Sinopfbd, 2024; 9(2): 534-550 **https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1526629**

Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
Sinop Uni J Nat Sci

E-ISSN: 2564-7873

https://dergipark.org.tr/tr/pub/sinopfbd

Ekivaryant CW Kompleksler Üzerine Kompakt Grup Etkileri İçin Conner'in Sanısı

Mehmet ONAT

How to cite: Onat, M. (2024). Ekivaryant CW kompleksler üzerine kompakt grup etkileri için Conner'in Sanısı. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *9*(2), 534-550. https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1526629

Araştırma Makalesi

Sorumlu Yazar
Mehmet ONAT
monat@sinop.edu.tr

Yazarlara ait ORCID
M.O: 0000-0002-6538-6624

Received: 01.08.2024
Accepted: 27.12.2024

Öz

X, Λ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ veya $\mathbb{Q}$) üzerinde sonlu kohomolojik boyuta sahip bir parakompakt uzay ve G, X üzerine sonlu sayıda orbit tipi ile etki eden kompakt bir Lie grubu olsun. R. Oliver tarafından kanıtlandı ki eğer X, Λ üzerinde asiklik bir uzay ise X/G orbit uzayı da Λ üzerinde asiklik bir uzaydır. Bu çalışmada, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli, sonlu boyutlu ekivaryant CW kompleksler üzerine sonlu boyutlu kompakt grup (Lie grubu olmayabilir) etkileri için bu sonuç kanıtlanacaktır. Ayrıca, bazı koşullar altında parakompakt uzaylar üzerine etki eden kompakt bağlantılı grup (Lie grubu olmayabilir) etkileri için rasyonel sayılar üzerinde bir asiklik uzayın sabit nokta uzayının asiklik olduğu gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler: Conner'in sanısı, Asiklik uzaylar, Kompakt grup etkileri

The Conner Conjecture For Compact Group Actions On Equivariant CW Complexes

Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sinop, Türkiye

Abstract

Let X be a paracompact space of finite cohomological dimension over Λ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ or $\mathbb{Q}$) and G be a compact Lie group acting on X with finite many orbit types. It has been proven by R. Oliver that if X is acyclic over Λ, then the orbit space X/G is also acyclic over Λ. In this study, for rational coefficients, this result will be proven for finite-dimensional compact (non-Lie) group actions on finite dimensional equivariant CW complexes with finitely many connective orbit types. Furthermore, it will be showen that the fixed point space of an acyclic space over rationals is acyclic for compact connected (non-Lie) group actions on paracompact spaces under certain conditions.

Keywords: Conner conjecture, Acyclic spaces, Compact group actions

Giriş

G, bir X topolojik uzayı üzerine sürekli bir şekilde etki eden bir topolojik grup olsun. Kompakt dönüşüm gruplarının çalışmasında ilginç ve önemli bir problem X uzayının kohomolojik yapısı ile X^G sabit nokta kümesi veya X/G orbit uzayının kohomolojik yapısı arasındaki ilişkileri incelemektir. Bu şekilde bir çok sonuç literatürde bulunabilir (Allday ve Puppe [1], Borel [2], Bredon [3], Bredon [4], Conner [5], Conner

[6], Deo [7], Deo ve ark. [8], Ku [9], Ku [10], Oliver [11]). Bu biçimdeki bazı sonuçları hatırlayarak işe başlayalım.
H^* bir kohomoloji teorisi olmak üzere eğer $H^0(X;\Lambda) = \Lambda$ ve $n \geq 1$ iken $H^n(X;\Lambda) = 0$ ise X topolojik uzayına asiklik (acyclic) uzay veya Λ-asiklik uzay denir.

Teorem 1. (Conner'in Sanısı) G kompakt bir Lie grup ve X sonlu sayıda orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. O zaman eğer X bir Λ-asiklik uzay ise X/G orbit uzayı da Λ-asiklik uzaydır, burada Λ herhangi bir abelyen gruptur.

Teoremde X'in sonlu boyutlu olması gerekli bir koşuldur. Evrensel serbest (free) G-uzay E_G, sonsuz boyutlu bir G-CW komplekstir (G aşikar değilse) ve asiklik bir uzaydır fakat $B_G = E_G/G$ orbit uzayı sıfırdan farklı kohomoloji cebirine sahiptir.
Bu teoremin Conner'in sanısının özel bir durumu olduğunu not edelim. Teorem bazı koşullar altında Conner [6] tarafından kanıtlandı. Daha sonra Oliver [11] gösterdi ki eğer G, sonlu sayıda orbit tipi ile sonlu kohomolojik boyutlu, parakompakt bir X uzayı veya kompakt bir X uzayı üzerine etki eden kompakt bir Lie grubu ise Λ-asiklik ($\Lambda = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ veya $\mathbb{Q}$) X uzayının X/G orbit uzayı da Λ-asiklik bir uzaydır. X uzayının kompakt olması durumunda sonlu sayıda orbit tipi hipotezine gerek yoktur. Bu sonuçlar aynı zamanda Bredon'un kitabında bulunabilir [4, IV, §14].
Bununla birlikte Deo ve ark. [8] gösterdi ki eğer G, sonlu sayıda orbit tipi ile finitistik (her zaman parakompakt) bir X uzayı üzerine etki eden kompakt bir Lie grubu ise Λ-asiklik bir uzayın X/G orbit uzayı da Λ-asiklik bir uzaydır.
Şimdi Euler karakteristiğinin tanımı hatırlansın. $\chi(X)$ Euler karakteristiği herhangi bir katsayı halkası için

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X)$$

biçiminde tanımlanır. Aşağıdaki teorem Borel-Hsiang-Quillen lokalizasyon teoreminin önemli bir sonucudur.

Teorem 2. G bir torus (kompakt, bağlantılı, abelyen Lie grubu, yani $G = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$) ve X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli ve sonlu kohomolojik boyutlu parakompakt bir G-uzay olsun. Eğer $\sum_{i\geq 0} rkH^i(X;\mathbb{Q}) < \infty$ ise $\sum_{i\geq 0} rkH^i\left(X^G;\mathbb{Q}\right) < \infty$ ve $\chi(X) = \chi\left(X^G\right)$ olur. Özellikle eğer $\chi(X) \neq 0$ ise $X^G \neq \emptyset$ olur. Ayrıca, X bir $\mathbb{Q}$-asiklik uzay ise X^G sabit nokta kümesi de $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Kanıt. Allday ve Puppe [1, Corollary 3.1.13 ve Remark 3.10.5]'de bulunabilir.

Bundan sonra Λ katsayısına göre X uzayının kohomolojik boyutu $\dim_\Lambda X$ ile gösterilecektir, tanım için bkz. Bredon [4] veya Quillen [12].

Teorem 3. (Borel [2, p. 60], Conner [5]) G kompakt bir Lie grup ve X, kompakt bir G-uzay olsun. Eğer $\dim_\Lambda X < \infty$ ve her $x \notin X^G$ için $H^*(B_{G_x};\Lambda) = 0$ ve her $i \geq N$ için $H^i(X;\Lambda) = 0$ ise o zaman aşağıdakiler sağlanır.

a. Her $i \geq N$ için $H^i(X/G;\Lambda) = 0$'dır.

E-ISSN: 2564-7873
b. Eğer G sonsuz ise her $i \geq N$ için $H^i\left(X^G;\Lambda\right) = 0$'dır.

Aşağıdaki koşul kısaca (I_0) olarak adlandırılacaktır.
G_x izotropi alt grubunun birim bağlantılı bileşeni G_x^0, verilen etki altında sabit olmayan her $x \in X$ noktası için G'nin merkezi $Z(G)$'de içerilir, yani her $x \in X \setminus X^G$ için $G_x^0 \subset Z(G)$'dir.
Aşağıdaki sonuç Hofmann ve Mostert [13] tarafından kanıtlandı.

Teorem 4. G, kompakt, $\mathbb{Q}$-asiklik bir X uzayı üzerine etki eden kompakt, bağlantılı bir grup olsun. Eğer (I_0) koşulu sağlanıyorsa X^G sabit nokta kümesi boştan farklıdır ve $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Aşağıdaki sonuçlar Ku [10] tarafından kanıtlandı.

Teorem 5. G, kompakt, $\mathbb{Q}$-asiklik bir X uzayı üzerine etki eden kompakt, bağlantılı bir grup olsun. Eğer (I_0) koşulu sağlanıyor ve her $i \geq N$ için $H^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H^i\left(X^G;\mathbb{Q}\right) = 0$ olur.

Teorem 6. G, kompakt, $\mathbb{Q}$-asiklik bir X uzayı üzerine etki eden kompakt bir grup olsun ve (I_0) koşulu sağlansın. Eğer G'nin birim bileşeni G_0, $Z(G)$'de içerilmiyor ve her $i \geq N$ i çin $H^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H^i\left(X^G;\mathbb{Q}\right) = 0$ olur.

Teorem 7. G, kompakt bir X uzayı üzerine etki eden sonlu boyutlu kompakt bir grup olsun ve (I_0) koşulu sağlansın. Eğer her $i \geq N$ için $H^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H^i(X/G;\mathbb{Q}) = 0$ olur. Özel olarak X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X/G orbit uzayı da $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Teorem 8. X kompakt bir uzay ve G, X üzerine etki eden abelyen ve sonlu boyutlu kompakt bir grup olsun. Eğer her $i \geq N$ için $H^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H^i(X/G;\mathbb{Q}) = 0$ olur.

Deo [7] uzayın (I_0) koşulunu sağlaması ile sonlu sayıda orbit tipine sahip olması koşulunu yer değiştirdi ve sonraki teoremi kanıtladı. Bu iki koşulun birbirinden bağımsız olduğunu not edelim.

Teorem 9. G, $\mathbb{Q}$ üzerinde sonlu kohomolojik boyuta sahip yerel kompakt Hausdorff bir X uzayı üzerine etki eden sonlu boyutlu, kompakt bir grup olsun. Eğer X sonlu sayıda orbit tipine sahip ve her $i \geq N$ için $H_c^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H_c^i(X/G;\mathbb{Q}) = 0$ olur. Burada H_c^*, kompakt destekli sheaf kohomolojiyi gösterir ve X kompakt uzay ise alışılmış H^* kohomolojisine eşit olur.

G-CW kompleksler ile ilgili aşağıdaki sonuç Allday ve Puppe [1, Corollary 3.10.12]'de bulunabilir.

Teorem 10. G bir torus ve X, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer her $i \geq N$ için $H^i(X;\mathbb{Q}) = 0$ ise her $i \geq N$ için $H^i(X/G;\mathbb{Q}) = 0$ ve $H^i\left(X^G;\mathbb{Q}\right) = 0$ olur.

Yukarıdaki teoremlerde G kompakt grubunun etki ettiği topolojik uzaylar kompakt ya da yerel kompakt uzaylardır.
Bu makalede bu uzayların sonlu boyutlu G-CW kompleksler (parakompakt uzayların bir alt sınıfıdır) ile yer değiştirilebileceği gösterilecektir.
Daha açık yazılacak olursa aşağıdaki teoremler ve sonlu boyutlu G-CW kompleksler üzerine etki eden sonlu boyutlu kompakt gruplar için lokalizasyon teoreminin doğru olduğu kanıtlanacaktır.
Bu sonuçların önemi topolojik grup etkileri teorisinde Hilbert-Smith sanısı olarak bilinen hala cevaplanamamış bir problemin var olmasıdır. Bu sanı, bir sonlu boyutlu manifold üzerine efektif olarak etki eden bir kompakt topolojik grubun bir Lie grubu olması gerektiğini iddia eder.

E-ISSN: 2564-7873

Teorem 11. G, sonlu boyuta sahip kompakt bir grup ve X sonlu boyutlu G-CW kompleks olsun. Eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X/G orbit uzayı da $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Teorem 12. G, sonlu boyutlu bağlantılı, kompakt, abelyen bir grup ve X sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ve X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip ise X^G sabit nokta kümesi de $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Teorem 13. G, kompakt, bağlantılı bir grup ve X, $\mathbb{Q}$-asiklik, parakompakt bir uzay olsun. Eğer (I_0) koşulu sağlanıyorsa X^G sabit nokta kümesi boş değildir ve $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Ön Bilgiler

Bu bölümde bazı temel kavram ve sonuçlar ifade edilecektir. Topolojik gruplar da dahil tüm topolojik uzayların Hausdorff olduğu kabul edilecektir.
Açıklanmamış notasyon ve kavramları okuyucuyu Allday ve Puppe [1], Borel [2], Bredon [3], Hofmann ve Morris [14], veya Onat [19] kaynaklarında bulabilir.
Şimdi X herhangi bir topolojik uzay ve G herhangi bir topolojik grup olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\Theta : G \times X \longrightarrow X$ sürekli dönüşümüne G'nin X üzerine bir etkisi ve X uzayına da G-uzay denir.

a. Her $x \in X$ ve $g, h \in G$ için $(gh)\,x = g\,(hx)$'dir.

b. Her $x \in X$ için $ex = x$'dir, burada e , G'nin birimidir.

Bir $x \in X$ noktasının izotropi alt grubu G'nin $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ (kapalı) alt grubudur. Bir $x \in X$ noktasının orbiti X'in $G\,(x) = \{gx \in X : g \in G\}$ alt uzayıdır. Daha genel olarak bir $H \subset G$ alt grubu ve $Y \subset X$ alt uzayı için $H\,(Y) = \{hy : h \in H, y \in Y\}$ olarak tanımlanır. Eğer $G\,(Y) = Y$ ise $Y \subset X$ alt uzayına G-invaryant alt uzay denir.
G-etkiler ile uyumlu (yani her $g \in G$ ve $x \in X$ için $f\,(gx) = gf\,(x)$) G-uzaylar arasında sürekli bir $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne G-ekivaryant bir dönüşüm denir. Eğer X Hausdorff bir uzay ve G kompakt bir grup ise $G\,(x)$, G/G_x homojen uzayına G-izomorfiktir.
Eğer $G_x = G$ (veya denk olarak $G\,(x) = \{x\}$) ise $x \in X$ noktasına G-etkisinin sabit noktası (fixed or stationary point) denir. Etkinin sabit noktalarının kümesi X^G veya $F\,(G, X)$ ile gösterilecektir.
Her bir $x \in X$ noktasını $G\,(x)$ orbiti ile özdeşleştirerek elde edilen bölüm uzayı X 'in orbit uzayı olarak adlandırılır ve X/G ile gösterilir. Böylece $X/G = \{G\,(x) : x \in X\}$ olur ve bölüm topoloji ile verilir.
G, bir X uzayı üzerine etki eden bir topolojik grup olsun. Eğer $\{[G_x] : x \in X\}$ sonlu bir küme ise X sonlu sayıda orbit tipine sahiptir (finitely many orbit types) veya G, X üzerine sonlu sayıda orbit tipi ile etki eder denir, burada $[G_x]$, G_x izotropi alt grubunun G'de konjuge sınıfını gösterir. Eğer $\left\{ \left[G_x^0\right] : x \in X\right\}$ sonlu bir küme ise X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahiptir (finitely many connective orbit types) veya G, X üzerine sonlu sayıda bağlantılı orbit tipi ile etki eder denir, burada G_x^0, G_x izotropi alt grubunun birim bağlantılı bileşenidir. Aşağıdaki lokalizasyon teoreminde eğer katsayılar halkası karakteristiği sıfır olan bir cisim ise sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip olması varsayımı yeterlidir (Allday ve Puppe [1, p.131]). Sonlu sayıda orbit tipine sahip olma, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip olma özelliğini gerektirir. Eğer $G = \mathbb{S}^1$ ise herhangi bir G-uzayının sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip olduğu açıktır.

E-ISSN: 2564-7873
G kompakt bir grup ve X herhangi bir G-uzay olsun. Eğer H, G'nin kapalı ve normal bir alt grubu ise G/H bölüm grubunun X/H orbit uzayı üzerine etkisi $(gH) * (Hx) = H(gx)$ ile verilir ve H'nin X üzerine etkisi G'nin kısıtlanmış etkisidir. Ayrıca $i(Gx) = (G/H) * (Hx) = Gx/H$ ile tanımlanan $i : X/G \longrightarrow (X/H)/(G/H)$ dönüşümü bir homeomorfizmdir (Bredon [3] veya Hofmann ve Morris [14]).
İyi bilinen başka bir gerçek şudur:

Lemma 14. (Bredon ve ark. [15], Ku [10]) Eğer G, bir X uzayı üzerine etki eden bağlantılı bir grup ve N tamamen bağlantısız (totally disconnected) bir alt grup ise o zaman $(X/N)^{G/N} \approx X^G$ olur.

Bu gerçekler gösterir ki kompakt grup etkileri ile ilgili problemler Lie grubu etkilerine indirgenebilirler. Yukarıdaki verilen grup etkisi ile bölüm grubu etkisinin izotropi alt grupları ve bağlantılı bileşenleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

Not 15. G, bir X uzayı üzerine etki eden kompakt bir grup ve N, G'nin kapalı ve normal bir alt grubu olsun. Her $x \in X$ için

$$(G/N)_{N(x)} = NG_x/N$$

(Hofmann ve Morris [14, Proposition 10.31] veya Conner [6]) ve

$$(G/N)^0_{N(x)} = \left(NG^0_x\right)/N$$

(Hofmann ve Morris [14, Lemma 9.18]) olduğundan kolayca görülebilir ki eğer G, X üzerine sonlu sayıda (sırasıyla bağlantılı) orbit tipi ile etki ediyorsa G/N, X/N üzerine sonlu sayıda (sırasıyla bağlantılı) orbit tipi ile etki eder.

Eğer G bir torus ve X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli herhagi bir G-uzay ise $X^G = X^{\mathbb{S}^1}$ olacak şekilde bir $\mathbb{S}^1 \subset G$ alt çember grubu vardır (Allday ve Puppe [1, Lemma 4.2.1]). Bu gerçek gösterir ki sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip bir uzay üzerine etki eden torus etkilerinin sabit noktaları ile ilgili sonuçları yalnızca çember grubu etkisi için kanıtlamak yeterlidir.
Şimdi kompakt gruplar ile ilgili bazı gerçekler ifade edilecektir.
Öncelikle bir normal uzayın boyutunu hatırlayalım. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X'in alt kümelerinin sonlu bir ailesi olsun. Her $x \in X$ için x noktasını içeren $\mathcal{A}$'nın elemanlarının sayısını $r(x)$ ile gösterelim. X üzerinde tanımlanan $r(x)$ fonksiyonunun maksimumu $\mathcal{A}$'nın derecesi (order) olarak adlandırılır.
$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, bir X uzayının örtüleri olsun. Eğer her $B \in \mathcal{B}$ için $B \subset A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{A}$ varsa $\mathcal{B}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir incelmişi (refinement) denir.
Şimdi $X \neq \emptyset$ normal bir uzay olsun. X'in örtü boyutu negatif olmayan bir tamsayı ya da ∞ olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $\dim X$ ile gösterilir.

1. Eğer X uzayının her sonlu açık örtüsü, derecesi n'den küçük ya da eşit olan bir sonlu açık incelmişe sahip ise $\dim X \leq n$'dir, burada $n = 0, 1, \cdots$ şeklindedir.

2. Eğer $\dim X \leq n$ ve $\dim X > n - 1$ ise $\dim X = n$'dir.

3. Eğer $n = 0, 1, \cdots$ için $\dim X > n$ ise $\dim X = \infty$'dur.

Bir kompakt grubun sıfır boyutlu olması için gerek ve yeter şart tamamen bağlantısız olmasıdır.

İyi bilinir ki her kompakt gruba Lie grupları ile yaklaşılabilir, yani her kompakt grup kompakt Lie gruplarının ters (projektif) limitidir. G kompakt bir grup ve $\mathcal{N}$, G'nin normal, kapalı ve tamamen bağlantısız alt gruplarının bir filtre bazı olsun öyle ki her $N \in \mathcal{N}$ için G/N sonlu boyuta sahip kompakt bir Lie gruptur ve $\bigcap \mathcal{N} = \{1\}$'dir. O zaman G, $\varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ ters limitine homeomorfiktir. Eğer G sonlu boyutlu, kompakt bir grup ise her $N \in \mathcal{N}$ için $\dim G = \dim G/N$ olduğu kabul edilebilir.

Eğer G, n-boyutlu torusların bir ters limiti ise G sonlu boyutlu pro-torus olarak adlandırılır, yani G sonlu boyutlu kompakt, bağlantılı, abelyen bir gruptur. 1-boyutlu pro-torus solenoid olarak adlandırılır. Daha fazla detay, Montgomery ve Zippin [16], Pontryagin [17] veya Hofmann ve Morris [18] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 16. [17, Theorem 69] Eğer G sonlu boyutlu kompakt bir grup ise G/N bir Lie grubu olacak şekilde G'nin tamamen bağlantısız kapalı bir N alt grubu vardır.

G-uzayların kohomolojini çalışmak için Borel [2] tarafından bir metod ortaya kondu. Bu metod, topolojik dönüşüm grupları teorisinin temel aracı haline gelmiştir. Bu yapı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Her G topolojik grubu için G'nin serbest etki ettiği bir (büzülebilir, parakompakt) E_G uzayı vardır ve $G \to E_G \to B_G$ bir esas demet uzayı (principal bundle) olup evrensel esas demet uzayı olarak adlandırılır, burada $B_G = E_G/G$ orbit uzayı G'nin sınıf uzayı olarak adlandırılır. (Milnor [20]). Şimdi X herhangi bir G-uzayı ise G'nin $X \times E_G$ çarpım uzayı üzerine $g\,(x, e) = (gx, ge)$ ile tanımlanan bir (serbest) etkisi vardır. Bu etkinin orbit uzayı $X_G = X \times_G E_G = (X \times E_G)\,/G$ ile gösterilir ve X'in Borel yapısı olarak adlandırılır. X_G uzayı üzerinde düşünülmesi gereken iki doğal dönüşüm vardır. $X \times E_G \longrightarrow E_G$, 2. izdüşüm dönüşümü, lifi (fiber) X olan bir $\pi_2 : X_G \to B_G$ demetimsi (fibration) belirler. Bu demetimsi Borel demetimsi olarak adlandırılır (Borel [2]).

Ayrıca $X \times E_G \longrightarrow X$, 1. izdüşüm dönüşümü, bir $\pi_1 : X_G \longrightarrow X/G$ dönüşümü belirler (genelde bir demetimsi değildir) öyle ki bu dönüşümün lifleri $\pi_1^{-1}(x^*) = G\,(x) \times_G E_G = (G/G_x) \times_G E_G = (G \times_G E_G)\,/G_x = E_G/G_x$ olur, burada $x^* \in X/G$ ve $x \in x^*$'dır. Eğer $G \longrightarrow G/G_x$ bir esas G_x-demet ise (örneğin G kompakt Lie grubu ya da G sonlu boyutlu, kompakt bir grup iken bu sağlanır) bu durumda $E_G \longrightarrow E_G/G_x$ bir evrensel esas G_x-demet olur ve $E_G = E_{G_x}$ alınabilir ve E_G/G_x bölüm uzayı B_{G_x} sınıf uzayı olarak seçilebilir.

$H_G^*\,(X; \Lambda) := H^*\,(X_G; \Lambda)$ (burada sağdaki kohomoloji alışılmış kohomoloji teorisidir) ile tanımlanan genelleştirilmiş kohomoloji teorisi Λ katsayılı Borel kohomoloji ya da ekivaryant kohomoloji olarak adlandırılır. $H_G^*\,(X; \Lambda)$ kohomoloji halkası $H^*\,(B_G; \Lambda)$ üzerinde $\pi_2^* : H^*\,(B_G; \Lambda) \to H_G^*\,(X; \Lambda)$ halka homomorfizmi ile belirlenen kanonik bir cebir yapısına sahiptir. Çarpma işlemi $a \in H^*\,(B_G; \Lambda)$ ve $x \in H_G^*\,(X; \Lambda)$ için $ax = \pi_2^*\,(a) \cup x$ ile verilir, burada $\cup$, $H_G^*\,(X; \Lambda)$'deki cup çarpmadır. Bu cebir X'in ekivaryant dereceli kohomoloji cebiri olarak adlandırılır.

Şimdi G ve G' iki topolojik grup ve X ile X', sırasıyla G ve G'-uzaylar olsun. $u : G \to G'$ sürekli bir dönüşüm ve $f : X \to X'$, u-ekivaryant bir dönüşüm (yani her $g \in G$, $x \in X$ için $f\,(gx) = u\,(g)\,f\,(x)$) ise o zaman (u, f) ikilisi $H_{G'}^*\,(X') \to H_G^*\,(X)$ homomorfizmini belirler (Quillen [12]).

Bu makalede rasyonel katsayılı, kapalı destekli sheaf kohomoloji ile çalışılacaktır. Fakat sonuçlar karakteristiği sıfır olan bir cisim durumunda da sağlanır.

Son olarak bu makalenin temel konusu olan sonlu boyutlu G-CW komplekslerin tanımı ve bazı önemli özellikleri verilecektir.

Tanım 17. A/G, Hausdorff bir uzay olmak üzere (X, A), G-uzayların bir çifti olsun. (X, A) üzerinde bir relatif G-CW kompleks yapısı aşağıdakilerden oluşur.

a. $X = \bigcup_{n=-1}^{\infty} X_n$ uzayının $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \cdots$

şeklinde bir filtrasyonu vardır.

b. Her $n \geq 0$ için aşağıdaki özelliklere sahip X_n'in $e_i^n \subset X_n$, G-alt uzaylarının bir $\{e_i^n : i \in I_n\}$ koleksiyonu vardır.

i. X, $\{X_n : n \geq -1\}$ filtrasyonuna göre zayıf topolojiye sahiptir, yani herhangi bir $n \geq -1$ için $B \subset X$'in kapalı olması için gerek ve yeter şart $B \cap X_n \subset X_n$'nin kapalı olmasıdır.

ii. Her $n \geq 0$ için, $e_i^n = Q_i^n \left(G/H_i \times \operatorname{Int} D^n\right)$ olacak şekilde bir G-pushout diyagramı vardır.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I_n} G/H_i \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} q_i^n"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I_n} G/H_i \times D^n \arrow[r, "\coprod_{i\in I_n} Q_i^n"'] & X^n
\end{tikzcd}$$

Eğer $A = \emptyset$ ise o zaman X uzayı bir G-CW kompleks olarak adlandırılır.

X_n alt uzayları (X, A)'nın n. iskeleti olarak adlandırılır ve e_i^n, G-alt uzayları açık n-hücreler olarak adlandırılır. Eğer $X = X_n$ ve $X \neq X_{n-1}$ sağlanıyorsa bir (X, A) relatif G-CW komplekse n-boyutlu denir. Eğer bir n için bu kompleks n-boyutlu ise bu kompleks sonlu boyutlu olarak adlandırılır. Eğer G kompakt bir grup ise herhangi bir sonlu boyutlu G-CW kompleks hem sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt uzaydır hem de finitistik bir uzaydır. Aşağıdaki lemmanın kanıtı Lück [21, p. 7]'da bulunabilir.

Lemma 18. (X, A) çifti A/G, Hausdorff bir uzay olacak şekilde bir relatif G-CW kompleks olsun. Eğer H, G'nin bir normal alt grubu ve aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise $(X/H, A/H)$ bir kanonik G/H-CW kompleks yapısına sahiptir.

a. H kompakttır.

b. Her $x \in X \setminus A$ için G_x kompakttır.

c. G/H ayrıktır.

Eğer X_n, X'in n. iskeleti ve $\{e_i^n : i \in I_n\}$, X'in açık n-hücreleri ise o zaman X_n/H, X/H'nin n. iskeletidir ve $\{e_i^n/H : i \in I_n\}$, X/H 'nin açık n-hücreleridir.
Ana teoremlerin kanıtlanması için aşağıdaki iyi bilinen lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 19. [10] Bir kompakt, tamamen bağlantısız grubun sınıf uzayı $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır, yani
$H^*\left(B_G; \mathbb{Q}\right) = \mathbb{Q}$'dur.

Kanıt. Ku [10] veya Onat [22]'da bulunabilir.

E-ISSN: 2564-7873

Lemma 20. (Vietoris-Begle dönüşüm teoremi) X ve Y parakompakt Hausdorff uzaylar, G bir abelyen grup ve $f : X \longrightarrow Y$ örten, sürekli ve kapalı bir dönüşüm olsun. Her $y \in Y$ ve $q < n$ için $\widetilde{H}^q\left(f^{-1}(y);G\right) = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ doğal sayısının var olduğunu kabul edelim. O zaman

$$f^q : \widetilde{H}^q(Y;G) \longrightarrow \widetilde{H}^q(X;G)$$

homomorfizmi $q < n$ için bir izomorfizm ve $q = n$ için bir monomorfizmdir.

Kanıt. Spanier [23, p. 344]'de bulunabilir.

Asiklik Uzayların Orbit Uzayı ve Sabit Nokta Kümesi

Tamamen bağlantısız, kompakt grupların etkileri sonlu boyuta sahip kompakt grupların etkilerinde önemli bir yere sahiptir. İlk olarak kompakt, tamamen bağlantısız grup etkilerinin orbit uzayının kohomolojisi ile ilgili bir sonuç kanıtlanacaktır. Aşağıdaki önermenin X kompakt uzayı için doğru olduğu yukarıdaki ifade edilmişti. Şimdi bu sonucun parakompakt uzaylar için genellemesi kanıtlanacaktır.

Önerme 21. G, parakompakt bir X uzayı üzerine etki eden kompakt, tamamen bağlantısız bir grup olsun. Eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X/G orbit uzayı da $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Kanıt. X parakompakt bir uzay olduğundan X_G uzayı da parakompakttır (Allday ve Puppe [1, p.141]) ve B_G sınıf uzayı da parakompakttır. Şimdi $X \to X_G \to B_G$ Borel demetimsisini düşünelim. X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise Vietoris-Begle dönüşüm teoreminden $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H^*(X_G;\mathbb{Q})$ homomorfizmi bir izomorfizmdir. Ayrıca B_G, $\mathbb{Q}$-asiklik uzay olduğundan (Lemma 19) X_G uzayının $\mathbb{Q}$-asiklik uzay olduğu elde edilir. Diğer taraftan $\pi_1 : X_G \to X/G$ sürekli bir dönüşüm ve lifleri $\pi_1^{-1}(G(x)) = B_{G_x}$ ve B_{G_x}, $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır çünkü G_x kompakt, tamamen bağlantısız bir uzaydır. Yine Vietoris-Begle dönüşüm teoreminden π_1 dönüşümü $H^*(X/G;\mathbb{Q}) \to H^*(X_G;\mathbb{Q})$ izomorfizmini belirler. Böylece X/G orbit uzayı $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay olur.

Şimdi ana teoremlerimizi kanıtlamak için hazırız.

Teorem 22. G sonlu boyuta sahip kompakt bir grup ve X sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X/G uzayı da $\mathbb{Q}$-asikliktir.

Kanıt. G/N kompakt bir Lie grubu olacak biçimde G'nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız bir N alt grubu vardır (Teorem 16). X/N orbit uzayı üzerinde G/N kompakt Lie grubunun doğal etkisini göz önüne alalım. Önerme 21 gereği X/N bir $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır. Lemma 18 gereği açıktır ki X/N, sonlu boyutlu bir G/N-CW komplekstir. Ayrıca G/N, X/N üzerine sonlu sayıda orbit tipi ile etki eder (Not 15). Conner'in teoremi (Teorem 1) gereği $X/G \approx (X/N)/(G/N)$ uzayı da $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Teorem 23. G sonlu boyutlu bir pro-torus ve X, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X^G sabit nokta kümesi de $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Kanıt. G/N bölüm grubu torus olacak biçimde G'nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız bir N alt grubu vardır (Teorem 16). X/N orbit uzayı üzerinde, G/N torus grubunun kanonik etkisini düşünelim. Bu etki sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahiptir (Not 15). Ayrıca Önerme 21 gereği X/N, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır ve Lemma 18 gereği X/N, sonlu boyutlu bir G/N-CW komplekstir. Teorem 2 gereği $(X/N)^{G/N} \approx X^G$ sabit nokta kümesi de $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Aşağıdaki teoremler yerel kompakt uzaylar için Ku [9, p. 33] tarafından kanıtlandı fakat parakompakt uzaylar için de sağlanır.

Teorem 24. $\mathbb{S}^1$ çember grubu parakompakt bir X uzayı üzerine etki etsin. Eğer $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$ ise $\chi(X;\mathbb{Q}) = \chi(F;\mathbb{Q})$ olur. Özel olarak eğer X, $\mathbb{Q}$-asiklik uzay ise X^G sabit nokta kümesi de $\mathbb{Q}$-asiklik uzaydır.

Teorem 25. X, parakompakt bir uzay ve G, X üzerine etki eden kompakt, tamamen bağlantısız olmayan bir grup olsun. Eğer $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$ ve her $x \notin X^G$ için G_x sonlu ise $\chi(X;\mathbb{Q}) = \chi(F;\mathbb{Q})$ olur.

Hofmann ve Mostert [13, Theorem 3.7] tarafından kullanılan teknikleri kullanarak aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz.

Teorem 26. G, sonlu boyuta sahip kompakt ve bağlantılı bir grup ve X, $\mathbb{Q}$-asiklik, parakompakt bir G-uzay olsun. Eğer (I_0) koşulu sağlanıyorsa o zaman X^G sabit nokta kümesi boş değildir ve $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır.

Kanıt. G/N kompakt ve bağlantılı bir Lie grup olacak biçimde G'nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız bir N alt grubu bulunabilir (Teorem 16). Böylece $F(G,X) \approx F(G/N, X/N)$ ve Önerme 21 gereği X/N, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır. Ayrıca

$$(G/N)^0_{N(x)} = \left(NG^0_x\right)/N \subset [NZ(G)]/N \subset Z(G/N)$$

olduğundan G'yi kompakt, bağlantılı bir Lie grubu varsayabiliriz.
İlk olarak G'nin abelyen olduğu varsayılsın. O zaman G bir torus olup iddia G'nin boyutu üzerinden tümevarımla kanıtlanabilir. Eğer G, 1-boyutlu ise o zaman Teorem 24 gereği iddia doğrudur.
Şimdi iddianın $(n-1)$-boyutlu toruslar için doğru olduğu varsayılsın ve kabul edelim ki $\dim G = n$ olsun. N, G'nin bir çember alt grubu olsun. O halde $F(N,X)$ sabit nokta kümesi $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır ve N, altında invaryanttır. Böylece G/N, $F(N,X)$ uzayı üzerine etki eder ve $\dim G/N = n-1$'dir. Böylece tümevarım hipotezinden $F(G,X) = F(G/N, F(N,X))$, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır.
Şimdi G herhangi bir kompakt, bağlantılı Lie grup olsun. Z, G'nin $Z(G)$ merkezinin birim bileşenini göstersin. O zaman Z, X üzerine etki eder ve abelyen durumdan dolayı $F(Z,X)$ sabit nokta kümesi $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır. Z normal alt grup ve $F(Z,X)$, Z altında invaryant olduğundan G/Z kompakt, bağlantılı Lie grubu $F(Z,X)$ üzerine etki eder. Her $x \in F(Z,X) \setminus F(G/Z, F(Z,X))$ için $(G/Z)_x$ izotropi alt grubu sonludur. Gerçekten $G^0_x \subset Z(G)$ olduğundan $G^0_x = G^0_x \cap Z < G_x \cap Z$ ve $(G/Z)_x = \{gZ : gZx = gx = x\} = \frac{G_x}{G_x \cap Z} < \frac{G_x}{G^0_x}$ olur. $\frac{G_x}{G^0_x}$ sonlu olduğundan $(G/Z)_x$ sonlu olur. Böylece Teorem 25 gereği $F(G,X) = F(G/Z, F(Z,X))$ sabit nokta kümesi $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay olur.

Yukarıdaki teoremi kompakt, bağlantılı gruplara genellemek için aşağıdaki lemmaya (Hofmann ve Mostert [13, p. 332]) ihtiyaç vardır.

Lemma 27. (Hofmann-Mostert) Eğer G kompakt, bağlantılı bir grup ve $\mathcal{A}$ tüm sonlu boyutlu, kompakt, bağlantılı, normal alt grupların kümesi ise alt grupların çarpımı altında $\mathcal{A}$ bir yarılatistir ve birleşimi G'de yoğundur.

E-ISSN: 2564-7873

Teorem 28. G, parakompakt bir X uzayı üzerine etki eden kompakt, bağlantılı bir grup olsun. Eğer (I_0) koşulu sağlanıyor ve X, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay ise X^G sabit nokta kümesi boş değildir ve $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır.

Kanıt. G'nin herhangi iki kompakt, normal H, H' alt grupları için $F(HH', X) = F(H, X) \cap F(H', X)$ olur. Lemma 27 gereği G grubu tüm sonlu boyutlu kompakt, bağlantılı, normal H alt grupları tarafından doğurulur ve bunların sabit nokta kümeleri $F(H, X)$, $\mathbb{Q}$-asiklik uzaylardır. Böylece sonuç, sheaf kohomolojinin tautness özelliğinden (Bredon [4, p. 73] veya Spanier [23, p. 316]) elde edilir.

Lokalizasyon Teoremi

Bu bölümde, sonlu boyutlu G-CW kompleksler üzerine sonlu sayıda orbit tipi ile etki eden sonlu boyuta sahip kompakt grup etkileri için Borel-Hsiang-Quillen lokalizasyon teoremini çalışacağız.
Kabul edelim ki $S \subset H^*(B_G;\ \mathbb{Q}) = R$ çarpımsal kapalı bir alt küme olsun. Lokalizasyon teoremi, çarpımsal kapalı bir alt kümeye göre $H_G^*(X;\ \mathbb{Q})$, R-modulünün lokalizasyonu ile ilgilidir. $i_x : G_x \longrightarrow G$ kanonik içerme dönüşümü ve $i_x^* : H^*(B_G;\ \mathbb{Q}) \to H^*(B_{G_x};\ \mathbb{Q})$ olsun.

$$X^S = \{x \in X : \text{Her } s \in S \text{ için } i_x^*(s) \neq 0\}$$

olarak tanımlansın. $X^G \subset X^S$ olduğu açıktır. Eğer X bir G-CW kompleks ise kohomolojinin tautness özelliğinden X^S, X uzayının G-invaryant kapalı bir alt uzayı ve X'in bir G-CW alt kompleksidir.

Teorem 29. (Borel-Hsiang-Quillen-Deo ve ark.) Kabul edelim ki G kompakt bir Lie grup ve X, aşağıdaki koşullardan birini sağlayan bir G-uzay olsun. Eğer $S \subset H^*(B_G)$ çarpımsal kapalı bir alt küme ise o zaman $X^S \to X$ içerme dönüşümü tarafından belirlenen $S^{-1}H_G^*(X) \to S^{-1}H_G^*(X^S)$ lokal kısıtlanmış homomorfizm bir izomorfizmdir.

1. X bir kompakt uzaydır (Hsiang [24]).
2. X sonlu sayıda orbit tipli, sonlu kohomolojik boyuta sahip bir parakompakt uzaydır (Hsiang [24] veya Quillen [12]).
3. X sonlu sayıda orbit tipli parakompakt finitistik bir uzaydır (Deo ve ark. [8]).

Dikkat edilsin ki katsayı halkası olarak karakteristiği sıfır olan bir cisim kullanıldığında 2. ve 3. durumda sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli uzay varsayımı yapmak yeterlidir (Allday ve Puppe [1, s.131]).
Sonlu boyuta sahip kompakt grupların kompakt uzaylar üzerine etkileri için lokalizasyon teoremi, Özkurt ve Onat [25] tarafından çalışıldı. Şimdi 2. durumun özel bir hali olan G-CW kompleksler için lokalizasyon teoreminin doğruluğunu inceleyeceğiz.

Teorem 30. G, sonlu boyutlu, kompakt bir grup ve X, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Kabul edelim ki her $x \in X \setminus X^G$ ve her $n \geq 1$ için $H^i(B_{G_x};\mathbb{Q}) = 0$ olsun. Eğer $S \subset H^*(B_G;\mathbb{Q})$ çarpımsal kapalı bir alt küme ise $X^S \to X$ içerme dönüşümü

$$S^{-1}H_G^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow S^{-1}H_G^*(X^S;\mathbb{Q})$$

izomorfizmini belirler.

E-ISSN: 2564-7873
Kanıt. G/N kompakt bir Lie grubu olacak biçimde G'nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız bir N alt grubu bulunabilir (Teorem 16).
İlk olarak $X^S = \emptyset$ olduğu varsayılsın. O zaman X^G sabit nokta kümesi de boş olur. $\pi_1 : X_G \longrightarrow X/G$ dönüşümünü düşünelim. Böylece $\pi_1^{-1}(G(x))$, B_{G_x} sınıf uzayına homeomorfiktir. Hipotezden her $x \in X$ için B_{G_x}, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay olduğundan Vietoris-Begle dönüşüm teoremi gereği

$$\pi_1^* : H^*(X/G; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_G^*(X; \mathbb{Q})$$

izomorfizmi elde edilir. Diğer taraftan Özkurt ve Onat [25, Remark 3.5] tarafından

$$H^*\left(B_{(G/N)_{N(x)}}; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H^*(B_{G_x}; \mathbb{Q})$$

dönüşümünün bir izomorfizm olduğu kanıtlandı. Böylece $N(x)$ noktası X/N orbit uzayında G/N etkisinin sabit bir noktası değildir ve $B_{(G/N)_{N(x)}}$, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzaydır.
Benzer şekilde

$$(X/N)_{G/N} \longrightarrow (X/N)/(G/N) \approx X/G$$

kanonik dönüşümünün lifi $B_{(G/N)_{N(x)}}$ sınıf uzayına homeomorfik olduğundan

$$H^*(X/G; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{G/N}^*(X/N; \mathbb{Q})$$

izomorfizmini elde ederiz.
Böylece

$$H_{G/N}^*(X/N; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_G^*(X; \mathbb{Q})$$

izomorfizmi elde edilir. Ayrıca Özkurt ve Onat [25, Lemma 3.3] tarafından $\pi : G \to G/N$ bölüm dönüşümünün

$$\pi^* : H^*\left(B_{G/N}; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H^*(B_G; \mathbb{Q})$$

izomorfizmini belirlediği gösterildi. Şimdi $R = (\pi^*)^{-1}(S) \subset H^*(B_{G/N}; \mathbb{Q})$ çarpımsal kapalı alt kümesini düşünelim, açıktır ki R, S'nin bir kopyasıdır. Böylece

$$R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; \mathbb{Q}) \cong S^{-1}H_G^*(X; \mathbb{Q})$$

izomorfizmi elde edilir. Özkurt ve Onat [25, Corollary 3.6] tarafından $X^S/N \approx (X/N)^R$ olduğu gösterildi. Böylece $(X/N)^R = \emptyset$ elde edilir. X/N, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipine sahip sonlu boyutlu bir G/N-CW kompleks olduğundan sonlu boyutlu G-CW kompleksler üzerine kompakt Lie grup etkileri için lokalizasyon teoreminden (Allday ve Puppe [1, Theorem 3.1.6])

$$R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; \mathbb{Q}) \longrightarrow R^{-1}H_{G/N}^*\left((X/N)^R; \mathbb{Q}\right)$$

homomorfizminin bir izomorfizm olduğu elde edilir. Buradan ise $R^{-1}H_{G/N}^*(X/N; \mathbb{Q}) = 0$ ve $S^{-1}H_G^*(X; \mathbb{Q}) =$

0 olduğu görülür.

Genel durum $S^{-1}H_G^*\left(X, X^S; \mathbb{Q}\right) = 0$ olduğunu göstermeye denktir. Her $x \in H_G^*\left(X, X^S; \mathbb{Q}\right)$ için $s \cdot x = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ olduğunu göstermek bunun için yeterlidir. Şimdi eğer B_G^k, B_G sınıf uzayının k. iskeleti ve $X_G^k = \pi_2^{-1}\left(B_G^k\right)$ ise o zaman

$$H^i\left(X_G^{k+1}; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H^i\left(X_G^k; \mathbb{Q}\right)$$

kısıtlanmış homomorfizminin her $i < k$ için bir izomorfizm olduğu biliniyor (Allday ve Puppe [1, p. 130]). O halde

$$k > n \text{ için } x \in H^n\left(X_G, X_G^S; \mathbb{Q}\right) = H^n\left(X_G^k, X_G^S \cap X_G^k; \mathbb{Q}\right)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi X_G^k, parakompakt, Hausdorff bir uzay ve X_G^k uzayında $X_G^S \cap X_G^k$'nın $\left\{V_G \cap X_G^k : V,\ X^S\text{'nin bir invaryant komşuluğudur}\right\}$ formundaki komşulukları cofinal'dır. H_G^*-kohomoloji teorisinin tautness özelliğinden (Quillen [12, p. 552])

$$x \in Im\left\{H_G^*\left(X, V; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^*\left(X, X^S; \mathbb{Q}\right)\right\}$$

olacak şekilde X^S'nin invaryant bir V komşuluğu vardır. Ayrıca $X = V \cup \operatorname{Int} Y$ olacak şekilde G altında invaryant olan parakompakt bir $Y \subset X \setminus X^S$ alt uzayı vardır. $Y^S = \emptyset$ olacağından ilk durumdan ve H_G^*-teori için (X, Y) çiftinin Mayer-Vietoris uzun tam dizisinden

$$\pi_2^*(s) \in Im\left\{H_G^*\left(X, Y; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^*\left(X, \operatorname{Int} Y; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^*\left(X; \mathbb{Q}\right)\right\}$$

olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Böylece

$$\pi_2^*(s) \in Im\left\{H_G^*\left(X, \operatorname{Int} Y; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^*\left(X; \mathbb{Q}\right)\right\}$$

olur. Bu ise $\pi_2^*(s)\, x$ elemanının

$$0 = H_G^*\left(X, V \cup \operatorname{Int} Y; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^*\left(X, X^S; \mathbb{Q}\right)$$

dönüşümünün görüntüsünde olduğu anlamına gelir. O halde $s \cdot x = \pi_2^*(s)\, x = 0$ olduğu elde edilmiş olur.

Sonuç 31. G bir solenoid ve X, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer $S \subset H^*\left(B_G; \mathbb{Q}\right)$ çarpımsal kapalı bir alt küme ise $X^S \to X$ içerme dönüşümü

$$S^{-1}H_G^*\left(X; \mathbb{Q}\right) \longrightarrow S^{-1}H_G^*\left(X^S; \mathbb{Q}\right)$$

izomorfimini belirler.

Kanıt. G, çember gruplarının ters limtidir, yani her $N \in \mathcal{N}$ için $G/N = \mathbb{S}^1$ olmak üzere $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ şeklindedir. Burada tekrar hatırlayalım ki $\mathcal{N}$, $G/N = \mathbb{S}^1$ olacak biçimde G'nin kapalı, normal, tamamen bağlantısız alt gruplarının ailesini gösterir. O zaman Hofmann ve Morris [26, Theorem

2.2] tarafından kanıtlanan kapalı alt grup teoremine göre

$$G_x = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G_x N/N = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} (G/N)_{N(x)}$$

olduğu elde edilir. Böylece Hofmann ve Mostert [27, III, Corollary 1.12] gereği

$$H^n(B_{G_x};\mathbb{Q}) = \varinjlim_{N\in\mathcal{N}} H^n\left(B_{(G/N)_{N(x)}};\mathbb{Q}\right)$$

elde edilir. Eğer $x \in X$ sabit bir nokta değilse o zaman $N(x) \in X/N$ noktası da X/N üzerine G/N etkisinin bir sabit noktası değildir. Buradan $(G/N)_{N(x)}$, $G/N = \mathbb{S}^1$ çember grubunun sonlu bir alt grubu olacağından her $n \geq 1$ için $H^n\left(B_{(G/N)_{N(x)}};\mathbb{Q}\right) = 0$ olduğu elde edilir (Borel [2, p. 51]). Böylece her $n \geq 1$ için

$$H^n(B_{G_x};\mathbb{Q}) = 0$$

bulunur. Böylece sonuç, Teorem 30 gereği açıktır.

Sabit nokta olmayan her $x \in X$ noktası ve her $n \geq 1$ için $H^n(B_{G_x};\mathbb{Q}) = 0$ olmasının kanıtı Özkurt [28, Theorem 3.2] tarafından farklı tekniklerle gösterildi.
Eğer G, herhangi bir X uzayı üzerine etki eden kompakt, bağlantılı, abelyen bir grup ise $S = H^*(B_G;\mathbb{Q}) - \{0\} \subset H^*(B_G;\mathbb{Q})$ çarpımsal kapalı alt kümesi için $X^S = X^G$ olur (Özkurt ve Onat [25, Remark 3.10]). Bu gerçekle birlikte Borel'in sabit noktanın varlığı için kriterinin sonlu boyutlu pro-torus etkiler için bir genellemesi elde edilmiş olur.

Önerme 32. G, sonlu boyutlu bir pro-torus ve X, sonlu sayıda orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer her $x \in X \setminus X^G$ ve her $n \geq 1$ için $H^n(B_{G_x};\mathbb{Q}) = 0$ ise $S = H^*(B_G;\mathbb{Q}) - \{0\}$ çarpımsal kapalı alt kümesi için $X^S = X^G \to X$ içerme dönüşümü

$$S^{-1}H_G^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow S^{-1}H_G^*\left(X^G;\mathbb{Q}\right) = H^*\left(X^G;\mathbb{Q}\right) \otimes_{\mathbb{Q}} \left(S^{-1}H^*(B_G;\mathbb{Q})\right)$$

izomorfizmini belirler.

Sonuç 33. (Borel'in sabit nokta kriteri) G, sonlu boyutlu bir pro-torus ve X, sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli, sonlu boyutlu bir G-CW kompleks olsun. Eğer her $x \in X \setminus X^G$ ve her $n \geq 1$ için $H^n(B_{G_x};\mathbb{Q}) = 0$ ise $X^G \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olmasıdır.

Kanıt. Hsiang [24, p. 45]'de bulunabilir.

Not edelim ki bu sonuç B_{G_x}, $\mathbb{Q}$-asiklik bir uzay olmasa da doğrudur (Onat [22, Theorem 3.9]).
Aşağıdaki soruların cevapları yazar tarafından bilinmiyor.
Soru 1: G kompakt (bağlantılı, abelyen, sonlu boyutlu) bir grup ve X, parakompakt bir G-uzay olsun. Bu durumda Teorem $5-8$ sağlanır mı?
Soru 2: G sonlu boyuta sahip kompakt bir grup ve X aşağıdaki koşullardan birini sağlayan bir G-uzay olsun. Bu durumda lokalizasyon teoremi doğru mudur?

a. X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli ve sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt bir uzaydır.

b. X sonlu sayıda bağlantılı orbit tipli parakompakt, finitistik bir uzaydır.

Şimdi bazı özel durumlarda lokalizasyon teoreminin daha basit kanıtlarını vereceğiz. Daha önce bahsettiğimiz gibi daha genel olarak sonlu boyuta sahip kompakt grupların kompakt uzaylar üzerine etkileri için lokalizasyon teoremi Özkurt ve Onat [25] tarafından elde edildi. Orada açık bir şekilde ifade edilmesede X kompakt uzayının bağlantılı olmasına ihtiyaç vardır, bu koşul iki demetimsinin lif, baz ve total uzaylarının kohomoloji gruplarının karşılaştırılması için gereklidir. Burada uzayın bağlantılı olması koşulundan da kurtulmuş olacağız.

Kanıtı vermeden önce iyi bilinen bir gerçeği hatırlayarak işe başlayalım. Kompakt bir X uzayının Čech kohomoloji cebirinde (bu sheaf kohomoloji cebirine izomorfiktir) pozitif dereceli her eleman nilpotenttir, yani eğer bir $m \geq 1$ için $a \in H^m(X;\mathbb{Q})$ ise o zaman her $n \geq n_0$ için $a^n = 0 \in H^*(X;\mathbb{Q})$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Bu gerçek daha genel olarak herhangi bir finitistik X uzayı için Deo ve ark. [8] tarafından kanıtlandı. Şimdi teoremimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 34. Kabul edilsin ki G, kompakt bir X uzayı üzerine etki eden bir solenoid olsun. O zaman $S = H^*(B_G;\mathbb{Q}) - \{0\}$ çarpımsal kapalı alt kümesi için $X^S = X^G \to X$ içerme dönüşümü

$$S^{-1}H_G^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow S^{-1}H_G^*\left(X^G;\mathbb{Q}\right)$$

izomorfizmini belirler.

Kanıt. İlk olarak $X^G = \emptyset$ olduğu varsayılsın. O halde her $x \in X$ için $i_x^*(s) = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. B_G (yol) bağlantılı olduğundan $i_x^* : H^0(B_G;\mathbb{Q}) \to H^0(B_{G_x};\mathbb{Q})$ bir izomorfizmdir ve böylece s, pozitif dereceli bir elemandır, yani bir $n \geq 1$ için $s \in H^n(B_G;\mathbb{Q})$ olur. O halde $\pi_2^*(s)$, $H_G^*(X;\mathbb{Q})$ cebirinde pozitif dereceli bir elemandır. Yukarıda gösterildiği gibi $H^*(X/G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X;\mathbb{Q})$ bir izomorfizm olur. X/G kompakt olduğundan $H^*(X/G;\mathbb{Q})$'de ve böylece $H_G^*(X;\mathbb{Q})$'de pozitif dereceli her eleman nilpotent olur. Sonuç olarak bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $(\pi_2^*(s))^{n_0} = 0 \in H_G^*(X;\mathbb{Q})$ olur. Buradan $s^{n_0} \in S$ ve $\pi_2^*(s^{n_0}) = 0$ olur. Bu ise $S^{-1}H_G^*(X;\mathbb{Q}) = 0$ olması demektir.
Eğer $X^G \neq \emptyset$ ise kanıt Teorem 30'da olduğu gibi yapılır.

Sonuç 35. G, kompakt bir X uzayı üzerine etki eden bir solenoid olsun. O halde $X^G \neq \emptyset$ olması, $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olması için gerek ve yeter koşuldur.

Teorem 36. G, finitistik bir X uzayı üzerine etki eden bir çember grubu olsun. O zaman $S = H^*(B_G;\mathbb{Q}) - \{0\}$ çarpımsal kapalı alt kümesi için $X^S = X^G \to X$ içerme dönüşümü

$$S^{-1}H_G^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow S^{-1}H_G^*\left(X^G;\mathbb{Q}\right)$$

izomorfizmini belirler.

Kanıt. Eğer G, finitistik bir X uzayı üzerine etki eden kompakt bir Lie grup ise o zaman X/G orbit uzayı da finitistiktir (Deo ve Tripathi [29]). Ayrıca bir finitistik uzayın sheaf kohomolojisinde pozitif dereceli her eleman nilpotenttir. Böylece kanıt Teorem 34'de olduğu gibi yapılır.

Bu teoremin, Deo ve ark. [8] tarafından herhangi bir kompakt Lie grup etkisi için kanıtlandığını tekrarlayalım. Şimdi yukarıdaki $1-3$ koşullarından herhangi birini sağlayan iki uzayın çarpımı için Borel'in sabit nokta kriteri sonucunu inceleyeceğiz.

Teorem 37. Kabul edilsin ki X ve Y uzayları yukarıdaki $1-3$ koşullarından birini sağlayan iki G-uzay olsun. G, $X \times Y$ çarpım uzayı üzerine $g(x,y) = (gx, gy)$ ile etki eden kompakt bir Lie grubu olsun. O zaman $(X \times Y)^G \neq \emptyset$ olması, $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olması için gerek ve yeter şarttır.

Kanıt. Eğer $(X \times Y)^G \neq \emptyset$ ise $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olması açıktır. Şimdi kabul edelim ki $(X \times Y)^G = \emptyset$ olsun. $(X \times Y)^G = X^G \times Y^G$ olduğu kolayca görülür. Eğer $X^G = \emptyset$ ise $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X;\mathbb{Q})$ homomorfizmi injektif değildir. $X \times Y \to X$ izdüşüm dönüşümü G-invaryant olduğundan $H_G^*(X;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q})$ dönüşümü belirlenir ve aşağıdaki diyagram değişmelidir. Diyagramdan $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olmadığı elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
H^*(B_G;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q}) \\
H_G^*(X;\mathbb{Q}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Benzer şekilde $Y^G = \emptyset$ olması $H^*(B_G;\mathbb{Q}) \to H_G^*(X \times Y;\mathbb{Q})$ homomorfizminin injektif olmamasını gerektirir. Böylece kanıt tamamlanır.

Dikkat edilsin ki finitistik bir uzay ile kompakt bir uzayın ya da sonlu kohomolojik boyuta sahip parakompakt bir uzayın çarpımı finitistik olmak zorunda değildir (Deo ve Singh [30]).

Teşekkür Yazar, yorumları ve önerileri ile bu makalenin geliştirilmesine ve netleştirilmesine yardımcı olan hakemlere teşekkür etmeyi bir borç bilir.

Fon/Finansman bilgileri -

Etik Kurul Onayı ve İzinler Çalışma, etik kurul izni ve herhangi bir özel izin gerektirmemektedir.

Çıkar çatışmaları/Çatışan çıkarlar -

Yazarların Katkısı Yazar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

[1] Allday, C., Puppe, V. (1993). *Cohomological Methods in Transformation Groups.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[2] Borel, A. (1960). *Seminar on Transformation Groups.* Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.

[3] Bredon, G. E. (1972). *Introduction to Compact Transformation Groups.* Academic Press, New York.

[4] Bredon, G. E. (1997). *Sheaf Theory. 2nd ed.* Graduate Texts in Mathematics 170. New York, NY, USA: Springer.

[5] Conner, P. E. (1957). On the action of the circle group. *Michigan Mathematical Journal, 4*, 241-247. https://doi.org/10.1307/mmj/1028997955

[6] Conner, P. E. (1960). Retraction properties of the orbit space of a compact topological transformation group. *Duke Mathematical Journal, 27*, 341-57. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-60-02732-0

[7] Deo, S. (1983). On some local and global cohomological properties which pass on to the orbit space. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 14*, 1319-1326.

[8] Deo, S., Singh, T. B., & Shukla, R. A. (1982). On an extension of localization theorem and generalized Conner conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society, 269*, 395-402. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0637697-0

[9] Ku, H. T. (1967). *Cohomology structure of compact transformation groups.* PhD, Tulane University.

[10] Ku, M. C. (1967). *Some topics in compact transformation groups.* (Publication No. 6717927) [Doctoral dissertation, Tulane University].

[11] Oliver, R. (1976). A proof of the Conner conjecture. *Annals of Mathematics, 103*, 637-644. https://doi.org/10.2307/1970955

[12] Quillen, D. (1971). The spectrum of an equivariant cohomology ring I. *Annals of Mathematics, 94*(2), 549-572. https://doi.org/10.2307/1970770

[13] Hofmann, K. H., & Mostert, P. S. (1966). *Elements of Compact Semigroups*. Charles E. Merrill, Columbus, Ohio.

[14] Hofmann, K. H., & Morris, S. A. (2013). *The Structure of Compact Groups. 3rd ed.* Berlin, Germany: de Gruyter.

[15] Bredon, G. E., Raymond, F., & Williams, R. F. (1961). p-Adic Groups of Transformations. *Transactions of the American Mathematical Society, 99*(3), 488-498. https://doi.org/10.2307/1993558

[16] Montgomery, D., & Zippin, L. (1955). *Topological transformation groups.* Interscience Publishers, New York.

[17] Pontryagin, L. S. (1986). *Topological Groups. 3rd ed.* Gordon and Breach Science Publishers, New York.

[18] Hofmann, K. H., & Morris, S. A. (2007). *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups.* European Mathematical Society, Zürich.

[19] Onat, M. (2018). *Kompakt Grup Etkilerinin Kohomoloji Teorisi.* (Tez no. 531232) [Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi]

[20] Milnor, J. (1956). Construction of universal bundles II. *Annals of Mathematics, 63*, 430–436.

[21] Lück, W. (1989). *Transformation groups and algebraic K-theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[22] Onat, M. (2022). The Borsuk-Ulam Type Theorems for Finite-Dimensional Compact Group Actions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 48*, 1339-1349. https://doi.org/10.1007/s41980-021-00581-z

[23] Spanier, E. (1966). *Algebraic Topology.* McGraw–Hill, New York.

[24] Hsiang, W. Y. (1975). *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[25] Özkurt, A. A., & Onat, M. (2018). The localization theorem for finite-dimensional compact group actions. *Turkish Journal of Mathematics, 42*(4), 1556-1565. https://doi.org/10.3906/mat-1609-47

[26] Hofmann, K. H., & Morris, S. A. (2003). Projective limits of finite dimensional Lie groups. *Proceedings of the London Mathematical Society, 87*(3), 647-676. https://doi.org/10.1112/S0024611503014254

[27] Hofmann, K. H., & Mostert, P. S. (1973). *Cohomology Theories for Compact Abelian Groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[28] Özkurt, A. A. (2014). On the equivariant cohomology algebra for solenoidal actions. *Turkish Journal of Mathematics, 38*(6), 1081-1089. https://doi.org/10.3906/mat-1310-6

[29] Deo, S., & Tripathi, H. S. (1982). Compact Lie Group Actions on Finistic Spaces. *Topology, 21*, 393-399. https://doi.org/10.1016/0040-9383(82)90019-2

[30] Deo, S., & Singh, M. (1983). On certain constructions in finitistic spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 6*, 477-482. https://doi.org/10.1155/S0161171283000423