplanabilir denir.

Tüm $(H, 1)$ toplanabilir reel dizilerin kümesi H ile gösterilecektir. 0 sayısına $(H, 1)$-toplanabilir tüm reel dizilerin kümesini H^0 ile gösterilecektir. Sıradan yakınsamanın her zaman harmonik toplanabilirliği gerektirdiği ve bunun tersinin yalnızca ek koşullar altında geçerli olduğu iyi bilinmektedir.

Bir (x_i) dizisi eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ell_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - a|}{i} = 0$$

ise a ya güçlü harmonik toplanabilir denir.

Bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$\tau_n := l_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k/k$$

olsun. Burada

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k \approx \log n \ (n = 1,2,3, \dots)$$

dir.

Eğer $\tau = (\tau_n)$ dizisi L ye yakınsar ise x dizisi L ye $(H, 1)$ −toplanabilir denir, yani $(H, 1) - \lim x = L$ dir. Eğer $k = 1$ ise, bu durumda

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k = n$$

ve $(H, 1)$-toplanabilirlik, $(C, 1)$-toplanabilirliğe indirgenir. Bir $x = (x_k)$ dizisinin, eğer $\tau = (\tau_n)$ dizisi istatistiksel olarak L ye yakınsak ise $(H, 1)$ istatistiksel toplanabilir denir, yani

$$st - \lim \tau = L = H(st) - \lim x$$

dir. İstatistiksel toplanabilen $(H, 1)$ tüm dizilerin kümesini, $H(st)$ ile belirtiriz ve bu tür dizilere istatistiksel $(H, 1)$ −toplanabilir diziler adını veririz.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{l_n}\left|\left\{k \leq n: \frac{1}{k}|x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise, bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L ye logaritmik istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir idealdir denir:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{I}$ olduğunda $A \cup B \in \mathcal{I}$ dir,

(iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subseteq A$ olduğunda $B \in \mathcal{I}$ dir.

$\mathcal{I}$ ideali için eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ şartı sağlanıyorsa bu durumda, $\mathcal{I}$ ya gerçek (nontrivial) ideal ve $\mathcal{I}$ gerçek (nontrivial) ideali için de her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ şartı sağlanıyorsa bu durumda da $\mathcal{I}$ idealine uygun (admissible) ideal denir.

Bir $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ sınıfı

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(ii) $A, B \in F$ olduğunda $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $B \supseteq A$ olduğunda $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $\mathcal{F}$ ye $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ise

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N}: (\exists H \in \mathcal{I})(M = \mathbb{N}\backslash H)\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ üzerindede bir filtredir. Bu filtreye $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç adı verilir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible idealine ait her karşılıklı ayrık ve sayılabilir $\{A_1, A_2, \cdots\}$ kümeler ailesi için $A_j \Delta B_j$ $(j \in \mathbb{N})$ sonlu küme ve $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ şartlarını sağlayan sayılabilir bir $\{B_1, B_2, \cdots\}$ kümeler ailesi varsa $\mathcal{I}$ idealine (AP) özelliğine sahiptir denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: |x_n - x_N| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_k) dizisine $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olsun.

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = L$$

olacak şekilde bir

$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}, M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$

kümesi varsa (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir.

$\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olmak üzere eğer $x_M = (x_{m_k})$ altkümesi alışılmış Cauchy dizisi ise yani,

$$\lim_{k,p\to\infty} |x_{m_k} - x_{m_p}| = 0$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olan bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi varsa (x_k) dizisine $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir.

Lemma 2.1 (Nabiev *vd.* 2007) $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, (AP) özelliğine sahip bir admissible ideal olmak üzere $F(\mathcal{I})$ filtresini alalım. Bu durumda, her i için $\{P_i\}_1^\infty$, $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin sayılabilir bir ailesi ve $P_i \in F(\mathcal{I})$ olmak üzere $P \in F(\mathcal{I})$ ve her i için $P \backslash P_i$ sonlu bir küme olacak şekilde bir $P \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır.

3. Bulgular

Bu kısımda öncelikle $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirlik tanımı yapılarak $(H,1)$-toplanabilir ile arasındaki ilişki verilmiştir. Çalışma boyunca $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.1. $x = (x_n)$ dizisi için

$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx logn \ \ (n = 1,2,3,\dots)$$

olmak üzere,

$$\tau_n = \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}$$

olsun. Eğer $\tau = (\tau_n)$ dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsak yani,

$$\mathcal{I} - \lim\tau = L = H(\mathcal{I}) - \lim x$$

ise bu durumda, x dizisi L ye $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirdir denir. Diğer bir ifade ile her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \left| \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise, x dizisi L ye $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirdir denir.

Teorem 3.1. Eğer bir $x = (x_n)$ dizisi L ye $(H,1)$-toplanabilir ise bu durumda, L ye $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirdir.

İspat: $x = (x_n)$ dizisi L ye $(H,1)$-toplanabilir olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > n_0$ için

$$\left| \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} - L \right| < \varepsilon$$

dir. Buradan her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \left| \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \{1,2,\dots,n_0\}$$

olduğu açıktır. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $\{1,2,\dots,n_0\} \in \mathcal{I}$ ve dolayısıyla $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ elde edilir. Buradan da x dizisi L ye $\mathcal{I}(H,1)$-toplanabilirdir.

Şimdi logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi tanımları yapılarak aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 3.2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in N: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise bu durumda, $x = (x_n)$ dizisi L ye logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık

$\mathcal{I}(log) - \lim x = L$ veya $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}(log)} L$

ile gösterilir.

Tanım 3.3. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$B(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - x_N| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise bu durumda, $x = (x_n)$ dizisine logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2. Eğer bir $x = (x_n)$ dizisi $\mathcal{I}(log)$-yakınsak ise logaritmik $\mathcal{I}$- Cauchy dizisidir.

İspat: $x = (x_n)$ dizisi L ye $\mathcal{I}(log)$-yakınsak olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

dir. $\mathcal{I}$ bir ideal olduğundan $N \notin A(\varepsilon)$ sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - x_N| \geq 2\varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

kümesini alalım. Şimdi

$$\frac{1}{n} |x_n - L| + \frac{1}{n} |x_N - L| \geq \frac{1}{n} |x_n - x_N|$$

eşitsizliği dikkate alındığında eğer $n \in B(\varepsilon)$ ise bu durumda,

$$\frac{1}{n} |x_n - L| + \frac{1}{n} |x_N - L| \geq 2\varepsilon$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $N \notin A(\varepsilon)$ olduğundan

$$\frac{1}{n} |x_N - L| < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Buradan da her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n} |x_n - L| > \varepsilon$$

olup, dolayısıyla $n \in A(\varepsilon)$ elde edilir ki

$B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$

olduğu görülür. Buradan $B(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ yani, (x_n) dizisi bir logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Şimdi de logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık tanımı yapılarak logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile arasındaki ilişki verilmiştir.

Tanım 3.4. Bir $x = (x_n)$ dizisi için,
$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$
(yani $\mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}$) kümesi var öyle ki

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k} \left| x_{m_k} - L \right| = 0$$

oluyorsa, x dizisi L ye logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsak denir ve

$\mathcal{I}^*(log) - lim x = L$ veya $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*(log)} L$

biçiminde gösterilir.

Teorem 3.3. Eğer bir $x = (x_n)$ dizisi L ye logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsak ise x, L ye logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat: Bir x dizisinin L ye logaritmik $\mathcal{I}^*$-yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bir
$M = \mathbb{N} \backslash H = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k} \left| x_{m_k} - L \right| = 0 \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $H \in \mathcal{I}$ kümesi vardır. $\varepsilon > 0$ alalım. Buradan (1) eşitliği gereğince her $k > k_0$ için

$$\frac{1}{m_k} \left| x_{m_k} - L \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Açık olarak

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq \varepsilon \right\} \subseteq H \cup \left\{ m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0} \right\} \qquad (2)$$

dir. (2) kapsamasının sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}$ ya ait olduğundan $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ olur. Böylece x dizisi L ye logaritmik $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Teorem 3.4. Eğer $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartına sahip ise $\mathcal{I}(log)$-yakınsak bir dizi $\mathcal{I}^*(log)$-yakınsaktır.

İspat: $\mathcal{I}$ idealinin (AP) koşulunu sağladığını kabul edelim. $\mathcal{I}(log) - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

olduğu açıktır. Şimdi $k \geq 2$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq 1 \right\}$$

ve

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} |x_n - L| < \frac{1}{k-1} \right\}$$

kümelerini alalım. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğu açıktır. (AP) koşulundan bir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi vardır öyle ki $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$$

dir. $M = \mathbb{N} \backslash B$ için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\in M)}} x_n = L$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\eta > 0$ olmak üzere $\frac{1}{k+1} < \eta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda,

$$\left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} |x_n - L| \geq \eta \right\} \subset \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$$

olur. $j = 1,2, \dots, k+1$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu kümeler olduğundan,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j \right) \cap \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right) \cap \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $n > n_0$ ve $n \notin B$ ise

$$n \in \bigcup_{j=1}^{k+1} B_j$$

ve (1) eşitliğinden

$$n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$$

elde edilir. Ancak bu durumda,

$$\frac{1}{n} |x_n - L| < \frac{1}{k+1} < \eta$$

olup, böylece

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\in M)}} x_n = L$$

elde edilir.

Son olarak logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi tanımlanarak logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ile aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 3.5. Eğer bir $x = (x_n)$ dizisinin $x_M = (x_{m_k})$ alt dizisi alışılmış bir Cauchy dizisi olacak şekilde bir
$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$
kümesi mevcut yani,

$$\lim_{k,p\to\infty} \frac{1}{m_k m_p} \left| x_{m_k} - x_{m_p} \right| = 0$$

ise x dizisine denir.

Teorem 3.5. Eğer $x = (x_n)$ dizisi bir logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise x dizisi aynı zamanda logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olur.

İspat: $x = (x_n)$ dizisi bir logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda tanım gereği her $\varepsilon > 0$ ve tüm $p, k > k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{m_k m_p} \left| x_{m_k} - x_{m_p} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir

$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N},\ M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. $N = N(\varepsilon) = m_{k_0+1}$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olduğunda

$$\frac{1}{m_k}\left|x_{m_k} - x_N\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $H = \mathbb{N}\backslash M$ alalım. Bu durumda, $H \in \mathcal{I}$ ve

$$A(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}|x_n - x_N| \geq \varepsilon\right\}$$
$$\subseteq H \cup \left\{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0}\right\} \quad (3)$$

olduğu açıktır. Burada (3) kapsamasının sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}$ ya ait olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ bulanabilir. Dolayısıyla x dizisi logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Teorem 3.6. Eğer $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağlayan bir uygun bir ideal ise bu durumda logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ve logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramları çakışır.

İspat: Eğer bir $x = (x_n)$ dizisi logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise $\mathcal{I}$ idealinin (AP) özelliğine sahip olmasına gerek olmadan Teorem 3.4 den x dizisi logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir. Şimdi x dizisinin bir logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim x dizisinin bir logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. x dizisi bir logaritmik $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda tanım gereği her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}|x_n - x_N| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ vardır. Şimdi $i = 1,2,\ldots$ için $m_i = N\left(\frac{1}{i}\right)$ olmak üzere

$$P_i = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{nm_i}\left|x_n - x_{m_i}\right| < \frac{1}{i}\right\}$$

kümesini alalım. Burada, $i = 1,2,\ldots$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağladığından Lemma 2.1 den bir $P \subset \mathbb{N}$ var öyle ki $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve tüm i için $P\backslash P_i$ sonludur. Şimdi

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm}|x_n - x_m| = 0$$

olduğunu gösterelim. Bunu ispatlayabilmek için $\varepsilon > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ alalım öyle ki $j > \frac{2}{\varepsilon}$ olsun. Eğer $m, n \in P$ ise $P\backslash P_j$ sonlu bir kümedir dolayısıyla tüm $m, n > k(j)$ ler için $m \in P_j$ ve $n \in P_j$ olacak şekilde $k = k(j)$ vardır. Dolayısıyla tüm $m, n > k(j)$ için

$$\frac{1}{nm_j}\left|x_n - x_{m_j}\right| < \frac{1}{j} \quad ve \quad \frac{1}{mm_j}\left|x_m - x_{m_j}\right| < \frac{1}{j}$$

ve dolayısıyla $m, n > k(j)$ için

$$\frac{1}{nm}|x_n - x_m| < \frac{1}{nm_j}\left|x_n - x_{m_j}\right| + \frac{1}{mm_j}\left|x_m - x_{m_j}\right|$$
$$< \varepsilon$$

elde edilir. Böylece x dizisi bir logaritmik $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

Etik Standartlar Bildirgesi
Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Bu çalışma Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR danışmanlığında Ayfer BOZTEPE tarafından yürütülen "Logaritmik Yakınsaklık Tipleri" başlıklı yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

Yazarlık Katkı Beyanı
Yazar 1: Kaynaklar, Araştırma, Biçimsel analiz, Doğrulama, Yazma – orijinal taslak, Görselleştirme
Yazar 2: Araştırma, Biçimsel analiz, Doğrulama, Yazma – orijinal taslak, Görselleştirme, Kaynak sağlama

Çıkar Çatışması Beyanı
Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği
Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

4. Kaynaklar

Alghamdi, M.A., Mursaleen, M. and Alotaibi, A., 2013. Logarithmic density and logarithmic statistical convergence. *Advances in Difference Equations,* **2013 :227**. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-227

Alotaibi, A. and Mursaleen, M., 2012. A-Statistical summability of Fourier series and Walsh-Fourier series. *Applied Mathematics and Information Sciences,* **6(3)**, 535-538.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S.K., 2011. On generalized of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters,* **24(9)**, 1509-1514. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.03.036

Edely O. H. H. and Mursaleen M, 2009, On statistical A-summability, *Mathematics of Computation Modelling*, **49,** 672-680. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.05.053

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicae,* **2(3-4)**, 241–244. https://doi.org/10.4064/cm-2-3-4-241-244

Fridy J. A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, **5**, 301-313. https://doi.org/10.1524/anly.1985.5.4.301

Gürdal, M. and Huban, M. B., 2014. On $\mathcal{I}$-convergence of double sequences in the topology induced by random 2-norms, *Matematički Vesnik*, **66**(1) 73–83.

Gürdal, M. and Açık, I., 2008. On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces, *Mathematical Inequalities and Applications*, **11**(2), 349–354. http://dx.doi.org/10.7153/mia-11-26

Gürdal, M., Şahiner, A. and Açık, I., 2009. Approximation theory in 2-Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, **71**(5-6), 1654–1661. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.01.030

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}$-convergence, *Real Analysis Exchange*, **26**(2), 669–686.

http://dx.doi.org/10.2307/44154069

Móricz, F., 2004. Theorems relating to statistical harmonic summability and ordinary convergence of slowly decreasing or oscillating sequences, *Analysis,* **24**, 127-145. http://dx.doi.org/10.1524/anly.2004.24.14.127

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A., 2012. On ideal convergence in probabilistic normed spaces. *Mathematica Slovaca,* **62**, 49-62. http://dx.doi.org/10.2478/s12175-011-0071-9

Nabiev, A., Pehlivan, S. and Gürdal, M., 2007. On $\mathcal{I}$-Cauchy sequence. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11(2)**, 569–576. http://dx.doi.org/10.11650/twjm/1500404709

Nabiev, A., Savaş, E. and Gürdal, M., 2019. Statistically localized sequences in metric spaces, *Journal of Applied Analysis and Computation*, **9**(2), 739–746. http://dx.doi.org/10.11948/2156-907X.20180157

Nuray, F., 2022. Lacunary statistical harmonic summability. *Journal of Applied Analysis and Computation,* **12(1)**, 294-301. http://dx.doi.org/10.11948/20210155

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, **66(5)**, 361–375. https://doi.org/10.1080/00029890.1959.11989303

Şahiner, A., Gürdal, M. and Yigit, T., 2011. Ideal convergence characterization of the completion of linear n-normed spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, **61**(3), 683–689. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.015

Savaş, E. and Gürdal, M., 2015. $\mathcal{I}$-statistical convergence in probabilistic normed spaces. Politehnica University of Bucharest. Scientic Bulletin. Series A. Applied Mathematics and Physics, **77**(4), 195–204.

Tripathy, B.C., Hazarika, B. and Choudhary, B., 2012. Lacunary $\mathcal{I}$-convergent sequences. *Kyungpook Mathematical Journal,* **52(4)**, 473-482. http://dx.doi.org/10.5666/KMJ.2012.52.4.473

Ulusu, U. and Dündar, E., 2014. $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Filomat*, **28(8)**, 1567–1574. http://dx.doi.org/10.2298/FIL1408567U

Ulusu, U. and Nuray, F., 2020. Lacunary $\mathcal{I}$-invariant convergence. *Cumhuriyet Science Journal*, **41(3)**, 617–624. http://dx.doi.org/10.17776/csj.689877

Yamancı, U. and Gürdal, M. 2013. On lacunary ideal convergence in random-normed space. *Journal of Mathematics*, **2013**, 8 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2013/868457