# SOFT TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS SİSTEMLERİ

**Sadi Bayramov[1], Çiğdem Gündüz (Aras)[2], Nesrin Demirci[1]**

**[1]Kafkas Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi-KARS**

**[2]Kocaeli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi-KOCAELİ**

**e-mail: baysadi@gmail.com**

**Abstract**

Many practical problems in economics, engineering, environment, social science, medical science etc. cannot be dealt with by classical methods, because classical method have inherent difficulties. The reason for these difficulties may be due to the inadequacy of the theories of parameterization tools. Molodtsov initiated the concept of soft set theory as a new mathematical tool for dealing with uncertainties. Research works in soft set theory and its applications in various fields have been progressing rapidly since Maji et al. The idea of soft topological spaces was first given by M. Shabir, M. Naz and mappings between soft sets were described by P. Majumdar, S.K. Samanta. Later, many researches about soft topological spaces were studied in [3,9,14,16,24,25,28]. In these studies, the concept of soft point is expressed by different approaches. In the study we use the concept of soft point which was given in [14]. Soft topological spaces and soft continuous mapping form category and this category is extension of category of topological spaces. Also category of fuzzy topological spaces is extension of category of topological spaces.

In this article the closure problem is investigated according to algebraic operation in the category of soft topological spaces. For this, the existence of limits of inverse systems of soft topological spaces is proven.

## Giriş

Sosyal bilimlerde, ekonomide, mühendislikte v.b. alanlarda karmaşık problemleri çözmek için klasik metotları kullanamayız. Bu tür problemlerin çözümü matematiksel temel prensipleri, belirsizliği ve kesinlik olmayan durumları içerir. Dolayısıyla, bu durumlarda klasik kümeler teorisi bu tür belirsizlik içeren problemlerin ele alınmasında tam olarak uygun olmayabilir. Bu tür belirsizlikleri etkili bir yolla ele alınmasını sağlayan birçok sayıda teori öne sürülmüştür. Bunlardan fuzzy kümeler teorisi, intuitionistic fuzzy kümeler teorisi, aralıklar matematik teorisi ve rough kümeler teorisi v.b. Bu kavramlar oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin; mantık programlamada, tıbbi teşhislerde, karar analizlerinde, model tanımada v.b. alanlarda uygulamaya sahiptir. Bununla beraber bu teorilerin kendi zorlukları vardır. 1999'da Molodtsov belirsizliği modellemek için tamamen yeni bir yaklaşım olan soft küme kavramını tanımlamış ve bazı özelliklerini vermiştir [22]. Soft kümelerle ilgili olarak birçok araştırmalar ve incelemeler yapılmıştır [17,18,19,20,23]. Cebirde soft kavramını ilk olarak Aktaş ve Çağman kullanarak, soft grup kavramını tanımlayarak bazı incelemeler yapmışlardır [2]. Acar ve diğerleri soft halka kavramını, Sun ve diğerleri de soft modüller kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini araştırmışlardır [1, 26].

Fuzzy soft yapısını cebire ilk olarak Jin-liang ve diğerleri taşıyarak fuzzy soft grup kavramını vermişlerdir. Gündüz (Aras) ve Bayramov fuzzy soft modül ve intuitionistic fuzzy soft modüller kategorisini tanımlayarak bu kategoride bazı araştırmalar yapmışlardır [12, 13]. Yine soft ve fuzzy soft gruplar kategorisinde izomorfizma hakkında teoremler [5] çalışmalarında ispatlanmıştır.

Soft kümelerde topolojik yapı, cebirin aksine ilk olarak 2011 yılında tanımlanmıştır [25]. Bu çalışmalardan birçok araştırmacılar genel topolojinin sonuçlarını soft topolojik uzaylara taşımaya çalışmışlardır [3,9,14,16,24,25,28]. Matematikte en önemli problemlerden birisi, ele alınan yeni kategoride cebirsel işlemlerin verilmesi ve bu işlemlere göre bu kategorinin kapalı olmasıdır. Ters ve düz limitler tüm cebirsel işlemleri içerdiğinden verilmesi gereken işlemlerin en başında gelir.

Bu çalışmada; soft topolojik uzaylar kategorisinde ters sistemler tanımlanmış ve bu sistemlerin limitlerinin varlığı ispatlanmıştır. En önemli sonuçlardan biri soft kompakt uzayların ters limitinin de soft kompakt olduğunun ispatıdır.

**Kuramsal Temeller**

**Tanım 2.1.**[22] $U$ bir evrensel küme ve $E$ parametrelerin kümesi olsun. $U$ nun kuvvet kümesini $P(U)$ ile gösterelim ve $A$ , $E$ parametreler kümesinin boş olmayan alt kümesi olsun. $(F, A)$ çifti $U$ üzerinde bir soft küme olarak adlandırılır.

Burada $F$, $F: A \longrightarrow P(U)$ ile verilen bir dönüşümdür.

Başka bir ifadeyle, $U$ üzerinde bir soft küme, $U$ evrensel kümesinin alt kümelerinin bir parametrelenmiş ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ kümesi $(F, A)$ soft kümesinin $\varepsilon$ −elemanlarının kümesi ya da $\varepsilon$ −yaklaşımlarının kümesi olarak düşünülebilir. Açıktır ki, soft küme bir küme değildir.

**Tanım 2.2.** [20] $U$ evrensel kümesi üzerinde $(F, A)$ ve $(G, B)$ soft kümeleri için, eğer

**1)** $A \subseteq B$ ve

**2)** $\forall e \in A$ için $F(e) \subset G(e)$ ise

$(F, A)$ ya, $(G, B)$ nin soft alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $(G, B)$ , $(F, A)$ nın soft alt kümesi ise $(F, A)$ ya $(G, B)$ nin soft üst kümesi denir. $(F, A) \tilde{\supseteq} (G, B)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.3.** [20] $U$ evrensel kümesi üzerinde $(F, A)$ ve $(G, B)$ iki soft küme olsun. Eğer $(F, A)$, $(G, B)$ nin soft alt kümesi ve $(G, B)$, $(F, A)$ nın soft alt kümesi ise $(F, A)$ ve $(G, B)$ soft kümelerine soft eşit denir.

**Tanım 2.4.** $[20]$ $(F,A)$, $U$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise $(F,A)$ soft kümesine boş soft küme denir ve $\Phi$ ile gösterilir.

**Tanım 2.5.** $[20]$ $(F,A)$, $U$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise $(F,A)$ soft kümesine mutlak soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

**Tanım 2.6.** $[20]$ $(F,A)$ ve $(G,B)$ $U$ üzerinde iki soft küme ise $(F,A) \wedge (G,B)$ şeklinde gösterilen "$(F,A)\ VE\ (G,B)$" işlemi, $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olarak tanımlanır. Burada $\forall\ (\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H\big((\alpha,\beta)\big) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dır.

**Tanım 2.7.** $[20]$ $(F,A)$ ve $(G,B)$ $U$ üzerinde iki soft küme ise $(F,A) \vee (G,B)$ şeklinde gösterilen "$(F,A)\ VEYA\ (G,B)$" işlemi, $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olarak tanımlanır. Burada $\forall\ (\alpha,\beta) \in A \times B$ için $O\big((\alpha,\beta)\big) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dır.

**Tanım 2.8.** $[20]$ $U$ evrensel küme üzerindeki $(F,A)$ ve $(G,B)$ iki soft kümenin birleşimi $(H,C)$ soft kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & ,\ \ eğer\ e \in A - B\ ise \\ G(e) & ,\ \ eğer\ e \in B - A\ ise \\ F(e) \cup G(e), & eğer\ e \in A \cap B\ ise \end{cases}$$

şeklindedir. Bu işlem $(F,A) \cup (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.9.** $[20]$ $U$ evrensel küme üzerindeki $(F,A)$ ve $(G,B)$ iki soft kümenin kesişimi $(H,C)$ soft kümesidir. Burada $C = A \cap B$, $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ dir ve $(F,A) \cap (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

$X$ bir evrensel küme ve $E$ parametrelerin boş olmayan kümesi olsun.

**Tanım 2.10.** $[25]$ $X$ evrensel küme üzerinde $(F,A)$ bir soft küme olsun. $(F,A)$ soft kümesinin bağıl tümleyeni $(F,A)'$ ile gösterilir ve $(F,A)' = (F',A)$ şeklinde tanımlanır. Burada $F': A \longrightarrow P(U)$, $\forall\alpha \in A$ için $F'(\alpha) = U - F(\alpha)$ ile verilen dönüşümdür.

**Tanım 2.11.** $[25]$ $\tau$, $X$ üzerinde soft kümelerin ailesi olsun. $\tau$ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

**1)** $\Phi, \tilde{X} \in \tau$

**2)** $\tau$ sınıfındaki soft kümelerin herhangi sayıda birleşimi $\tau$ ya aittir.

**3)** $\tau$ sınıfındaki herhangi iki soft kümenin kesişimi $\tau$ ya aittir.

$\tau$ ya $X$ üzerinde bir soft topoloji denir.

$(X,\tau,E)$ üçlüsü $X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olarak adlandırılır.

**Önerme 2.12.** $[25]$ $(X,\tau,E)$, $X$ üzerinde bir soft uzay olsun. Herbir $\alpha \in E$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha) \mid (F,E) \in \tau\}$ ailesi $X$ de bir topoloji tanımlar.

**Tanım 2.13.**[14] $(F,E)$, $X$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $e \in E$ elemanı için $F(e)=\{x\}$ ve her $e' \in E-\{e\}$ için $F(e')=\emptyset$ ise $(F,E)$ soft kümesi bir soft nokta olarak adlandırılır ve $(x_e,E)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.14.**[14] $X$ evrensel küme üzerinde $(x_e,E)$ ve $(y_{e'},E)$ iki soft nokta olsun. Eğer $x \neq y$ veya $e \neq e'$ ise noktalara farklı noktalar denir.

**Önerme 2.15.**[14] $(F,E)$, $X$ üzerinde bir soft küme olsun. O zaman $(F,E)$, kendisinin soft noktalarının birleşimidir. Yani;

$$(F,E)=\bigcup_{e\in E}\bigcup_{x\in F(e)}(x_e,E)$$

dir.

**Tanım 2.16.**[28] $SS(U)_A$ ve $SS(V)_B$ soft kümelerin aileleri olsun. $u: U \longrightarrow V$ ve $p: A \longrightarrow B$ dönüşümler olsun. $f_{pu}: SS(U)_A \longrightarrow SS(V)_B$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

**1)** $(F,A)$, $SS(U)_A$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin görüntüsü $\forall\, y \in B$ için

$$f_{pu}(F)(y)=\begin{cases}\bigcup_{x\in p^{-1}(y)\cap A} u\big(F(x)\big), & p^{-1}(y)\cap A \neq \emptyset\\ \emptyset, & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde bir soft kümedir ve $f_{pu}(F,A)=\big(f_{pu}(F),p(A)\big)$ ile gösterilir.

**2)** $(G,B)$, $SS(V)_B$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin ters görüntüsü $\forall\, x \in A$ için

$$f_{pu}^{-1}(G)(x)=\begin{cases}u^{-1}\Big(G\big(p(x)\big)\Big), & p(x)\in B\\ \emptyset, & \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

sşeklinde bir soft kümedir ve $f_{pu}^{-1}(G,B)=\big(f_{pu}^{-1}(G),p^{-1}(B)\big)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.17.**[14] $(X,\tau,E)$ ve $(Y,\tau',E)$ iki soft topolojik uzay, $f:(X,\tau,E)\longrightarrow (Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x)_e,E)$ nin herhangi $(H,E)$ soft komşuluğu için $f\big((F,E)\big)\subset (H,E)$ sağlanacak şekilde $(x_e,E)$ nin bir $(F,E)$ soft komşuluğu bulunabiliyorsa $f$ dönüşümüne $(x_e,E)$ de soft sürekli dönüşüm denir.

Eğer $f:(X,\tau,E)\longrightarrow (Y,\tau',E)$ soft dönüşümü her soft noktada sürekli ise $f$ soft sürekli dönüşüm denir.

**Soft Topolojik Uzayların Ters Sistemleri**

$A$, yönlendirilmiş bir küme olsun. $Stop$ ile soft topolojik uzaylar kategorisini gösterelim.

**Tanım 3.1.** Her $F: \mathrm{A}^{op}\longrightarrow Stop$ funktoruna soft topolojik uzaylar kategorisinde ters sistem denir ve bu ters sistemin limitine bu funktorun limiti denir.

Şimdi bu tanımı inceleyelim.

Soft topolojik uzayların ters sistemi

$$(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}) \longrightarrow (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

şeklinde bir sistemdir. Bu sistemden

$$\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\,,\left\{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha<\alpha'}\right) \qquad (3.1)$$

$$\left(\{E_\alpha\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\,,\left\{q_\alpha^{\alpha'}: E_{\alpha'} \longrightarrow E_\alpha\right\}_{\alpha<\alpha'}\right) \qquad (3.2)$$

şeklinde kümelerin iki ters sistemini oluşturabiliriz. Bu sistemlerin ters limitini ele alalım:

$$X = \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} X_\alpha \quad \text{ve} \quad E = \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\ .$$

$\left(\prod_{\alpha\epsilon A} X_\alpha\,,\ \prod_{\alpha\epsilon A} \tau_\alpha\,,\ \prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha\right)$ soft topolojik uzayların çarpımı olsun.

Şimdi $(X,E)$ soft kümede soft topoloji tanımlayalım. Eğer

$\left(\mathrm{F},\prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha\right) \in \prod_{\alpha\epsilon A} \tau_\alpha$ ise $\mathrm{F}\,\Big|\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha : \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\epsilon A} X_\alpha$ soft kümesini aşağıdaki

şekilde tanımlayalım.

$\forall\ \{e_\alpha\}\epsilon \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha$ için $\mathrm{F}\,\Big|\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\,(\{e_\alpha\}) = \mathrm{F}(\{e_\alpha\})\,\Big|\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} X_\alpha$

Bu şekilde tanımlanan soft küme $\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} X_\alpha$ da değer almaktadır. Bu soft kümeyi

$\left(\mathrm{F}\,\Big|\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\,, \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\right)$ ile gösterelim.

Kolayca gösterebiliriz ki

$$\left\{\left(\mathrm{F}\,\Big|\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\,, \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\right) : \left(\mathrm{F},\prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha\right) \in \prod_{\alpha\epsilon A} \tau_\alpha\right\}$$

ailesi $(X,E)$ soft kümesinde bir soft topoloji oluşturur. Bu soft topolojiyi $\tau$ ile gösterelim. Böylece $(X,\tau,E)$ bir soft topolojik uzay olmaktadır.

$$\forall\ \alpha \in \mathrm{A} \text{ için } \quad \pi_\alpha : \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha\ , \qquad q_\alpha : \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha \longrightarrow E_\alpha$$

projeksiyon dönüşümleri olsun. Açıktır ki $(\pi_\alpha,q_\alpha):(X,\tau,E) \longrightarrow (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft dönüşümleri soft süreklidir.

**Teorem 3.2.** Soft topolojik uzaylar kategorisinde her

$$(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}) \longrightarrow (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

şeklinde ters sistemin limiti vardır, tektir ve $\left(\underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} X_\alpha\,,\tau, \underset{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}}{\lim} E_\alpha\right)$ soft topolojik uzayına eşittir.

**İspat.** Göstermemiz gereken her $(Y,\tau',E')$ soft topolojik uzay ve aşağıdaki diyagramı komutatif yapan

$$\{(\varphi_\alpha,\psi_\alpha):(Y,\tau',E')\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$$

soft sürekli dönüşümler ailesi için:

$$\begin{tikzcd}
 & (X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}) \arrow[d, "(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'})"] \\
(Y,\tau',E') \arrow[ur, "(\varphi_{\alpha'},\psi_{\alpha'})"] \arrow[r, "(\varphi_\alpha,\psi_\alpha)"'] & (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

öyle tek $(f,\varkappa):(Y,\tau',E')\longrightarrow(X,\tau,E)$ soft sürekli dönüşüm vardır ki her $\alpha\in\mathrm{A}$ için

$$\begin{tikzcd}
(Y,\tau',E') \arrow[d, "(f,\varkappa)"'] \arrow[dr, "(\varphi_\alpha,\psi_\alpha)"] & \\
(X,\tau,E) \arrow[r, "(\pi_\alpha,q_\alpha)"'] & (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

diyagramı komutatiftir.

$f:Y\longrightarrow X$ ve $\varkappa:E'\longrightarrow E$ dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

Her $e'\in E'$ için $\varkappa(e')=\{\psi_\alpha(e')\}$ ve her $y_{e'}$ soft noktası için $f(y_{e'})=\left\{\varphi_\alpha(y)_{\psi_\alpha(e')}\right\}$ olsun.

(3.3) diyagramının komutatifliğinden kolayca gösterebiliriz ki $\varkappa(e')\in\varprojlim_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha$ ve $f(y_{e'})$ soft noktası $(X,\tau,E)$ soft uzayına aittir. $(f,\varkappa)$ soft dönüşümü soft süreklidir. (3.4) diyagramının komutatifliğine bakalım. Her bir $y_{e'}\in(Y,\tau',E')$ soft noktası için $(\varphi_\alpha,\psi_\alpha)(y_{e'})=\left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}$ dir.

$$\begin{aligned}(\pi_\alpha,q_\alpha)\circ(f,\varkappa)(y_{e'})&=(\pi_\alpha,q_\alpha)\left(\left(f(y)\right)_{\varkappa(e')}\right)=(\pi_\alpha,q_\alpha)\left(\left\{\left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}\right\}\right)\\&=\left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}\end{aligned}$$

$f$ ve $\varkappa$ dönüşümleri tek türlü belirlendiğinden $(f,\varkappa)$ soft dönüşümü tektir.

Şimdi ters limitin bir funktor olduğunu gösterelim. Onun için soft topolojik uzayların ters sistemlerinin bir kategori oluşturduğunu kanıtlayalım.

$$\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\in\mathrm{A}}\ ,\left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

ve

$$\left(\left\{\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\ ,\ \left\{\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right):\left(Y_{\beta'},\tau'_{\beta'},E'_{\beta'}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right\}_{\beta<\beta'}\right)$$

soft topolojik uzayların iki ters sistemi , $\varphi: B \longrightarrow A$ izoton dönüşüm ve her $\beta\epsilon$ B için

$$\left(f_\beta,g_\beta\right):\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)$$

soft topolojik uzayların soft sürekli dönüşümleri olsun.

**Tanım 3.3.** Eğer her $\beta' > \beta$ için aşağıdaki diyagram komutatif ise

$$\begin{tikzcd}
\left(X_{\varphi(\beta')},\tau_{\varphi(\beta')},E_{\varphi(\beta')}\right) \arrow[r, "\left(f_{\beta'},g_{\beta'}\right)"] \arrow[d, "\left(p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')},q_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}\right)"'] & \left(Y_{\beta'},\tau'_{\beta'},E'_{\beta'}\right) \arrow[d, "\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right)"] \\
\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right) \arrow[r, "\left(f_\beta,g_\beta\right)"'] & \left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)
\end{tikzcd}$$

$$\left(\varphi: B\longrightarrow A\ ,\left\{\left(f_\beta,g_\beta\right):\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$$

ailesine

$$\left(\left\{\left(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha\right)\right\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):\left(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}\right)\longrightarrow\left(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

ters sistemden

$$\left(\left\{\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\ ,\ \left\{\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right):\left(Y_{\beta'},\tau'_{\beta'},E'_{\beta'}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right\}_{\beta<\beta'}\right)$$

ters sistemine giden morfizma denir.

Açıktır ki soft topolojik uzayların ters sistemleri ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur. Bu kategoriyi $Inv(Stop)$ ile gösterelim.

$\left(\varphi: B\longrightarrow A\ ,\left\{g_\beta:\ E_{\varphi(\beta)}\longrightarrow E'_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ ailesi kümelerin $\left(\left\{E_\alpha\right\}_{\alpha\epsilon A},\left\{q_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ ters sisteminden $\left(\left\{E'_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}},\left\{\varkappa_\beta^{\beta'}\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ ters sistemine giden bir morfizmadır. Aynı şekilde $\left(\varphi: B\longrightarrow A\ ,\left\{f_\beta:\ X_{\varphi(\beta)}\longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ ailesi de $\left(\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\epsilon A},\left\{p_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ kümelerin ters sisteminden $\left(\left\{Y_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}},\left\{r_\beta^{\beta'}\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ ters sistemine giden bir morfizmadır. Bu

morfizmaların limitini $\varprojlim_{\beta\epsilon B} f_\beta$ ve $\varprojlim_{\beta\epsilon B} g_\beta$ ile gösterelim. O halde

$$\left(\varprojlim_{\beta\in B} f_\beta, \varprojlim_{\beta\in B} g_\beta\right): \left(\varprojlim_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \longrightarrow \varprojlim_{\beta\in B}\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right)$$

ters limitlerin bir morfizması olmaktadır.

**Teorem 3.4.** $\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\} \longmapsto \varprojlim_{\alpha\epsilon A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$

$$\left(\varphi: B \longrightarrow A, \{(f_\beta,g_\beta)\}_{\beta\epsilon B}\right) \longmapsto \left(\varprojlim_{\beta\in B} f_\beta, \varprojlim_{\beta\in B} g_\beta\right)$$

karşı gelmesi $Inv(Stop)$ kategorisinden $Stop$ kategorisine giden bir funktordur.

**Teorem 3.5.** $(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon A}, \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sistemi olsun.

$$\mathcal{B} = \{(\pi_\alpha,q_\alpha)^{-1}(F_\alpha,E_\alpha) \mid \alpha\epsilon A, (F_\alpha,E_\alpha) \in \tau_\alpha\}$$

ailesi $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ uzayının soft topolojisinin bir soft tabanıdır.

**İspat**. Her $\alpha\epsilon A$ için $(\pi_\alpha,q_\alpha): \varprojlim(\underline{X},\underline{E}) \longrightarrow (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft sürekli olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin kümeleri soft açıktır. $\mathcal{B}$ ailesinin bir taban olduğunu göstermek için her soft açık $(G,E) \subset \varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ ve her $x_e \in (G,E)$ soft noktası için

$$x_e \in \left(\pi_{\alpha_0},q_{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right) \subset (G,E)$$

sağlanacak şekilde $\alpha_0\epsilon$ A ve $\left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right) \in \tau_{\alpha_0}$ bulunması gerekir.

$(G,E) \subset \varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ keyfi soft açık küme ve $x_e = \left\{x^\alpha_{e_\alpha}\right\} \in (G,E)$ herhangi bir soft nokta olsun. Soft alt uzay topolojisinin tanımından $(G,E) = \varprojlim(\underline{X},\underline{E}) \cap (H,E)$ sağlanacak biçimde $(H,E) \subset \prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft açık kümesi vardır. Çarpım topolojisinin tanımından

$$x_e \in \left(p_{\alpha_1},q_{\alpha_1}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_1},E_{\alpha_1}\right) \cap \ldots \cap \left(p_{\alpha_k},q_{\alpha_k}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_K},E_{\alpha_K}\right) \subset (H,E)$$

koşulunu sağlayan $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in A$ elemanları ve $\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right) \in \tau_{\alpha_i}$ kümeleri mevcuttur. $A$ yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha_0 > \alpha_1,\ldots,\alpha_0 > \alpha_k$ koşulunu sağlayan $\alpha_0 \in A$ vardır. $\left(p^{\alpha_0}_{\alpha_i},q^{\alpha_0}_{\alpha_i}\right): \left(X_{\alpha_0},\tau_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right) \longrightarrow \left(X_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)$ $i = \overline{1,k}$ soft sürekli olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^{k}\left(p^{\alpha_0}_{\alpha_i},q^{\alpha_0}_{\alpha_i}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right) = \left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right)$$

soft alt kümesi $\left(X_{\alpha_0},\tau_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right)$ soft uzayında soft açık kümedir $\left(p^{\alpha_0}_{\alpha_i},q^{\alpha_0}_{\alpha_i}\right)\left(x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}}\right) = x^{\alpha_1}_{e_{\alpha_1}}$ olduğundan $x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}} \in \left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right)$ dır ve $x_e \in \left(\pi_{\alpha_0},q_{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right)$ dır. O halde

$$\left(\pi_{\alpha_0},q_{\alpha_0}\right)^{-1}\left(p^{\alpha_0}_{\alpha_i},q^{\alpha_0}_{\alpha_i}\right)\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right) = \left(\pi_{\alpha_i},q_{\alpha_i}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)$$

$$\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\cap\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0},q_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)$$

sağlanır. Böylece

$$x_e\in\left(\pi_{\alpha_0},q_{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_0},E_{\alpha_0}\right)=\left(\pi_{\alpha_0},q_{\alpha_0}\right)^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0},q_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)\right)$$

$$=\bigcap_{i=1}^{k}\left(\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\cap\left(p_{\alpha_i},q_{\alpha_i}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)\right)$$

$$=\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\cap\bigcap_{i=1}^{k}\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0},q_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\left(F_{\alpha_i},E_{\alpha_i}\right)\subset\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\cap(H,E)\subset(G,E)$$

olur.

**Teorem 3.6.** $\left(\underline{X},\underline{E}\right)=\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon A}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sistemi olsun.

**1)** Eğer $\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ birebir ise her $\alpha\epsilon$ A için

$$(\pi_\alpha,q_\alpha):\varprojlim\left(\underline{X},\underline{E}\right)\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$$

soft dönüşümleri de birebirdir.

**2)** Eğer $\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ birebir ve örten ise her $\alpha\epsilon$ A için

$$(\pi_\alpha,q_\alpha):\varprojlim\left(\underline{X},\underline{E}\right)\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$$

soft dönüşümleri de birebir ve örtendir.

**İspat.**

**1)** $x_e=\left\{x_{e_\alpha}^{\alpha}\right\}\neq y_{e'}=\left\{y_{e'_\alpha}^{\alpha}\right\}\in\varprojlim\left(\underline{X},\underline{E}\right)$ soft noktaları için

$$\left(\pi_{\alpha_1},q_{\alpha_1}\right)(x_e)=\left(\pi_{\alpha_1},q_{\alpha_1}\right)(y_{e'})$$

olsun. Her $\alpha'>\alpha_1$ için $\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'},q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow\left(X_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1},E_{\alpha_1}\right)$ birebir ve $\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'},q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)=x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}=y_{e'_{\alpha_1}}^{\alpha_1}=\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'},q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)$ olduğundan $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}=y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}$ dür. Keyfi $\alpha\epsilon$ A için $A$ yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha,\alpha_1$ için $\alpha'>\alpha,\alpha'>\alpha_1$ sağlanacak şekilde $\alpha'\epsilon$ A vardır. O halde $x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}=y_{e'_{\alpha_1}}^{\alpha_1}$ olduğu için $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}=y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}$ . Buradan ise $x_{e_\alpha}^{\alpha}=\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)=\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)=y_{e'_\alpha}^{\alpha}$ dır, yani $x_e=y_{e'}$ sağlanır

**2)** $\left(\pi_{\alpha_1},q_{\alpha_1}\right):\varprojlim\left(\underline{X},\underline{E}\right)\longrightarrow\left(X_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1},E_{\alpha_1}\right)$ soft dönüşümün örten olduğunu gösterelim. $x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\in\left(X_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1},E_{\alpha_1}\right)$ keyfi bir soft nokta olsun. Her $\alpha'>\alpha_1$ için $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}=\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'},q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$ alalım. Her $\alpha\epsilon$ A için $\alpha'>\alpha$ ve $\alpha'>\alpha_1$ sağlayan $\alpha'\epsilon$ A vardır. O zaman $x_{e_\alpha}^{\alpha}=\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)=\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'},q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$ soft noktasını elde ederiz.

$x_e = \{x_{e_\alpha}^{\alpha}\}$ elemanının $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft uzayına ait olduğunu gösterelim.

Her $\alpha < \tilde{\alpha}$ için $\alpha' > \alpha$ , $\alpha' > \alpha_1$ ve $\widetilde{\alpha'} > \tilde{\alpha}$ , $\widetilde{\alpha'} > \alpha_1$ koşulu altında $\alpha', \widetilde{\alpha'}$ seçelim. O halde

$$x_{e_\alpha}^{\alpha} = (p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = (p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'})^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$$

$$x_{e_{\tilde{\alpha}}}^{\tilde{\alpha}} = \left(p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}\right)\left(x_{e_{\widetilde{\alpha'}}}^{\widetilde{\alpha'}}\right) = \left(p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}\right)\left(\left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)\right)$$

Şimdi $\alpha'' > \alpha'$ , $\alpha'' > \widetilde{\alpha'}$ koşulu altında $\alpha''$ elemanını alalım. O zaman

$$x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = (p_{\alpha_1}^{\alpha''}, q_{\alpha_1}^{\alpha''})\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = (p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'})\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}\right)\left(p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right)$$

ve

$$x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = (p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'})\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}\right)\left(x_{e_{\widetilde{\alpha'}}}^{\widetilde{\alpha'}}\right)$$

olur.

$(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'})$, $\left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}\right)$ soft fonksiyonları birebir, örten oldukları için $\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}$ ve $\left(p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\widetilde{\alpha'}}}^{\widetilde{\alpha'}}$ dır. O halde

$$(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''})\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = (p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_\alpha}^{\alpha},$$

$$(p_{\tilde{\alpha}}^{\alpha''}, q_{\tilde{\alpha}}^{\alpha''})\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}, q_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}\right)\left(p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\tilde{\alpha}}}^{\tilde{\alpha}}$$

dır. Buradan $(p_\alpha^{\tilde{\alpha}}, q_\alpha^{\tilde{\alpha}})(x_{e_{\tilde{\alpha}}}^{\tilde{\alpha}}) = (p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''})\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_e$ elde edilir. Böylece $x_e = \left(x_{e_\alpha}^{\alpha}\right)$ elemanı $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft uzayına ait olur ve $(\pi_{\alpha_1}, q_{\alpha_1})(x_e) = x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}$ dir.

**Sonuç 3.7.** Eğer $(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}, \{(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sisteminde $(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}) : (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft homeomorfizma ise

$$(\pi_\alpha, q_\alpha) : \varprojlim(\underline{X},\underline{E}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$$

soft fonksiyonu da bir soft homeomorfizmadır.

**İspat.** Teorem 3.6. dan $(\pi_\alpha, q_\alpha)$ birebir, örten ve süreklidir. Teorem 3.5. den $\{(\pi_\alpha, q_\alpha)^{-1}(F_\alpha, E_\alpha) : \alpha\epsilon\mathrm{A}, (\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{E}_\alpha) \in \tau_\alpha\}$ ailesi $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft uzayının topolojisinin bir tabanıdır. O halde $(\pi_\alpha, q_\alpha)\left((\pi_\alpha, q_\alpha)^{-1}(F_\alpha, E_\alpha)\right) = (F_\alpha, E_\alpha)$ olduğundan $(\pi_\alpha, q_\alpha)$ soft açık dönüşümdür. Böylece $(\pi_\alpha, q_\alpha)$ bir soft homeomorfizmadır.

**Lemma 3.8.** $(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}, \{(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})\}_{\alpha<\alpha'}\right)$, soft $T_2-$ uzaylarının ters sistemi ise $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft uzayı $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft uzayında soft kapalı kümedir.

**İspat.** $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft kümesinin soft kapalı olduğunu göstermek için

$\left(\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim \underline{E}\right) \setminus \varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ kümesinin soft açık olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $x_e = \{x^\alpha_{e_\alpha}\} \in \left(\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim \underline{E}\right) \setminus \varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ için $x_e \neq \varprojlim(\underline{X},\underline{E})$

olduğundan $\left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)\left(x^\beta_{e_\beta}\right) \neq x^\alpha_{e_\alpha}$ sağlanacak şekilde $\alpha < \beta \in$ A bulunabilir.

$x^\alpha_{e_\alpha}, \left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)\left(x^\beta_{e_\beta}\right) \in (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ ve $(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft $T_2-$ uzayı olduğundan

$$\exists\ (F_\alpha,E_\alpha),(G_\alpha,E_\alpha) \in \tau_\alpha\ ;\ x^\alpha_{e_\alpha} \in (F_\alpha,E_\alpha), \left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)\left(x^\beta_{e_\beta}\right) \in (G_\alpha,E_\alpha) \text{ ve}$$
$$(F_\alpha,E_\alpha) \cap G_\alpha, E_\alpha = \Phi$$

elde edilir. $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim \underline{E_\alpha}$ uzayında $(X_\alpha,E_\alpha)$ nın yerine $(F_\alpha,E_\alpha)$ soft kümesini, $(X_\beta,E_\beta)$ nın yerine $\left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)^{-1}(G_\alpha,E_\alpha)$ kümesini yazalım.

O halde $(F_\alpha,E_\alpha) \times \left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)^{-1}(G_\alpha,E_\alpha) \times \prod_{\gamma\neq\alpha,\beta}\left(X_\gamma,\tau_\gamma,E_\gamma\right)$ soft kümesi $x_e$ soft noktasının bir soft komşuluğudur ve $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ arakesiti boş soft kümesidir. Böylece

$$x_e \in (F_\alpha,E_\alpha) \times \left(p^\beta_\alpha, q^\beta_\alpha\right)^{-1}(G_\alpha,E_\alpha) \times \prod_{\gamma\neq\alpha,\beta}\left(X_\gamma,\tau_\gamma,E_\gamma\right) \subset \prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$$

dir, yani $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft açıktır ve $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft kapalı kümedir.

**Teorem 3.9.** $(\underline{X},\underline{E}) = \left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\in A}\ ,\ \left\{\left(p^{\alpha'}_\alpha, q^{\alpha'}_\alpha\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ boş olmayan soft kompakt $T_2-$ uzayların ters sistemi ise $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ boş olmayan soft kümedir ve soft kompakttır.

**İspat.** Soft kompakt uzayların çarpımı $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft kompakttır. $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim E_\alpha$ uzayıda soft kompakttır. Lemma 3.8. den $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft kümesi $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim E_\alpha$ uzayında soft kapalıdır. Soft kompakt uzayın soft kapalı kümesi soft kompakt olduğundan $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft kompakttır.

Şimdi $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ uzayının boş olmadığını gösterelim. Her β ∈ A için

$$\left(Y_\beta,\prod(E_\alpha)\right)=\left\{\{x^\alpha_{e_\alpha}\}\in\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,E_\alpha):\forall\,\gamma<\beta\ için\ \left(p^\beta_\gamma,q^\beta_\gamma\right)\left(x^\beta_{e_\beta}\right)=x^\gamma_{e_\gamma}\right\}$$

Bu soft küme boş olmayan soft kümedir. Gerçekten $(X_\beta,\tau_\beta,E_\beta)$ uzayında keyfi $z^\beta_{e_\beta}\in(X_\beta,\tau_\beta,E_\beta)$ soft noktasını alalım ve her $\gamma<\beta$ için $z^\gamma_{e_\gamma}=\left(p^\beta_\gamma,q^\beta_\gamma\right)(z)$ , diğer $\sigma\in$ A indisleri için $z^\sigma_{e_\sigma}$ keyfi soft noktalar olsun. O halde $z_e=\{z^\alpha_{e_\alpha}\}$ soft noktası $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ soft kümesine aittir. Lemma 3.8. de olduğu gibi $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ soft kümesinin soft kapalı olduğu gösterilebilir. Açıktır ki her $\alpha<\beta$ için $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)\subset\left(Y_\alpha,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ dır. O halde $\left\{Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right\}$ ailesi $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ uzayında merkezleşmiş soft kapalı kümeler ailesidir ve bu uzay soft kompakt olduğundan $\cap\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)\neq\Phi$ dir. Bu arakesitin noktaları $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ olduğundan

$$\varprojlim(\underline{X},\underline{E})\neq\Phi.$$

**Teorem 3.10.** $(\underline{X},\underline{E})=\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}\ ,\ \{(p^{\alpha'}_\alpha,q^{\alpha'}_\alpha)\}_{\alpha<\alpha'}\right)$, $(\underline{Y},\underline{E'})=\left(\{(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\ ,\ \left\{\left(r^{\beta'}_\beta,\gamma^{\beta'}_\beta\right)\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sistemleri, $\left(\underline{f},\underline{g}\right)=\left(\varphi:B\longrightarrow A,\{(f_\beta,g_\beta):(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)})\longrightarrow(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ de ters sistemlerin soft dönüşümü olsun. Eğer her $\beta\epsilon$B için $(f_\beta,g_\beta):(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)})\longrightarrow(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)$ bir soft homeomorfizma ise $\varprojlim\left(\underline{f},\underline{g}\right):\varprojlim(\underline{X},\underline{E})\longrightarrow\varprojlim(\underline{Y},\underline{E'})$ de bir soft homeomorfizmadır.

**İspat.** Önce $\varprojlim\left(\underline{f},\underline{g}\right)$ soft dönüşümün birebir olduğunu gösterelim.

$x_e=\{x^\alpha_{e_\alpha}\},y_{\bar{e}}=\{y^\alpha_{\bar{e}_\alpha}\}\in\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ , $x_e\neq y_{\bar{e}}$ olsun. $x_e\neq y_{\bar{e}}$ olduğundan $x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}}\neq y^{\alpha_0}_{\bar{e}_{\alpha_0}}$ sağlanacak biçimde $\alpha_0\in$ A vardır. $\varphi(\beta)>\alpha_0$ koşulu altında $\beta\epsilon$B seçelim. $\left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0},q^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}\right)\left(x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}}\right)=x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}}\neq y^{\alpha_0}_{\bar{e}_{\alpha_0}}=\left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0},q^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}\right)\left(y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ olduğu için $x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}}\neq y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}$ dir. $(f_\beta,g_\beta)$ soft dönüşümü birebir olduğundan $(f_\beta,g_\beta)\left(x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}}\right)\neq(f_\beta,g_\beta)\left(y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ ve böylece $\varprojlim\left(\underline{f},\underline{g}\right)$ soft dönüşümü birebirdir.

Şimdi $\varprojlim\left(\underline{f},\underline{g}\right)$ soft dönüşümün örten olduğunu gösterelim.

$y_{e'} = \left\{y^{\beta}_{e'_{\beta}}\right\} \in \varprojlim(\underline{Y}, \underline{E'})$ keyfi eleman olsun.

$(f_\beta, g_\beta): (X_{\varphi(\beta)}, \tau_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) \longrightarrow (Y_\beta, \tau'_\beta, E'_\beta)$ soft dönüşümü örten olduğundan $(f_\beta, g_\beta)\left(z^{\varphi(\beta)}_{\overline{e}_{\varphi(\beta)}}\right) = y^{\beta}_{e'_{\beta}}$ sağlanacak şekilde $z^{\varphi(\beta)}_{\overline{e}_{\varphi(\beta)}}$ soft noktası bulunabilir. Her $\alpha \in A$ için $\varphi(\beta) > \alpha$ koşulunu sağlayan $\beta \epsilon B$ elemanını alalım ve $x^{\alpha}_{e_\alpha} = \left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha}, q^{\varphi(\beta)}_{\alpha}\right)\left(z^{\varphi(\beta)}_{\overline{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ olsun.

$x^{\alpha}_{e_\alpha}$ soft noktası $\beta \epsilon B$ elemanından bağımsızdır,

$x_e = \{x^{\alpha}_{e_\alpha}\} \in \varprojlim(\underline{X}, \underline{E})$ ve $\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)(x_e) = y_{e'}$ dir.

İspatı tamamlamak için $\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)$ soft dönüşümün soft açık olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için Teorem 3.5 den yararlanarak her $\beta \epsilon B$ ve her $(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) \in \tau_{\varphi(\beta)}$ soft kümesi için $(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)})^{-1}(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})$ soft kümesinin $\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)$ soft dönüşümü altında görüntüsünün soft açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\beta \epsilon B$ için

$$(f_\beta, g_\beta) \circ (\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}) = (\pi_\beta, q_\beta) \circ \varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)$$

olduğundan

$$(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)})^{-1}(f_\beta, g_\beta)^{-1} = \left[\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}(\pi_\beta, q_\beta)^{-1}$$

olur. $(f_\beta, g_\beta)(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) = (G_\beta, E'_\beta)$ olsun. $(f_\beta, g_\beta)$ soft homeomorfizma olduğundan

$$\begin{aligned}(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)})^{-1}(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) &= (\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)})^{-1}(f_\beta, g_\beta)^{-1}\left((f_\beta, g_\beta)(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})\right) \\ &= \left[\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}(\pi_\beta, q_\beta)^{-1}\left((f_\beta, g_\beta)(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})\right)\end{aligned}$$

dır. Buradan ise

$$\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\left[(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)})^{-1}(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})\right] =$$

$$= \varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right) \circ \left(\left[\varprojlim\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}(\pi_\beta, q_\beta)^{-1}(f_\beta, g_\beta)(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})\right)$$

dır. $(\pi_\beta, q_\beta)^{-1}(f_\beta, g_\beta)(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)})$ soft kümesi soft açıktır.

## Kaynaklar


**1.** Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., *Comput. Math. Appl.,* 59, 2010, 3458-3463.

**2.** Aktaş, H., Çağman, N., *Information Science,* 177, 2007, 2726-2735.

**3.** Aygünoglu, A., Aygün, H., *Neural Comput & Applic,* DOI: 10.1007/s00521-011-0722-3, 2011.

**4.** Bayramov, S., Gündüz (Aras), C., *İntern. Math. Forum,* 19(4), 2009, 897-918.

**5.** Bayramov, S., Gündüz (Aras), C., *ICMS,* Bolu, Turkey, 2010, 23-27.

**6.** Bayramov, S., Gündüz (Aras) C. and Yazar, M. İ., Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 4(2), 2012, 349-363.

**7.** Bayramov, S., Gündüz (Aras) C. and Öztürk, T. Y., *Lambert Academic Publishing,* 143 p, 2012, Deutscland, Germany.

**8.** Bayramov, S., *Lambert Academic Publishing,* 175 p, 2012, Deutscland, Germany.

**9.** Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., Comput. Math. Appl., 62, 2011, 351-358.

**10.** Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., *Comput. Math. Appl.,*56(10), 2008, 2621-2628.

**11.** Gündüz (Aras), C., Davvaz, B., *Utilitas Math.,* 81, 2010, 131-156.

**12.** Gündüz (Aras), C., Bayramov, S., *International Mathematical Forum,* 6(11), 2011, 517-527.

**13.** Gündüz (Aras), C., Bayramov, S., *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 2011, 2480-2486.

**14.** Gündüz (Aras), C., Bayramov, S., *Journal of Mathematics and System Science,* 2, 2013.

**15.** Gündüz (Aras), C., Bayramov, S., *TWMS Pure Appl. Math*. V5, 1, 2014, 66-79.

**16.** Hussain, S., Ahmad, B., *Comput. Math. Appl*., 62, 2011, 4058-4067.

**17.** Kharal, A., Ahmad, B., Mappings of soft classes, to appear in New Math. Nat. Comput.

**18.** Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A. R., *The Journal of Fuzzy Mathematics,* 9(3), 2001, 589-602.

**19.** Maji, P. K., Roy, A. R., Bismas, R., *Comput. Math. Appl.,* 44, 2002, 1077-1083.

**20.** Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A. R., *Comput. Math. Appl.,* 45, 2003, 555-562.

**21.** Min, W. K., *Comput. Math. Appl.,* 62, 2011, 3524-3528.

**22.** Molodtsov, D., *Comput. Math. Appl.,* 37, 1999, 19-31.

**23.** Roy, A. R., Maji, P. K., *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 203, 2007, 412-418.

**24.** Sabir, H., Bashir, A., *Comput. Math. Appl.,* 62, 2011, 4058-4067.

**25.** Shabir, M., Naz, M., *Comput. Math. Appl.,* 61, 2011, 1786-1799.

**26.** Qiu-Mei Sun, Zi-Liong Zhang, Jing Liu, *Lecture Notes in Comput. Sci*., 5009, 2008 403-409.

**27.** Zadeh, L. A., *Information and Control,* 8, 1965, 338-353.

**28.** Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min W. K. and Atmaca, S., Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3(2), 2012, 171-185.