BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
1(2), 114-121, 2012

BEU Journal of Science
1(2), 114-121, 2012

Araştırma Makalesi / Research Article

Aynı Dağılımlı Olmayan Kesilmiş Tesadüfî Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Bileşik Dağılım Fonksiyonu

Gökhan GÖKDERE*

Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Bingöl

Özet

Bu çalışmada, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları elde edilmiştir. Ayrıca bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlarda verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Kesilmiş Tesadüfî Değişkenler, Dağılım Fonksiyonu, Permanent.

Joint Distribution Functions of Order Statistics from Nonidentically Distributed Truncated Random Variables

Abstract

In this study, the distributions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed truncated continuous random variables are obtained. Moreover some results related to the distribution functions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed truncated continuous random variables are given.

Keywords: Order statistics, Truncated random variables, Distribution function, Permanent

1. Giriş

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır. Herhangi bir dağılıma sahip sürekli bir tesadüfî değişkenin tanım kümesi, her iki veya herhangi bir taraftan sınırlandırıldığında oluşan dağılıma esas dağılımın kesilmiş dağılımı denir. Kesilmiş örnekler, bilinen küçük ve/veya büyük gözlemlerin çıkarılmasından oluşan ana kütleden tesadüfî olarak seçilmiş gözlemlerden oluşur [1].

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir ana kütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar elde edilmiştir [2, 3, 4]. Ayrıca, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları elde edilmiştir [2]. Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir ana kütleden gelen sıralı istatistiklerin dağılımları için bazı bağıntılar verilmiştir [5]. Sürekli çok değişkenli tesadüfî değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistikleri tanımlanmıştır [6]. Permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları ifade edilmiştir [7, 8, 9].

Bu çalışmada, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılımları, farklı şekillerde ifade edilmiştir.

* Sorumlu yazar: g.g.gokdere@gmail.com

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde ilk olarak kullanılacak kavramlar tanıtılacaktır. Daha sonra bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonları ile ilgili teoremler verilecektir.

2.1. Kullanılan Kavramlar

$X_1, X_2,..., X_n$ tesadüfî değişkenlerinin dağılım fonksiyonları $F_1, F_2,..., F_n$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonları $f_1, f_2,..., f_n$ olsun. Bu tesadüfî değişkenlerin meydana gelme sırasına bakılmaksızın büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa bu tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistikleri, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ olarak ifade edilir. Herhangi bir x reel değeri için X_i 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_i(x) = P\{X_i \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt, \quad i = 1,2,...,n \tag{1}$$

eşitliği ile ifade edilir[10]. Ayrıca $0 < p < 1$ olmak üzere $F_i^{-1}(p) = \inf\{x : F_i(x) \ge p\}$ $= \sup\{x : F_i(x) < p\}$, $x \in R$ ifadesi genel anlamda F_i 'nin ters fonksiyonu olarak ifade edilebilir [4, 11, 12,13]. $\alpha(F_i)$ ve $w(F_i)$ sırasıyla, F_i ' nin soldaki ve sağdaki son noktalarını göstersin. O halde $\alpha(F_i) = \inf\{x : F_i(x) > 0\} = F_i^{-1}(0)$ ve $w(F_i) = \sup\{x : F_i(x) < 1\} = F_i^{-1}(1)$ ifadeleri yazılabilir [14].

X ' in her iki taraftan kesilmiş dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $\alpha({}_{uv}F_i) = u_i$ ve $w({}_{uv}F_i) = v_i$ olmak üzere

$${}_{uv}f_i(x) = \frac{f_i(x)}{F_i(v_i) - F_i(u_i)} \tag{2}$$

olarak ifade edilebilir. (1) ve (2)'den X ' in her iki taraftan kesilmiş dağılımının dağılım fonksiyonu,

$${}_{uv}F_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i(u_i)}{F_i(v_i) - F_i(u_i)}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, bağımsız ve aynı dağılımlı kesilmiş sürekli bir ana kütleden gelen $X_1^s, X_2^s,..., X_n^s$ 'nin dağılım fonksiyonu ${}_{uv}F^s$,

$${}_{uv}F^s = \frac{1}{n_s}\sum_{i \in s} {}_{uv}F_i \tag{3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada s, {1,2,…,n} tamsayılarının bir altkümesi olmak üzere n_s s'nin eleman sayısını göstermektedir. Ayrıca $A = [\underset{i_1}{a_1} \;\; \underset{i_2}{a_2} \; ...]$ ifadesi $a_1, a_2,...$ kolon vektörleri olmak üzere, a_1 'in i_1 defa, a_2 'nin i_2 defa alınması ile oluşturulan matrisi ve $[\,A\,][s/\cdot)$ ifadesi de $s \subset N$ olmak üzere, indisleri s'de olan satırların alınması ile A'dan oluşturulan matrisi göstermektedir. Ayrıca $A = [\underset{i_1}{a_1} \;\; \underset{i_2}{a_2} \; ...]$ matrisinin permanenti Per(A) ile gösterilir ve permanent, açılımındaki bütün terimlerin işaretlerinin pozitif olması hariç determinant ile aynıdır.

2.2. Teoremler

Bu kısımda, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki teoremler verilecektir [15].

Teorem 2.2.1.

$$ {}_{uv}F_{r_1,r_2,\dots,r_d:n}(x_1,x_2,\dots,x_d)=\sum_{m_d,\dots,m_2,m_1}^{n,\dots,m_3,m_2} C \sum_{t_d,\dots,t_2,t_1}^{n,\dots,m_3,m_2}(-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)}\prod_{w=1}^{d}\binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} $$

$$.\sum_{n_s=n-t_d+m_d}(t_d-m_d)!\sum_{n_{s_1},n_{s_2},\dots,n_{s_{d-1}}}\prod_{w=1}^{d} per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_w)}_{m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1}}][s_w/.) \ . \tag{4} $$

Burada, $\sum\limits_{m_d,\dots,m_2,m_1}^{n,\dots,m_3,m_2}=\sum\limits_{m_d=r_d}^{n}\dots\sum\limits_{m_2=r_2}^{m_3}\sum\limits_{m_1=r_1}^{m_2}$, $\sum\limits_{t_d,\dots,t_2,t_1}^{n,\dots,m_3,m_2}=\sum\limits_{t_d=m_d}^{n}\dots\sum\limits_{t_2=m_2}^{m_3}\sum\limits_{t_1=m_1}^{m_2}$, ${}_{uv}\mathrm{F}(x_w)=({}_{uv}F_1(x_w),{}_{uv}F_2(x_w),\dots,{}_{uv}F_n(x_w))'$ (w=1, 2, … , d+1) kolon vektörlerini ve $\sum\limits_{n_{s_1},n_{s_2},\dots,n_{s_{d-1}}}$, $\upsilon\neq v$ için $s_\upsilon\bigcap s_v=\phi$ olmak üzere $\bigcup\limits_{w=1}^{d-1}s_w$ üzerinden toplamı ifade etmektedir. Ayrıca, $s=\bigcup\limits_{w=1}^{d}s_w$, $n_{s_w}=m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1}$ ve $t_0=m_1$ 'dır.

İspat.

$$ {}_{uv}F_{r_1,r_2,\dots,r_d:n}(x_1,x_2,\dots,x_d)=P\{X_{r_1:n}\le x_1,X_{r_2:n}\le x_2,\dots,X_{r_d:n}\le x_d\} \tag{5} $$

eşitliği yazılabilir. (5),

$$ {}_{uv}F_{r_1,r_2,\dots,r_d:n}(x_1,x_2,\dots,x_d)=\sum_{m_d,\dots,m_2,m_1}^{n,\dots,m_3,m_2} C\,per\mathrm{A} \tag{6} $$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; $\mathrm{A}=[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)-{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-m_1}\dots\underbrace{1-{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_d}]$ karesel bir matris, ${}_{uv}\mathrm{F}(x_w)-{}_{uv}\mathrm{F}(x_{w-1})=({}_{uv}F_1(x_w)-{}_{uv}F_1(x_{w-1}),{}_{uv}F_2(x_w)-{}_{uv}F_2(x_{w-1}),\dots,{}_{uv}F_n(x_w)-{}_{uv}F_n(x_{w-1}))'$ kolon vektörü, ${}_{uv}F_i(x_0)=0$ ve ${}_{uv}F_i(x_{d+1})=1$'dir.

Permanentin özelliklerinden,

$$ per\mathrm{A}=per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)-{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-m_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_3)-{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)}_{m_3-m_2}\ \dots\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)-{}_{uv}\mathrm{F}(x_{d-1})}_{m_d-m_{d-1}}\ \underbrace{1-{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_d}] $$

$$ =\sum_{t_d=0}^{n-m_d}(-1)^{n-m_d-t_d}\binom{n-m_d}{t_d}\dots\sum_{t_2=0}^{m_3-m_2}(-1)^{m_3-m_2-t_2}\binom{m_3-m_2}{t_2}\sum_{t_1=0}^{m_2-m_1}(-1)^{m_2-m_1-t_1}\binom{m_2-m_1}{t_1} $$

$$.\,per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-t_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)}_{m_3-m_2-t_2+t_1}\ \dots\ \underbrace{1}_{t_d}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_d-t_d+t_{d-1}}] $$

$$ =\sum_{t_d=0}^{n-m_d}\dots\sum_{t_2=0}^{m_3-m_2}\sum_{t_1=0}^{m_2-m_1}(-1)^{n-m_1-\sum_{w=1}^{d}t_w}\prod_{w=1}^{d}\binom{m_{w+1}-m_w}{t_w}\sum_{n_s=n-t_d}t_d! $$

$$.\,per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-t_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)}_{m_3-m_2-t_2+t_1}\ \dots\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_d-t_d+t_{d-1}}\ ][s/.) $$

$$ =\sum_{t_d=m_d}^{n}\dots\sum_{t_2=m_2}^{m_3}\sum_{t_1=m_1}^{m_2}(-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)}\prod_{w=1}^{d}\binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w}\sum_{n_s=n-t_d+m_d}(t_d-m_d)! $$

$$.\,per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-t_1+m_1}\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)}_{m_3-m_1-t_2+t_1}\ \dots\ \underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_d-t_d+t_{d-1}}\ ][s/.) $$

$$= \sum_{t_d=m_d}^{n} \cdots \sum_{t_2=m_2}^{m_3} \sum_{t_1=m_1}^{m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^{d} \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1},n_{s_2},\ldots,n_{s_{d-1}}}$$

$$.\, per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_1)}_{m_2-t_1+m_1}][s_1/.)\, per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_2)}_{m_3-m_1-t_2+t_1}][s_2/.) \ldots per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_d)}_{n-m_{d-1}-t_d+t_{d-1}}][s_d/.)$$

$$= \sum_{t_d,\ldots,t_2,t_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^{d} \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1},n_{s_2},\ldots,n_{s_{d-1}}}$$

$$.\, \prod_{w=1}^{d} per[\underbrace{{}_{uv}\mathrm{F}(x_w)}_{m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1}}][s_w/.) \tag{7}$$

yazılabilir. Burada, $1=(1,1,\ldots,1)'$ kolon vektörüdür. (7), (6)'da yerine yazılırsa (4) elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur. Yukarıdaki teoremde; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerden elde edilmiş olan $X_{r_1:n}, X_{r_2:n},\ldots,X_{r_d:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir. Teorem 2.2.1.'de, permanentin özellikleri kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.2.

$${}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d) = \sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} C \sum_{t_d,\ldots,t_2,t_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^{d} \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w}$$

$$.\, \sum_{n_s=n-t_d+m_d} (t_d-m_d)! \sum_{n_{s_1},n_{s_2},\ldots,n_{s_{d-1}}} \prod_{w=1}^{d} n_{s_w}! \prod_{l=1}^{n_{s_w}} {}_{uv}F_{s_w^l}(x_w)\,. \tag{8}$$

Burada, $s_w=\{s_w^1,s_w^2,\ldots,s_w^{n_{s_w}}\}$'dir. Teorem 2.2.2'de, (3) kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.3.

$${}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d) = \sum\sum \sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} n!\, C$$

$$.\, \sum_{t_d,\ldots,t_2,t_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} (-1)^{\sum_{w=1}^{d}(m_{w+1}-t_w)} \prod_{w=1}^{d} \binom{m_{w+1}-m_w}{t_w-m_w} [{}_{uv}F^{s}(x_w)]^{m_{w+1}-m_{w-1}-t_w+t_{w-1}}\,. \tag{9}$$

Burada, $\sum\sum = \sum_{\kappa=1}^{n} (-1)^{n-\kappa} \frac{\kappa^n}{n!} \sum_{n_s=\kappa}$ 'dir.

İspat. (5),

$${}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d) = \sum\sum P\{X^s_{r_1:n}\le x_1,\, X^s_{r_2:n}\le x_2,\ldots,\, X^s_{r_d:n}\le x_d\} \tag{10}$$

şeklinde ifade edilebilir. (9), (8) ve (10)'dan elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.1'de, permanent açılımı kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.4.

$$
{}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} C\sum_{P}\prod_{l=1}^{m_1}{}_{uv}F_{j_l}(x_1)\prod_{w=2}^{d+1}\sum_{t=m_{w-1}}^{m_w}(-1)^{m_w-t}
$$

$$
\cdot\sum_{\substack{n_\tau=t-m_{w-1}\\ n_{\tau'}=m_w-t}}\prod_{l=1}^{t-m_{w-1}}{}_{uv}F_{\tau_l}(x_w)\prod_{l=1}^{m_w-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1})\,. \tag{11}
$$

Burada; $\tau=\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{t-m_{w-1}}\}$, $\tau'=\{\tau'_1,\tau'_2,\ldots,\tau'_{m_w-t}\}$, $\tau\cap\tau'=\phi$, $\tau\cup\tau'=\{j_{m_{w-1}+1},j_{m_{w-1}+2},\ldots,j_{m_w}\}$ ve ${}_{uv}F_{j_l}(x_{d+1})=1$'dir.

İspat.

$$
{}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} C\sum_{P}\prod_{l=1}^{m_1}{}_{uv}F_{j_l}(x_1)\prod_{l=m_1+1}^{m_2}[{}_{uv}F_{j_l}(x_2)-{}_{uv}F_{j_l}(x_1)]\ldots\prod_{l=m_d+1}^{n}[1-{}_{uv}F_{j_l}(x_d)]
$$

$$
=\sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} C\sum_{P}\prod_{l=1}^{m_1}{}_{uv}F_{j_l}(x_1)\prod_{w=2}^{d+1}\prod_{l=m_{w-1}+1}^{m_w}[{}_{uv}F_{j_l}(x_w)-{}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})] \tag{12}
$$

ifadesi yazılabilir. Burada, ${}_{uv}F_{j_l}(x_0)=0$'dir.

Şimdi,

$$
\prod_{l=m_{w-1}+1}^{m_w}[{}_{uv}F_{j_l}(x_w)-{}_{uv}F_{j_l}(x_{w-1})]=\sum_{t=m_{w-1}}^{m_w}(-1)^{m_w-t}\sum_{\substack{n_\tau=t-m_{w-1}\\ n_{\tau'}=m_w-t}}\prod_{l=1}^{t-m_{w-1}}{}_{uv}F_{\tau_l}(x_w)\prod_{l=1}^{m_w-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1}) \tag{13}
$$

eşitliğini göz önüne alalım. (13), (12)'de yerine yazılırsa (11) elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanmış olur. Teorem 2.2.4. aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.2.5.

$$
{}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2} C^{-1}\sum_{{}_CP_{m_d,\ldots,m_2,m_1}}\prod_{l=1}^{m_1}{}_{uv}F_{j_l}(x_1)\prod_{w=2}^{d+1}\sum_{t=m_{w-1}}^{m_w}(-1)^{m_w-t}
$$

$$
\cdot\sum_{\substack{n_\tau=t-m_{w-1}\\ n_{\tau'}=m_w-t}}\prod_{l=1}^{t-m_{w-1}}{}_{uv}F_{\tau_l}(x_w)\prod_{l=1}^{m_w-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1})\,. \tag{14}
$$

Burada, $\sum_{{}_CP_{m_d,\ldots,m_2,m_1}}$, $j_1<j_2<\ldots<j_{m_1}, j_{m_1+1}<j_{m_1+2}<\ldots<j_{m_2},\ldots,j_{m_d+1}<j_{m_d+2}<\ldots<j_n$, olmak üzere, $(1,2,\ldots,n)$'nin bütün $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir. Teorem 2.2.4. aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Teorem 2.2.6.

$$
{}_{uv}F_{r_1,r_2,\ldots,r_d:n}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\sum_{m_d,\ldots,m_2,m_1}^{n,\ldots,m_3,m_2}(n-m_d)!\sum_{P_{m_d}}\prod_{l=1}^{m_1}{}_{uv}F_{j_l}(x_1)\prod_{w=2}^{d+1}\sum_{t=m_{w-1}}^{m_w}(-1)^{m_w-t}
$$

$$
\cdot\sum_{\substack{n_\tau=t-m_{w-1}\\ n_{\tau'}=m_w-t}}\prod_{l=1}^{t-m_{w-1}}{}_{uv}F_{\tau_l}(x_w)\prod_{l=1}^{m_w-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x_{w-1})\,. \tag{15}
$$

Burada, $\sum_{P_{m_d}}$,(1, 2,…, n)'nin bütün $(j_1, j_2, ..., j_{m_d})$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir.

Teorem 2.2.4.'de, (3) kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

$$
{}_{uv}F_{r_1,r_2,...,r_d:n}(x_1, x_2, ..., x_d) = \sum\sum\sum_{m_d,...,m_2,m_1}^{n,...,m_3,m_2} n!C\,[{}_{uv}F^s(x_1)]^{m_1}
$$

$$
\cdot \prod_{w=2}^{d+1}\sum_{t=m_{w-1}}^{m_w}(-1)^{m_w-t}\binom{m_w-m_{w-1}}{t-m_{w-1}}[{}_{uv}F^s(x_w)]^{t-m_{w-1}}[{}_{uv}F^s(x_{w-1})]^{m_w-t} \; . \tag{16}
$$

Burada, ${}_{uv}F^s(x_{d+1}) = 1$' dir.

İspat. (16), (11) ve (10)'dan elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

3. Sonuçlar

Bu bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfî değişkenlerin r. sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.1.

$$
\begin{aligned}
{}_{uv}F_{r:n}(x) &= \sum_{m=r}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n-m}{t-m}\sum_{n_s=n-t+m}(t-m)!\,per[{}_{uv}\mathrm{F}(x)][s/.)_{n-t+m} \\
&= \sum_{m=r}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n-m}{t-m}\sum_{n_s=n-t+m}(t-m)!\,(n-t+m)!\prod_{l=1}^{n-t+m}{}_{uv}F_{s^l}(x) \\
&= \sum\sum\sum_{m=r}^{n}\binom{n}{m}\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n-m}{t-m}[{}_{uv}F^s(x)]^{n-t+m} \\
&= \sum_{m=r}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}\sum_{P}\prod_{l=1}^{m}{}_{uv}F_{j_l}(x)\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x) \\
&= \sum_{m=r}^{n}m!(n-m)!\sum_{{}_CP_m}\prod_{l=1}^{m}{}_{uv}F_{j_l}(x)\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x) \\
&= \sum_{m=r}^{n}(n-m)!\sum_{P_m}\prod_{l=1}^{m}{}_{uv}F_{j_l}(x)\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t}{}_{uv}F_{\tau'_l}(x) \\
&= \sum\sum\sum_{m=r}^{n}\binom{n}{m}[{}_{uv}F^s(x)]^{m}\sum_{t=m}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n-m}{t-m}[{}_{uv}F^s(x)]^{n-t} \; .
\end{aligned} \tag{17}
$$

İspat. (4), (8), (9), (11), (14), (15) ve (16)'da $d = 1$ alınırsa, (17) elde edilir.

Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.3'de; aynı dağılımlı olmayan kesilmiş sürekli tesadüfi değişkenlerin sırasıyla, minimum ve maksimumunun dağılım fonksiyonları verilecektir.

Sonuç 3.2.

$$ {}_{uv}F_{1:n}(x) = 1 - \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n}{t}\sum_{n_s=n-t} t!\, per[{}_{uv}\underset{n-t}{\mathrm{F}(x)}][s/.) $$

$$ = 1 - \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n}{t}\sum_{n_s=n-t} t!\,(n-t)!\prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{s^l}(x) $$

$$ = \sum\sum\{1 - \sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\binom{n}{t}[{}_{uv}F^{s}(x)]^{n-t}\} $$

$$ = 1 - \frac{1}{n!}\sum_{P}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x) $$

$$ = 1 - n!\sum_{{}_C P_0}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x) $$

$$ = 1 - n!\sum_{P_0}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\sum_{n_{\tau'}=n-t}\prod_{l=1}^{n-t} {}_{uv}F_{\tau'_l}(x)\,. \tag{18} $$

İspat. (17) de $r = 1$ alınırsa, (18) elde edilir.

Sonuç 3.3.

$$ {}_{uv}F_{n:n}(x) = \frac{1}{n!}\, per[{}_{uv}\underset{n}{\mathrm{F}(x)}] $$

$$ = \prod_{l=1}^{n} {}_{uv}F_l(x) $$

$$ = \sum\sum[{}_{uv}F^{s}(x)]^{n} $$

$$ = \frac{1}{n!}\sum_{P}\prod_{l=1}^{n} {}_{uv}F_{j_l}(x) $$

$$ = n!\sum_{{}_C P_n}\prod_{l=1}^{n} {}_{uv}F_{j_l}(x) $$

$$ = \sum_{P_n}\prod_{l=1}^{n} {}_{uv}F_{j_l}(x)\,. \tag{19} $$

İspat. (17) de $r = n$ alınırsa, (19) elde edilir.

Kaynaklar

1. Bayazıt, M. , Oğuz, B. 1998. *Probability and statistics for engineers*, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul.
2. Arnold, B. C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H. N. 1992. *A first course in order statistics*, John Wiley and Sons Inc., New York.
3. David, H. A. 1981. *Order statistics*, John Wiley and Sons Inc., New York.
4. Reiss, R. D. 1989. *Approximate distributions of order statistics*, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
5. Cao, G., West, M. 1997. Computing distributions of order statistics, Communications in Statistics Theory and Methods, 26: 755-764.
6. Corley, H. W. 1984. Multivariate order statistics, Commun. Statist.- Theor. Meth., 13: 1299-1304.
7. Vaughan, R. J., Venables, W. N. 1972. Permanent expressions for order statistics densities, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 34: 308-310.
8. Balakrishnan, N. 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, Rev. Mat. Complut., 20: 7-107.
9. Bapat, R. B., Beg, M. I. 1989. Order statistics for nonidentically distributed variables and permanents, Sankhyā, Ser. A, 51: 79-93.
10. Akdeniz, F. 2002. *Olasılık ve istatistik*, Baki Kitabevi, Adana.
11. Balakrishnan, N., Cohen, A. C. 1991. *Order statistics and inference*, Academic Press, Inc., San Diego.
12. Kamps, U. 1995. *A concept of generalized order statistics*, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
13. Serfling, R. J. 1980. *Approximation theorems of mathematical statistics*, John Wiley and Sons, Inc., Canada.
14. Galambos, J. 1987. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, Florida.
15. Gökdere, G. 2010. Aynı Dağılımlı Olmayan Kesilmiş Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 30s, Elazığ.