

Atf İçin: Murater, F.N., Bacak-Turan, G. ve Aslan, E. (2025). Bulanık Çizgelerde Zedelenebilirlik Parametreleri: Bulanık Tepe Kararlılık Değeri. *İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15(1), 316-329.

To Cite: Murater, F.N., Bacak-Turan, G. & Aslan, E. (2025). Vulnerability Prameters in Fuzzy Graphs: Fuzzy Node Tenacity. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 15(1), 316-329.

Bulanık Çizgelerde Zedelenebilirlik Parametreleri: Bulanık Tepe Kararlılık Değeri

Ferhan Nihan MURATER¹, Gökşen BACAĞ-TURAN^{1*}, Ersin ASLAN²

Öne Çıkanlar:

- Çizge teorisi
- Bulanık çizge
- Çizgelerin zedelenebilirliği

Anahtar Kelimeler:

- Zedelenebilirlik parametreleri
- Bulanık çevre çizge
- Bulanık tekerlek çizge
- Kararlılık değeri parametresi

Highlights:

- Graph theory
- Fuzzy graphs
- Vulnerability of graphs

Keywords:

- Vulnerability parameters
- Fuzzy cycle
- Fuzzy wheel
- Tenacity

ÖZET:

Tepeler ve/veya tepeler arasındaki bağlantıların arızalanması durumunda, çizge teorisinde tanımlanan zedelenebilirlik parametreleri, ağ üzerinden alınan hizmet kalitesinin bir göstergesi olarak kullanılabilir. Çizge teorisi alanında, dayanıklılık, kırılma derecesi, kararlılık, bütünlük, bağlantılılık ve diğerleri dahil olmak üzere çok sayıda zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır. Çizgelerin özel bir türü olan bulanık çizgeler, gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde diğer çizgelere göre daha etkili bir yöntem sunmaktadır. Bunun nedeni, problemlerin doğasında var olan belirsizliklerin üyelik değerleri kullanılarak daha gerçekçi bir şekilde ifade edilebilmesidir. Ancak, bu avantaja rağmen, bulanık çizgelerdeki zedelenebilirlik parametreleri üzerine sınırlı sayıda araştırma yapılmıştır. Bu makalede, bulanık çizgelerin önemi ve bu çizgeler için tanımlanmış zedelenebilirlik parametrelerinin azlığı göz önüne alınarak çizgeler için oldukça sık kullanılan kararlılık değeri (tenacity) parametresi bulanık çizgeler için tanımlanmıştır. Ayrıca, bulanık tekerlek çizgeler ve bulanık çevre çizgeler için yeni tanımlanan bu parametre incelenmiş ve genel formüller elde edilmiştir.

Vulnerability Prameters in Fuzzy Graphs: Fuzzy Node Tenacity

ABSTRACT:

In case of failure of nodes and/or links between nodes, the vulnerability parameters defined in graph theory can be used as an indicator of the quality of service received over the network. In the field of graph theory, numerous vulnerability parameters have been defined, including toughness, rupture degree, tenacity, integrity, connectivity, and others. Fuzzy graphs, a specific type of graphs, provide a more effective method of modelling real-world problems than other graphs. This is due to the fact that the uncertainties inherent in the problems can be expressed in a more realistic manner through the use of membership values. However, despite this advantage, there has been limited research conducted on the vulnerability parameters in fuzzy graphs. In this paper, considering the importance of fuzzy graphs and the scarcity of vulnerability parameters defined for fuzzy graphs, the commonly used tenacity parameter for graphs is defined for fuzzy graphs. In addition, fuzzy wheel graphs and fuzzy cycle graphs are analysed and general formulas are obtained.

¹ Ferhan Nihan MURATER ([Orcid ID: 0000-0003-0569-4147](https://orcid.org/0000-0003-0569-4147)), Gökşen BACAĞ-TURAN ([Orcid ID: 0000-0001-6935-4841](https://orcid.org/0000-0001-6935-4841)), Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa, Türkiye

² Ersin ASLAN ([Orcid ID: 0000-0002-5496-2075](https://orcid.org/0000-0002-5496-2075)), Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Hasan Ferdi Turgutlu Teknoloji Fakültesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü, Manisa, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Gökşen BACAĞ-TURAN, e-mail: goksen.turan@cbu.edu.tr

GİRİŞ

Ağlar günlük hayatın bir parçası olup, haberleşme ağları, elektrik şebekeleri, su şebekeleri, ulaşım ağları, sosyal ağlar, biyolojik ağlar gibi birçok örnek vermek mümkündür. Bir ağ, bağlantılar ile birbirine bağlı olan merkezlerden oluşur. Ağın merkezleri çizgenin tepeleri, merkezler arasındaki bağlantılar da çizgenin ayrıtları olacak şekilde bir ağ çizge ile modellenir. İki tepe arasında bir ayrıt varsa bu iki tepe birbirine bağlantılıdır. Ayrıt yoksa birbirleri ile bağlantılı değildir. Yani bağlantı ya vardır ya da yoktur. Ancak bu durum gerçek durumu tam anlamıyla yansıtamamaktadır. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için geliştirilen çizgelerde birisi bulanık çizgelerdir. Bulanık çizgelerde ayrıtlar yay olarak isimlendirilip yayların bağlantı gücü tanımlanabilmektedir. Bağlantı gücü ise bulanık kümelerin üyelik dereceleri olarak ifade edilmektedir.

Bulanık kümeler 1965 yılında A. Zadeh tarafından tanımlanmıştır. Bir nesne klasik küme tanımına göre bir kümenin ya elemanı ya da elemanı değilken, bulanık küme tanımına göre belirli bir oranda kümenin elemanı olabilir (Zadeh, 1965). Bu kavram çizgelere uygulandığında ise herhangi iki tepe arasındaki bağlantı gücü bulanık çizgelerde $[0,1]$ arasında herhangi bir gerçel sayı olabilmektedir. Gerçek ağların, bulanık çizgeler ile bağlantıları derecelendirerek yapılacak bir modellemesi gerçeğe daha yakın olacaktır. 1975 yılında Rosenfeld, bulanık kümeler arasındaki ilişkiyi baz alarak bulanık çizge teorisini geliştirmiştir (Rosenfeld, 1975). Bu çalışmada alt çizge, yol ve bağlantılılık, klik, köprü ve kesim tepe, orman, ağaç gibi birçok kavramın bulanık çizge teorisindeki karşılığını ortaya koymuştur. Yeh ve ark. da aynı yıl Rosenfeld'den bağımsız olarak bulanık çizgeyi tanımlayarak bazı temel bulanık çizge kavramlarını tanıtmışlardır (Yeh ve Bang, 1975).

Bağlantılarda ve/veya merkezlerde hasar meydana gelmesi ağın sunduğu hizmette kesintiye veya işlevinde azalmaya sebep olur. Buna karşılık bir ağda amaçlanan sunulan hizmetin devam etmesidir. Ağın zarar gördüğü durumlarda ağın nasıl ve ne kadar dayanacağı bilgisi çok önemlidir. Bu durum ağların zedelenebilirliği olarak adlandırılmaktadır. Başka bir deyişle ağların zedelenebilirliği kavramı, bağlantıların veya belirli merkezlerin hasarından sonra iletimin tamamen durmasına kadar olan süreçte ağın gösterdiği dayanma gücüdür.

Ağlarda zedelenebilirliği araştırabilmek için çizgelerde çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bu zedelenebilirlik parametrelerinden bazıları, bağlantılılık sayısı (Harary, 1969), bütünlük değeri (integrity) (Barefoot ve Entringer, 1987), dayanıklılık değeri (toughness) (Chvatal, 1973), kararlılık değeri (tenacity) (Cozzens ve ark., 1995), saçılım sayısı (scattering number) (Jung, 1978) ve kırılma derecesi (rupture degree) (Li ve ark., 2005)'dir.

Bulanık çizgeler gerçeğe daha yakın bir modelleme imkanı sunmasına rağmen zedelenebilirlik bağlamında literatürde az sayıda çalışmaya rastlanmakta ve bulanık çizgeler için sadece bağlantılılık ve bütünlük değeri parametrelerinin tanımlandığı görülmektedir.

Yeh ve ark. ilk bağlantılılık tanımını atılan tepelerden sonra geriye kalan çizgenin bağlantısız olması üzerine kurarak elde etmişlerdir (Yeh ve Bang, 1975). Çalışmalarında bağlantı gücünü dikkate almamışlardır. 2010 yılında Mathew ve ark. tarafından yapılan çalışmada ise çizgenin bağlantısız olmasından ziyade bağlantı gücü dikkate alınmış ve yeni bir tanım yapılmıştır (Mathew ve Sunitha, 2010). Elektrik devreleri, haberleşme ağları, vb., ağlar düşünüldüğünde iki tepe arasındaki bağlantı gücünün azalması ile, akışın tamamen durmasından ya da tüm ağın parçalanmasından daha sık karşılaşılmaktadır.

Bağlantılılık hakkında yapılan her iki tanım da çizgeden tepe/tepelerin çıkarılmasıyla çizgede meydana gelebilecek olan hasarın ölçümünü vermekle birlikte geriye kalan çizgenin elemanları hakkında bir açıklama getirmemektedir.

Bu çalışma ile sadece zarar gören merkez sayısı ile değil, aynı zamanda iletişimin devam ettiği alt ağların sayısı ile de ilgilenen bir zedelenebilirlik parametresinin tanımlanması amaçlanmıştır. Bulanık çizgeler gerçeğe daha yakın modelleme imkânı verdiği için dolayı tercih edilmiştir. Tanımlanan yeni zedelenebilirlik parametresinde çizge teorisindeki zedelenebilirlik parametrelerinin temelini oluşturan çizgenin bağlantısız kalmasını ele almak yerine, Mathew ve ark.'nın çalışmalarında gösterdikleri gibi bulanık çizgelerde önemli olan akışın azalması ve bağlantı gücü de göz önüne alınmıştır (Mathew ve Sunitha, 2010). Böylece bulanık çizge teorisi için kararlılık değeri parametresi tanımlanmıştır.

MATERYAL VE METOT

Bir bulanık çizge (f -çizge), $G(V, \sigma, \mu)$ üçlemesidir. V , tepeler kümesi; σ , V 'nin bulanık altkümesi ve μ ise $\mu(u, v) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v)$, $\forall u, v \in V$ olacak biçimde σ üzerinde tanımlanan simetrik ve yansılmalı bir bulanık bağıntıdır. $G(V, \sigma, \mu)$ çizgesinin en zayıf yayı üyelik değeri en küçük olan yaydır. n uzunluğundaki bir P yolu, $\mu(u_{i-1}, u_i) > 0$, $i=1, 2, \dots, n$ olan u_1, u_2, \dots, u_n den oluşan farklı tepeler dizisidir ve bu yolun gücü, P yolunda bulunan en zayıf yayın değerine eşittir (Rosenfeld, 1975). x ve y tepesi arasındaki bütün yollardan gücü en büyük olan değere, x ile y arasındaki bağlantı gücü denir ve $CONN_G(x, y)$ ile gösterilir (Rosenfeld, 1975). Bir G bulanık çizgesinde (x, y) yayının çizgeden çıkarılması ile oluşan x ve y tepeleri arasındaki bağlantı gücü $CONN_{G-(x, y)}(x, y)$ ile gösterilir. (x, y) çizgesinin ağırlığı $CONN_{G-(x, y)}(x, y)$ değerine eşit veya büyük ise (x, y) yayı güçlü yay olarak adlandırılır. Eğer $\mu(x, y) > CONN_{G-(x, y)}(x, y)$ ise (x, y) yayı α -güçlü, $\mu(x, y) = CONN_{G-(x, y)}(x, y)$ ise (x, y) yayı β -güçlü, $\mu(x, y) < CONN_{G-(x, y)}(x, y)$ ise (x, y) yayı δ -yay olarak adlandırılır. Bir yayın güçlü olarak kabul edilebilmesi için ya α -güçlü ya da β -güçlü olması gerekir (Mathew ve Sunitha, 2009). Aynı şekilde bir G bulanık çizgesindeki bir tepe çizgeden çıkarıldığında herhangi iki tepe arasındaki bağlantı gücünü azaltıyorsa o tepe, bulanık kesim tepe (fuzzy node cut) olarak ifade edilir (Rosenfeld, 1975). Eğer birden fazla tepe çizgeden çıkarıldığında herhangi iki tepe arasındaki bağlantı gücü azaltıyorsa bu tepeler kümesine bulanık tepe kesim kümesi (FNC), bulanık tepe kesim kümesi tek bir tepeden oluşuyor ise bulanık kesim tepe (f-cutnode) olarak adlandırılır. G^* çizgesi bir çevre çizge olan $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesinin bulanık çevre çizge olması için en az iki en zayıf yaya sahip olması gerekir. Bir bulanık çevre çizge aynı zamanda bir multimin cevredir. $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesindeki her tepe en zayıf yaya bitişik ise G bulanık çevresi lokamin çevredir (Bhutani ve Rosenfeld, 2003). G^* çizgesinin tepe sayısı tek sayı olan $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çevre çizgesinin düzenli olması için $(u, v) \in E$ için $\mu(u, v)$ değerlerinin sabit olması gerekir. Aynı şekilde G^* çizgesinin tepe sayısı çift sayı olan $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çevre çizgesinin düzenli olması için $(u, v) \in E$ için $\mu(u, v)$ değerlerinin ya sabit ya da dönüşümlü olması gerekir (Gani ve Radha, 2008). $G:(V, \sigma, \mu)$ çizgesinin bir bulanık tepe kesim kümesi S olmak üzere, S 'nin güçlü ağırlığı olan $s(S)$, küme içindeki tepelerden her birine bitişik olan güçlü yaylardan üyelik değerleri en küçük olan yayların üyelik değerleri toplamıdır (Mathew ve Sunitha, 2009). $G:(V, \sigma, \mu)$, $\forall x, y \in \sigma^*$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, m$ için $\mu(x, y) = q_i$ olan bir bulanık çizge ve $0 < q_i \leq 1$ olmak üzere q_i yaylarının üyelik değerlerinin artan şekilde sıralanmasıyla oluşan $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_m\}$ kümesine yayların kuvvet dizilimi denir (Altundag, 2021). Bu dizilimde q_1 ile gösterilen yay en zayıf yay olup $d(\mu)$, q_m ile gösterilen yay en kuvvetli yay olup $h(\mu)$ ile temsil edilir (Bhutani ve ark., 2004).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde öncelikle çizge teorisinde tanımlanmış ve üzerinde birçok çalışma yapılmış bir zedelenebilirlik parametresi olan kararlılık değeri tanımı verilmiştir.

Tanım 1: (Cozzens ve ark.,1995) S kesim kümesi bir G çizgesinden atıldığında çizgeyi bağlantısız yapan ya da izole tepe bırakan bir küme; $\omega(G-S)$ herhangi bir S kesim kümesi çizgeden atıldıktan sonra geriye kalan G-S çizgesinin bileşen sayısı ve $m(G-S)$ en büyük elemanlı bileşenin tepe sayısı olmak üzere, bir G çizgesinin kararlılık değeri

$$T(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{\omega(G-S)} \right\}$$

dir.

Aşağıda verilen iki tanım makalenin temelini oluşturan bulanık tepe kararlılık değeri tanımında kullanılan en büyük bağlantı gücü $m_f(G-S)$ ve azalan bağlantı gücü $\omega_f(G-S)$ tanımlarını içermektedir.

Tanım 2: (Altundag, 2021) $G:(V, \sigma, \mu)$ bağlantılı bir bulanık çizge ve S, G'de bir bulanık tepe kesim küme olsun. En büyük bağlantı gücü, G'den bulanık tepe kesim küme S çıkarıldıktan sonra bağlantı gücü azalan tepe çiftleri arasındaki en büyük bağlantı gücüdür ve $m_f(G-S)$ ile gösterilir. Eğer G-S çizgesi tek tepeli bir çizge ise $m_f(G-S) = 0$ olur. Diğer durumda;

$$m_f(G-S) = \max\{CONN_{G-S}(u, v) : CONN_{G-S}(u, v) < CONN_G(u, v), u, v \in \sigma^* - S\}$$

ile ifade edilir.

Tanım 3: (Altundag, 2021) $G:(V, \sigma, \mu)$ bağlantılı bir bulanık çizge ve S, G'de bir bulanık tepe kesim küme olsun. Azalan bağlantı gücü, G'den bulanık tepe kesim küme S çıkarıldıktan sonra bağlantı gücü azalan tepe çiftleri arasında oluşan bağlantı gücü farklarından en büyük olan değerdir ve $\omega_f(G-S)$ ile gösterilir.

$$\omega_f(G-S) = \max_{S \subseteq \sigma^*} \{ CONN_G(x, y) - CONN_{G-S}(x, y) : x, y \in \sigma^* \}$$

olarak ifade edilir.

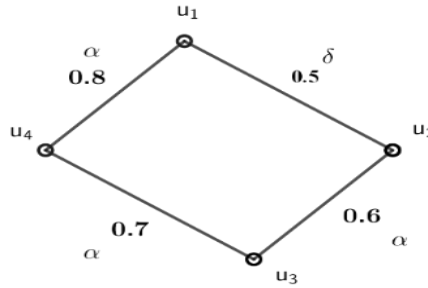
Bulanık Tepe Kararlılık Değeri Parametresi:

Bu bölümde bulanık tepe kararlılık değeri tanımlanmış ve bir örnek üzerinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yeni tanımlanan bu parametre bulanık çevre çizgelere ve bulanık tekerlek çizgelere uygulanarak genel formüller elde edilmiştir.

Tanım 4: $G:(V, \sigma, \mu)$ bağlantılı bir bulanık çizge olsun. S bulanık tepe kesim küme, $s(S)$, S'nin güçlü ağırlığı, $m_f(G-S)$, G-S çizgesinin en büyük bağlantı gücü ve $\omega_f(G-S)$, G-S çizgesinde azalan bağlantı gücü olmak üzere geriye kalan çizge tek bir izole tepeden oluşmamak şartı ile bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G-S)}{\omega_f(G-S)} \right\}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1. Bir G Bulanık Çizge

Örnek 1: Şekil 1’de verilen G bulanık çevre çizgenin bulanık tepe kararlılık değeri ayrıntılı olarak incelendiğinde:

$S_1 = \{u_3\}$ bulanık kesim tepe olmak üzere;

$s(S_1) = 0.6$ elde edilir. S_1 kümesini çizgeden çıkardığımızda bağlantı gücü azalan tepe çiftleri;

$$CONN_{G-S}(u_2, u_4) = 0.5 < CONN_G(u_2, u_4) = 0.6$$

$$CONN_{G-S}(u_1, u_2) = 0.5 < CONN_G(u_1, u_2) = 0.6$$

Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S_1) = 0.6 - 0.5 = 0.1$ elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S_1) = 0.5$ olur. Böylece S_1 kümesini çıkardığımızda elde edilen bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{s(S_1) + m_f(G - S_1)}{\omega_f(G - S_1)} = \frac{0.6 + 0.5}{0.1} = \frac{1.1}{0.1} = 11$$

bulunur.

$S_2 = \{u_4\}$ bulanık kesim tepe olmak üzere; $s(S_2) = 0.7$ elde edilir. S_2 kümesini çizgeden

çıkardığımızda bağlantı gücü azalan tepe çiftleri;

$$CONN_{G-S}(u_1, u_3) = 0.5 < CONN_G(u_1, u_3) = 0.7$$

$$CONN_{G-S}(u_1, u_2) = 0.5 < CONN_G(u_1, u_2) = 0.6$$

Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S) = \max\{CONN_G(u_i, u_j) - CONN_{G-S}(u_i, u_j)\}$ olduğundan $\omega_f(G - S_2) = \max\{0.2, 0.1\} = 0.2$ elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S_2) = 0.5$ olur. Böylece S_2 kümesini çıkardığımızda elde edilen bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{s(S_2) + m_f(G - S_2)}{\omega_f(G - S_2)} = \frac{0.7 + 0.5}{0.2} = \frac{1.2}{0.2} = 6$$

elde edilir.

$S_3 = \{u_1, u_3\}$ bulanık tepe kesim küme olmak üzere; $s(S_3) = 0.8 + 0.6 = 1.4$ elde edilir. S_3

kümesini çizgeden çıkardığımızda bağlantı gücü azalan tepe çiftleri;

$$CONN_{G-S}(u_2, u_4) = 0 < CONN_G(u_2, u_4) = 0.6$$

Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S_3) = 0.6$ elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S_3) = 0$ olur. Böylece S_3 kümesini çıkardığımızda elde edilen bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{s(S_3) + m_f(G - S_3)}{\omega_f(G - S_3)} = \frac{1.4}{0.6} = \frac{14}{6}$$

bulunur.

$S_4 = \{u_3, u_4\}$ bulanık tepe kesim küme olmak üzere; $s(S_4) = 0.6 + 0.7 = 1.3$ elde edilir. S_4

kümesini çizgeden çıkardığımızda bağlantı gücü azalan tepe çiftleri;

$$CONN_{G-S}(u_1, u_2) = 0.5 < CONN_G(u_1, u_2) = 0.6$$

Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S_4) = 0.6 - 0.5 = 0.1$ elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S_4) = 0.5$ olur. Böylece S_4 kümesini çıkardığımızda elde edilen bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{s(S_4) + m_f(G - S_4)}{\omega_f(G - S_4)} = \frac{1.8}{0.1} = 18$$

elde edilir.

$S_5 = \{u_2, u_4\}$ bulanık tepe kesim küme olmak üzere; $s(S_5) = 0.6 + 0.7 = 1.3$ elde edilir. S_5 kümesini çizgeden çıkardığımızda bağlantı gücü azalan tepe çiftleri;

$$CONN_{G-S}(u_1, u_3) = 0.5 < CONN_G(u_1, u_3) = 0.7$$

Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S_5) = 0.7$ elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S_5) = 0$ olur. Böylece S_5 kümesini çıkardığımızda elde edilen bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{s(S_5) + m_f(G - S_5)}{\omega_f(G - S_5)} = \frac{1.3}{0.7} = \frac{13}{7}$$

elde edilir.

Bulanık tepe kararlılık değeri tanımı gereği; Şekil 1'de verilen çizgenin bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) = \min \left\{ 11, 6, \frac{14}{6}, 18, \frac{13}{7} \right\} = \frac{13}{7}$$

olarak bulunur.

Teorem 1: $G:(V, \sigma, \mu)$ çizgesi, $n \geq 4$ ve tek bir α -güçlü yaya sahip olan bir bulanık çevre çizge olsun. G çizgesinin bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = 2$$

elde edilir.

İspat: Bulanık çevre çizge tanımı gereği $G:(V, \sigma, \mu)$ çizgesi en az iki en zayıf yay içerir. Bu durumda $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesinde tek bir α -güçlü yay var olduğundan geriye kalan yayların hepsi en zayıf yaylardan oluşur (Mathew ve Sunitha, 2009). Bu yaylar β -güçlü yaylardır. G çizgesinde tek bir α -güçlü yay olduğundan herhangi bir tepe bulanık kesim tepe değildir (Sunitha ve Vijayakumar, 1999). S bir bulanık tepe kesim küme olmak üzere $|S| \geq 2$ olmalıdır. G bulanık çizgesinde tek α -güçlü yayın dışındaki yaylar en zayıf yay olduğundan çizgedeki her bir tepe en zayıf yay ile bitişiktir. Bu durumda $i=1, \dots, n$ için $s(u_i) = d(\mu) = q_1$ ve $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_G(u_i u_j) = d(\mu) = q_1$ olur.

$|S|=2$ için $s(S)=2d(\mu)$ olacaktır. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_{G-S}(u_i u_j) = 0$ olur. Böylece $m_f(G - S) = 0$ olurken azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S) = d(\mu)$ bulunur. Bulanık tepe kararlılık değeri,

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} = \left\{ \frac{2d(\mu) + 0}{d(\mu)} \right\} = 2 \quad (1)$$

elde edilir.

$|S| \geq 3$ ve $\omega(G[S]) \geq 2$ için $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1$ olacağından S kümesini çizgeden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0$ olup $m_f(G - S) = 0$ olacaktır. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = CONN_G(u_i, u_j) = d(\mu) = q_1$ olur. Bulanık tepe kararlılık değeri tanımı gereği değerin en küçük olması gerektiğinden $|S|=3$ alınır;

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} = \left\{ \frac{3d(\mu) + 0}{d(\mu)} \right\} = 3 \quad (2)$$

bulunur. Denklem (1), (2) ve tanımdan bulanık tepe kararlılık değeri $T_f(G) = 2$ olarak belirlenir.

Teorem 2: $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesi, $n \geq 4$ olan n tepeli lokamin çevre çizge olmak üzere bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = 2$$

bulunur.

İspat: Teorem 1'in ispatına benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3: $G:(V, \sigma, \mu)$ n tepeli kendini merkezleyen (self-centered) bir bulanık çevre çizge olsun.

$i = 1, \dots, n - 1$ için yaylar $e_i = (u_i, u_{i+1})$ ve $e_n = (u_n, u_1)$ ile gösterilsin. $0 < t < s \leq 1$ olmak üzere;

1) $n \geq 4, i = 1, \dots, n$ için $\mu(e_i) = t$ ise;

2) $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ için $\mu(e_{2i-1}) = t, \mu(e_{2i}) = s$ ise;

3) $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ve $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ için $\mu(e_{2i-1}) = \mu(e_n) = t$ ve $\mu(e_{2i}) = s$ ise;

bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = 2$$

4) $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ve $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ için $\mu(e_{2i-1}) = \mu(e_n) = s$ ve $\mu(e_{2i}) = t$ ise

bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu)}$$

dir.

İspat: Durum i) (1), (2), (3) durumlarında verilen bulanık çevre çizgelerinde her bir tepe en zayıf yay ile bitişik olduğundan çizgelerin her biri lokamin çevredir. İspatları Teorem 1'in ispatı ile benzer şekilde yapılır.

Durum ii) G bulanık çizgesi $k=2, \dots, n$ olmak üzere $n=2k+1$ ve $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ için $\mu(e_{2i-1}) = \mu(e_n) = s$ ve $\mu(e_{2i}) = t$ olan kendini merkezleyen bir bulanık çevre çizge olsun. G bulanık çevre çizgesi birden fazla en zayıf yayya sahip olduğundan multimin çevre olur. Üyelik değeri t olan yaylar en zayıf yay olduğundan β -güçlü yay diğer yaylar α -güçlü yaylar olacaktır. $\mu(e_1) = \mu(u_1, u_2) = s = h(\mu)$, $\mu(e_n) = \mu(u_n, u_1) = s = h(\mu)$ ve bu yaylar α -güçlü yay olduğundan u_1 tepesi bulanık kesim tepedir. Böylece $s(u_1) = s = h(\mu)$ ve $i = 2, \dots, n$ için $s(u_i) = t = d(\mu)$ elde edilir. G bulanık çevre çizgesinin bulanık tepe kararlılık değeri, S bulanık tepe kesim kümenin eleman sayısına bağlı olarak iki durumda incelenir.

(a) $|S| = 1 \Rightarrow s(u_1) = h(\mu)$ olur. S kümesini G çizgesinden çıkardığımızda,

$$CONN_{G-S}(u_n, u_2) = d(\mu) < CONN_G(u_n, u_2) = h(\mu)$$

elde edilir. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S) = d(\mu)$ olur. Böylece azalan bağlantı gücü

$$\omega_f(G - S) = \max\{CONN_G(u_n, u_2) - CONN_{G-S}(u_n, u_2)\} = h(\mu) - d(\mu)$$

olacağından bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) = \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)} \tag{3}$$

bulunur.

(b) $|S| \geq 2$ için $\omega(G[S]) = 1$ ise S kümesi bir bulanık tepe kesim küme değildir. Bundan dolayı $\omega(G[S]) \geq 2$ olmalıdır. $u_1 \notin S$ için $i=2, \dots, n$ olmak üzere $s(u_i) = d(\mu)$ olduğundan $s(S) = |S|d(\mu)$ olur. S kümesini G çizgesinden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için

$$CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0 < CONN_G(u_i, u_j) = d(\mu)$$

olacağından $m_f(G - S) = 0$ ve $\omega_f(G - S) = d(\mu)$ olur. Buradan bulanık tepe kararlılık değeri,

$$T_f(G) = \frac{|S|d(\mu)}{d(\mu)} = |S| \geq 2 \tag{4}$$

elde edilir.

$u_1 \in S$ için $i=2, \dots, n$ olmak üzere $s(u_i) = d(\mu)$ olduğundan $s(S) = (|S| - 1)d(\mu) + h(\mu)$ bulunur. S kümesini G çizgesinden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için,

$$CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0 < CONN_G(u_i, u_j) = d(\mu)$$

$$CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0 < CONN_G(u_i, u_j) = h(\mu)$$

bulduğundan $m_f(G - S) = 0$ ve azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S_3) = h(\mu)$ olur. Buradan bulanık tepe kararlılık değeri,

$$T_f(G) = \frac{(|S| - 1)d(\mu) + h(\mu)}{h(\mu)} \tag{5}$$

olarak belirlenir. Bulanık tepe kararlılık değeri bulunan değerlerden en küçük olanına eşit olması gerektiğinden $|S|=2$ alınır. Böylece (4) ve (5)'den

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ 2, \frac{d(\mu) + h(\mu)}{h(\mu)} \right\} \tag{6}$$

bulunur. (3), (6) ve bulanık tepe kararlılık değeri tanımı gereği,

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)}, 2, \frac{d(\mu) + h(\mu)}{h(\mu)} \right\}.$$

elde edilir. Buradan ise,

$$\frac{d(\mu)+h(\mu)}{h(\mu)} = 1 + \frac{d(\mu)}{h(\mu)} \text{ ve } d(\mu) < h(\mu) \text{ olduğundan } \frac{d(\mu)+h(\mu)}{h(\mu)} < 2 \text{ bulunur.}$$

Böylece

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)}, \frac{d(\mu) + h(\mu)}{h(\mu)} \right\}$$

Verilen iki ifadeyi kıyasladığımızda $T_f(G) = \frac{h(\mu)+d(\mu)}{h(\mu)}$ elde edilir.

Teorem 4: $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesi, $n \geq 4$ olan bir düzenli bulanık çevre çizge olmak üzere bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = 2$$

İspat: Teorem 1 ve Teorem 3'ün ispatlarına benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5: $G:(V, \sigma, \mu)$, ≥ 4 n ve tepeleri u_1, u_2, \dots, u_n olan bir bulanık çevre çizge olmak üzere $i \neq j; i, j = 1, \dots, n$ için bulanık tepe kararlılık değeri $q = \max\{CONN_G(u_i, u_j) | d(u_i, u_j) > 1\}$ olmak üzere

$$T_f(G) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{d(\mu)}{q}, \text{ kesim tepe var ise} \\ 2, \text{ diğer durumda} \end{array} \right\}$$

olur.

İspat: Teorem 3'ün ispatındaki Durum ii ve Teorem 1'in ispatlarına benzer olarak ispatı yapılır.

Teorem 6: $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesi, $n \geq 5$ olmak üzere C_{n-1} bulanık çevre çizgesi üzerinde bulunan u_1, u_2, \dots, u_n tepeleri ve u_n bulanık merkez tepesinden oluşan bir bulanık tekerlek çizge W_n olsun.

$i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $\mu(u_n, u_i)$ değerleri sabit ve $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(u_n, u_i) < \mu(e)$ ise bulanık tepe kararlılık değeri $q = \max\{CONN_G(u_i, u_j) | d(u_i, u_j) > 1\}$ olmak üzere

$$T_f(G) = \left\{ \begin{array}{l} \min\left\{\frac{3q_1 + q_2}{q_m - q_2}, \frac{3q_1}{q}\right\}, \text{ kesim tepe var ise} \\ \frac{3q_1}{q}, \text{ diğer durumda} \end{array} \right\}$$

dir.

İspat: W_n bir bulanık tekerlek çizge ve $i = 1, \dots, n - 1$ olmak üzere $\mu(u_i, u_n)$ değerleri aynı ve $\mu(u_i, u_n) < \mu(e)$, $e \in \mu(C_{n-1})$ olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, n - 1$ için (u_i, u_n) yayları en zayıf yaylar olup W_n bulanık tekerlek çizge tanımından u_i tepelerine bitişik olup β -güçlü yaylardır. Böylece $s(u_i) = d(\mu) = q_1$ bulunur. C_{n-1} bulanık çevre çizgesi üzerinde bulunan en zayıf yaylarda β -güçlü olup geriye kalan yaylar da α -güçlü yaylardır. W_n tekerlek çizgesinin bir bulanık kesim tepeye sahip olup olmamasına bağlı olarak ispat iki durumda incelenir.

Durum i) W_n bulanık tekerlek çizgesi bir bulanık kesim tepeye sahip olsun. Bu durumda, bu tepe α -güçlü yayların ortak tepesi olacaktır. S bir bulanık tepe kesim küme olsun.

$|S| = 1 \Rightarrow s(S) = d(\mu) = q_1$ olacağından S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ olmak üzere (u_i, u_j) için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_2$ olup $m_f(G - S) = q_2$ bulunur. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = \max\{CONN_G(u_i, u_j) | d(u_i, u_j) > 1\} - q_2 = q - q_2$ olacaktır. Buradan da bulanık tepe kararlılık değeri,

$$T_f(G) = \left\{ \frac{q_1 + q_2}{q - q_2} \right\} \tag{7}$$

elde edilir.

$|S|=2$ için $s(S)=2d(\mu)=2q_1$ olmak üzere $\omega(G[S]) = 1$ olsun. $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_G(u_i, u_j) \leq q_m$ olduğundan S kümesini çizgeden çıkardığımızda $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_2$ bulunur. Böylece $m_f(G - S) = q_2$ olur. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) \leq q_m - q_2$ bulunur. Bu durumda bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) \geq \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} \geq \frac{2q_1 + q_2}{q_m - q_2} \tag{8}$$

elde edilir.

$|S|=2$ için $s(S)=2d(\mu)=2q_1$ olmak üzere $\omega(G[S]) = 2$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_1$ elde edilir. Buradan $m_f(G - S) = q_1$ bulunur. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = q - q_1$ olur ve bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \frac{3q_1}{q - q_1} \tag{9}$$

elde edilir. (8), (9) ve tanımdan dolayı;

$$T_f(G) = \frac{3q_1}{q - q_1} \tag{10}$$

olur.

$|S| \geq 3$ için $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1$ olmak üzere $\{u_n\} \notin S$ ve $\omega(G[S]) = 1$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_2$ elde edilir. Buradan $m_f(G - S) = q_2$ olur. Azalan bağlantı gücü ise, $\omega_f(G - S) \leq q_m - q_2$ olarak bulunur. Böylece bulanık tepe kararlılık değeri tanım gereği değerinin en küçük olması gerektiğinden $|S|=3$ için;

$$T_f(G) \geq \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} \geq \frac{3q_1 + q_2}{q_m - q_2} \tag{11}$$

elde edilir.

$|S| \geq 3$ için $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1, \{u_n\} \notin S$ ve $\omega(G[S]) \geq 2$ olsun. S bulanık tepe kesim kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_1$ elde edilir. Buradan $m_f(G - S) = q_1$ olur. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) \leq q_m - q_1$ olup bulanık tepe kararlılık değeri tanım gereği en küçük olması gerektiğinden $|S|=3$ için;

$$T_f(G) \geq \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} \geq \frac{4q_1}{q_m - q_1} \tag{12}$$

bulunur.

$|S| \geq 3$ için $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1, \{u_n\} \in S$ ve $\omega(G[S - \{u_n\}]) = 1$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_2$ ve $m_f(G - S) = q_2$ olacaktır. Buradan azalan bağlantı gücü, $\omega_f(G - S) \leq q_m - q_2$ elde edilir. Bulanık tepe kararlılık değeri tanımından değer en küçük olması gerektiğinden

$$T_f(G) \geq \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} \geq \frac{3q_1 + q_2}{q_m - q_2} \tag{13}$$

bulunur.

$|S| \geq 3$ için $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1, \{u_n\} \in S$ ve $\omega(G[S - \{u_n\}]) \geq 2$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0$ ve $m_f(G - S) = 0$ bulunur. Böylece azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S) = q$ olacaktır. Bulanık tepe kararlılık değeri tanımı gereği değer en küçük olması gerektiğinden $|S|=3$ ve $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için

$$T_f(G) = \frac{3q_1}{q} \tag{14}$$

elde edilir. (11), (12), (13), (14) ve tanım gereği

$$T_f(G) = \min \left\{ \frac{3q_1}{q} \right\} \tag{15}$$

bulunur.

(7), (10), (15) ve bulanık tepe kararlılık değeri tanımından

$$T_f(G) = \min \left\{ \frac{q_1 + q_2}{q - q_2}, \frac{3q_1}{q} \right\}$$

elde edilir.

Durum ii) W_n bulanık tekerlek çizgesi bir bulanık kesim tepeye sahip olmasın. Bu durumda $|S| \geq 2$ olur. Ayrıca C_{n-1} bulanık çevre çizge lokamin çevre olmalıdır. Bu durumda C_{n-1} bulanık çevre çizge üzerindeki her tepe çevre çizgenin en zayıf yayına bitişik olacaktır. Böylece $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ ve $d(u_i, u_j) > 1$ için $CONN_G(u_i, u_j) = q_2$ olur.

$|S|=2$ ve $\omega(G[S]) = 1$ olsun. Bu durumda S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n$ olan $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için bağlantı gücü değişmeyeceğinden $\omega(G[S]) = 2$ olmalıdır.

$|S|=2$ ve $\omega(G[S]) = 2$ olsun. Bu durumda $s(S) = 2d(\mu) = 2q_1$ olduğundan S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_1$ yani $m_f(G - S) = q_1$ bulunur. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = CONN_G(u_i, u_j) - q_1 = q_2 - q_1$ 'dir. Böylece bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} = \frac{3q_1}{q_2 - q_1} \tag{16}$$

elde edilir.

$|S| \geq 3$ ve $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1$ olmak üzere $\{u_n\} \notin S$ olsun. $\omega(G[S]) = 1$ olduğundan S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n$ olan $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için bağlantı gücü değişmeyeceğinden $\omega(G[S]) \geq 2$ olmalıdır. $\omega(G[S]) \geq 2$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = q_1$ olup $m_f(G - S) = q_1$ bulunur. Azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S) = q_2 - q_1$ bulunur. Böylece bulanık tepe kararlılık değeri tanımından değerin en küçük olması gerektiği için $|S|=3$ alınarak

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} = \frac{4q_1}{q_2 - q_1} \tag{17}$$

elde edilir.

$|S| \geq 3$ ve $s(S) \geq 3d(\mu) \geq 3q_1$ olmak üzere $\{u_n\} \in S$ olsun. $\omega(G[S - \{u_n\}]) = 1$ olduğundan S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n$ olan $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için bağlantı gücü değişmeyeceğinden $\omega(G[S - \{u_n\}]) \geq 2$ olmalıdır. Böylece S kümesini çizgeden çıkardığımızda

$i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0$ ve $m_f(G - S) = 0$ elde edilir. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = q_2$ olarak bulunur. Bu durumda bulanık tepe kararlılık değeri tanımından $|S|=3$ için

$$T_f(G) = \min_{S \subseteq \sigma^*} \left\{ \frac{s(S) + m_f(G - S)}{\omega_f(G - S)} \right\} = \frac{3q_1}{q_2} \tag{18}$$

elde edilir. (16), (17), (18) ve tanımdan $T_f(G) = \frac{3q_1}{q_2}$ elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 7: $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizge, $n \geq 6$ olmak üzere C_{n-1} bulanık çevre çizgesi üzerinde bulunan u_1, u_2, \dots, u_n tepeleri ve u_n bulanık merkez tepesinden oluşan bir bulanık tekerlek çizge W_n olsun.

$i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $\mu(u_n, u_i)$ değerleri sabit ve $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(u_n, u_i) > \mu(e)$ ise bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) \leq \min \left\{ \frac{q_m + q_{m-1}}{q_m - q_1} \right\}$$

dir.

Teorem 8: $G:(V, \sigma, \mu)$ bulanık çizgesi, $n \geq 6$ olmak üzere C_{n-1} bulanık çevre çizgesi üzerinde bulunan u_1, u_2, \dots, u_n tepeleri ve u_n bulanık merkez tepesinden oluşan bir bulanık tekerlek çizge W_n olsun. $0 < r < t < s \leq 1$ ve $i = 1, \dots, n - 1$ için $\mu(u_n, u_i)$ değerleri sabit olup $\mu(u_n, u_i) = s$ ve $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(u_n, u_i) > \mu(e)$ olmak üzere;

Durum i) $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(e) = r$ ise bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \min \left\{ \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)}, \frac{3h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu)} \right\}$$

Durum ii) $i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ için $\mu(e_{2i-1}) = r$ ve $\mu(e_{2i}) = t$ ise bulanık tepe kararlılık değeri;

$$T_f(G) = \min \left\{ \frac{h(\mu) + q_{m-1}}{h(\mu) - d(\mu)}, \frac{3h(\mu) + q_{m-1}}{h(\mu)} \right\}$$

dir.

İspat: Durum i) W_n bulanık tekerlek çizgesinde $0 < r < t < s \leq 1$ olmak üzere $i = 1, \dots, n - 1$ için $\mu(u_i, u_n)$ değerleri eşit olup $\mu(u_i, u_n) = s$ ve $\mu(u_i, u_n) > \mu(e)$, $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(e) = r$ olduğunda u_i, u_n yayları α -güçlü yaylar ve geriye kalan yaylar ise δ -yaylardır. W_n bulanık tekerlek çizge tanımı gereği u_n tepesi $i = 1, \dots, n - 1$ için u_i tepelerine komşu olduğundan $s(u_i) = s = h(\mu) = q_m$ olur.

$S = \{u_n\}$ olduğundan $|S|=1$ ve $s(S)=h(\mu)=s$ olur. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $i \neq j; i, j = 1, \dots, n - 1$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = d(\mu) = r$ olacaktır. Böylece en büyük bağlantı gücü $m_f(G - S) = d(\mu) = r$, azalan bağlantı gücü $\omega_f(G - S) = \max\{CONN_G(u_i, u_j) - CONN_{G-S}(u_i, u_j)\}$ 'den $\omega_f(G - S) = h(\mu) - d(\mu)$ bulunur. Bulanık tepe kararlılık değeri ise,

$$T_f(G) = \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)} \quad (19)$$

olarak elde edilir.

$|S|=2$ için $s(S) = 2h(\mu) = 2q_m$ olacaktır. $\{u_n\} \notin S$ olduğunda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için S kümesini çizgeden çıkardığımızda herhangi iki tepe arasında bağlantı gücü azalmadığından $\{u_n\} \in S$ olmalıdır. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = d(\mu) = r$ olacaktır. Bu durumda en büyük bağlantı gücü tanımı gereği, $m_f(G - S) = d(\mu) = r$ olur. Azalan bağlantı gücü ise, $\omega_f(G - S) = h(\mu) - d(\mu)$ olarak bulunur. Bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) = \frac{2h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)} \quad (20)$$

bulunur.

$|S| \geq 3$ için $s(S) \geq 3h(\mu) \geq 3q_m$ olacaktır. $\{u_n\} \notin S$ olduğunda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için S kümesini çizgeden çıkardığımızda herhangi iki tepe arasında bağlantı gücü azalmadığından $\{u_n\} \in S$ olmalıdır.

$\{u_n\} \in S$ ve $\omega(G[S - \{u_n\}]) = 1$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = d(\mu) = r$ olacaktır. En büyük bağlantı gücü $m_f(G - S) = d(\mu)$ elde edilir. Azalan bağlantı gücü ise $\omega_f(G - S) = h(\mu) - d(\mu)$ olarak bulunur. Böylece, bulanık tepe kararlılık değeri

$$T_f(G) = \frac{3h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)} \quad (21)$$

elde edilir.

$\{u_n\} \in S$ ve $\omega(G[S - \{u_n\}]) \geq 2$ olsun. S kümesini çizgeden çıkardığımızda $\forall u_i, u_j \in \sigma^*$ için $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = 0$ ve $CONN_{G-S}(u_i, u_j) = d(\mu) = r$ olacaktır. En büyük bağlantı gücü tanımı gereği $m_f(G - S) = d(\mu)$ olur. Azalan bağlantı gücü tanımından $\omega_f(G - S) = \max\{CONN_G(u_i, u_j) - CONN_{G-S}(u_i, u_j)\}$ olduğundan $\omega_f(G - S) = h(\mu)$ bulunur. Böylece

$$T_f(G) = \frac{3h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu)} \quad (22)$$

bulunur. (19), (20), (21), (22) ve bulanık tepe kararlılık değeri tanımından

$$T_f(G) = \min \left\{ \frac{h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu) - d(\mu)}, \frac{3h(\mu) + d(\mu)}{h(\mu)} \right\}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

Durum ii) Durum i'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

SONUÇ

Çizge teorisinde zedelenebilirlik parametrelerinden biri olan kararlılık değerinde, çizgeden çıkarılan tepe veya tepeler kümesi sonrasında geriye kalan çizgedeki en büyük bileşenin tepe sayısı ile ilgilenilir. Yani iletişimin veya bağlantının devam ettiği bileşen dikkate alınır ve buna bağlı olarak çizgenin kararlılık seviyesi belirlenmeye çalışılır. Bulanık tepe kararlılık değeri parametresinde ise çizgeden güçlü yaylar çıkarılarak herhangi iki tepe arasındaki bağlantı gücü azaltılmış olup geriye kalan çizgede bu tepeler arasında devam eden yeni bağlantı gücü esas alınarak çizgenin kararlılık değeri belirlenmiştir. Tanımlanan parametreyi uyguladığımız bulanık çizgelerden tek bir α -güçlü yaya sahip, kendini merkezleyen, düzenli bulanık çevre çizgelerde ve lokamin çevre çizgelerde bulanık tepe kararlılık değerlerini belirlemek için çizgeler bağlantısız hale getirilmiştir. Ayrıca her bulanık çevre çizge için bulanık tepe kararlılık değerinin genel sonucu elde edilmiştir. Bunun yanında tepeleri u_1, u_2, \dots, u_{n-1} olan C_{n-1} bulanık çevre çizge ile u_n bulanık merkez tepeden oluşan W_n bulanık tekerlek çizgesinde $i = 1, \dots, n - 1$ olmak üzere $\mu(u_i, u_n)$ değerleri aynı kalacak şekilde $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(u_i, u_n)$ ile $\mu(e)$ değerleri arasındaki ilişkiler değiştirilerek oluşturulan farklı bulanık tekerlek çizgelerine parametre uygulanarak genelleştirilmiş sonuçlar elde edilmiştir. Gelecek çalışmalarda, W_n bulanık tekerlek çizgesinde $\mu(u_i, u_n)$ değerleri farklı olacak şekilde $\forall e \in E(C_{n-1})$ için $\mu(u_i, u_n)$ ile $\mu(e)$ değerleri arasındaki ilişkiler değiştirilerek oluşturulan farklı bulanık tekerlek çizgeler ele alınarak bulanık tepe kararlılık değerleri araştırılabilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Manisa Celal Bayar Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir. Proje Numarası: 2018-092

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan ederler.

KAYNAKLAR

- Altundag, F.N. (2021). Bulanık çizgelerde zedelenebilirlik parametreleri: Bulanık bütünlük değeri ve bulanık saçılım sayısı, (Doktora Tezi). Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- Barefoot, C. A. & Entringer, H. R. (1987). Vulnerability in graphs. A comparative survey. J. combin.comput, 25-33.
- Bhutani, K.R. & Rosenfeld, A. (2003). Fuzzy end nodes in fuzzy graphs. Information sciences, 152, 323– 326.
- Bhutani, K.R., Mordeson. J.N., & Rosenfeld, A. (2004). On degrees of end nodes in fuzzy graphs. Iranian journal of fuzzy graphs, 1(1), 57-64.
- Chvatal, V. (1973). Tough graph and hamiltonian circuits. Discrete math, 5, 215-22.
- Cozzens, M., Moazzami, D. ve Stueckle, S. (1995). The tenacity of a graph. Proceedings of the theory and applications of graphs, 7th international conference, Wiley, NewYork, 1111-1122.
- Gani, A.N., Radha, K. (2008). On regular fuzzy graphs. Journal of physical sciences, 12, 33-40.
- Harary, F. (1969). Connectivity. Graph theory(pp:43-57). Addison-Wesley Publishing Company.
- Jung, H. (1978). On a class of posets and the corresponding comparability graphs. J. Combin. Theory SE Er.B.. 1124, 125-133.

- Li, Y., Zhang, S. & Li, X. (2005). Rupture degree of graphs. *International journal of computer mathematics*, 82(7), 793-803.
- Mathew, S. & Sunitha, M.S. (2009). Types of arcs in a fuzzy graph. *Information sciences*, 179, 1760–1768.
- Mathew, S. & Sunitha, M.S. (2010). Node connectivity and arc connectivity of a fuzzy graph. *Information sciences*, 180, 519–531.
- Rosenfeld, A. (1975). *Fuzzy Graphs*. Editör: Zadeh L.A, Fu K.S. ve Shimura M., *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Process*(pp:77-95). New York: Academic Press.
- Sunitha, M.S. & Vijayakumar, A. (1999). A characterization of fuzzy trees. *Information sciences*, 113, 293–300.
- Yeh, R.T. & Bang, S.Y. (1975). Fuzzy relations, fuzzy graphs and their applications to clustering analysis. Editör: Zadeh L.A., Fu K.S., Shimura M. *Fuzzy Sets and Their Applications* (pp: 125-149). Academic Press.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and control*, 8, 338-353.