FELSEFE DÜNYASI
The Philosophy World
Sayı/Issue: 80 (Kış/Winter 2024)
ISSN 1301-0875 - eISSN 2822-2970

Dizinlenme Bilgileri/Indexed by
ULAKBİM TR Dizin (2003'dan itibaren/since 2003)
Philosopher's Index (2004'dan itibaren/since 2004)
ERIH PLUS (2023'den itibaren/since 2023)
PhilPapers (2023'dan itibaren/since 2023)

Felsefe Dünyası uluslararası, süreli ve hakemli bir dergidir; yılda iki sayı yayımlanır; elektronik versiyonu, açık erişimlidir.
Derginin online versiyonu ücretsizdir.
The Philosophy World is an international, periodical biannually, and peer-reviewed journal; its digital version is open access.
The online version of the journal is free of charge.

Fiyatı/Price: 300 TL | **Basım Tarihi/Publication Date:** Aralık/December 2024, 300 Adet/Copies

---

Adres/Adress

Necatibey Caddesi No: 8/122 Çankaya/ANKARA
Tel: 0 (312) 231 54 40
https://dergipark.org.tr/tr/pub/felsefedunyasi

Hesap No / Account No: Vakıf Bank Kızılay Şubesi
IBAN: TR82 0001 5001 5800 7288 3364 51

Tasarım / Design: Turku Ajans

Baskı / Printed: Uzun Dijital
Zübeyde Hanım, İstanbul Çarşısı, İstanbul Cd. No:48 D:48,
06070 Altındağ/Ankara
Tel: (0312) 341 36 67 | **Sertifika No:** 47865

Geometrinin Temellendirilmesinde Frege – Hilbert İhtilafının Kökenleri

Şeyma Nur Tan
https://orcid.org/0000-0002-8993-1316 | tans20@29mayis.edu.tr
İstanbul 29 Mayıs Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Doktora Programı, İstanbul Türkiye
https://ror.org/014bh1q35

Öz

Frege ve Hilbert arasında 19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarında geometrinin temellendirilmesi üzerine gerçekleşmiş olan yazışmalar, ikili arasındaki geometri aksiyomlarının statüsüne yönelik farklı fikirleri ortaya koymaktadır. Hilbert, geometriyi aksiyomatize ederken, olanak açısından bir tür uzay görüsünden bahsetse dahi, dizgesinde mantıksal-olmayan terimleri salt şematik terimler olarak ele almış ve konu-nötr olarak gördüğü mantıksal çıkarımı, sentaktik tutarlılığa indirgemiştir. Frege ise geometrinin temelleri ve aksiyomatik dizgelerin tutarlılık ve bağımsızlıklarına yönelik meta-teoretik yaklaşımlar söz konusu olduğunda, semantiğin sızmadığı salt sentaktik yaklaşımları yetersiz bulduğu için Hilbert'e çeşitli itirazlar yöneltmiştir. Bu çalışmada, ihtilafın aksiyomatik dizgelerin doğasına yönelik anlaşmazlık ve tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarının metodolojisine yönelik anlaşmazlık olarak iki ana başlıkta yoğunlaştığı ve temelde ikilinin geometrinin nesnesi ve görü arasındaki ilişkiye yönelik farklı tutumlarının bu duruma sebep olduğu iddia edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Geometri, Görü, Aksiyomatizasyon, Mantıksal Çıkarım, Tutarlılık ve Bağımsızlık Kanıtları, Konu-Nötr.

Atıf Bilgisi Tan, Şeyma Nur (2024). Geometrinin temellendirilmesinde Frege – Hilbert ihtilafının kökenleri. *Felsefe Dünyası, 80*, 70-97. https://doi.org/10.58634/felsefedunyasi.1542606	
Geliş Tarihi	03.09.2024
Kabul Tarihi	06.12.2024
Yayım Tarihi	15.12.2024
Değerlendirme	İki Dış Hakem / Çift Taraflı Körleme
Etik Beyan	Bu çalışmanın hazırlanma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyulduğu ve yararlanılan tüm çalışmaların kaynakçada belirtildiği beyan olunur.
Benzerlik Taraması	Yapıldı – intihal.net
Çıkar Çatışması	Çıkar çatışması beyan edilmemiştir.
Etik Bildirim	turkfelsefeder@gmail.com
Finansman	Bu araştırmayı desteklemek için dış fon kullanılmamıştır.
Telif Hakkı & Lisans	Yazarlar dergide yayınlanan çalışmalarının telif hakkına sahiptirler ve çalışmaları CC BY-NC 4.0 lisansı altında yayımlanmaktadır.

The Origins of the Frege - Hilbert Controversy in the Foundations of Geometry

Şeyma Nur Tan
https://orcid.org/0000-0002-8993-1316 | tans20@29mayis.edu.tr
İstanbul 29 Mayıs University, Institute of Social Sciences, Doctoral Program in Philosophy, İstanbul, Türkiye
https://ror.org/014bh1q35

Abstract

The correspondence between Frege and Hilbert on the grounding of geometry in the early twentieth century reveals their different ideas about the status of the axioms of geometry. Although Hilbert mentions space intuition as a ground of geometry, he treated the non-logical terms in his system as purely schematic terms and reduced logical deduction, which he considered topic-neutral, to syntactic consistency. On the other hand, Frege raised various objections to Hilbert on his foundations of geometry and metatheoretic approaches to the consistency and independence of axiomatic systems, as he found purely syntactic approaches without semantics to be insufficient. Analyzing the correspondence between the two, it will be argued that the dispute centers on two main topics: disagreement over the nature of axiomatic systems and disagreement over the methodology of consistency and independence proofs, and that at the root are different attitudes towards the relation between the object of geometry and intuition.

Keywords: Geometry, Intuition, Axiomatization, Logical Deduction, Consistency and Independence Proofs, Topic-Neutral.

Citation Tan, Şeyma Nur (2024). Geometrinin temellendirilmesinde Frege – Hilbert ihtilafının kökenleri. *Felsefe Dünyası, 80,* 70-97. https://doi.org/10.58634/felsefedunyasi.1542606	
Date of Submission	03.09.2024
Date of Acceptance	06.12.2024
Date of Publication	15.12.2024
Peer-Review	Double anonymized - Two External
Ethical Statement	It is declared that scientific and ethical principles have been followed while carrying out and writing this study and that all the sources used have been properly cited.
Plagiarism Checks	Yes – intihal.net
Conflicts of Interest	The author(s) has no conflict of interest to declare.
Complaints	turkfelsefeder@gmail.com
Grant Support	The author(s) acknowledge that they received no external funding in support of this research.
Copyright & License	Authors publishing with the journal retain the copyright to their work licensed under the CC BY-NC 4.0.

Giriş

18. ve 19. yüzyıllar hem geometri hem de aritmetik açısından köklü değişimlerin yaşandığı bir döneme işaret eder. Bu dönemde Cantor ve Dedekind gibi matematikçilerin çalışmaları ile küme kuramı kısa bir süre içerisinde olağanüstü bir gelişim göstermiştir. Cantor çalışmalarında, kümelerin eşlenikliği fikrinden yola çıkarak farklı sayallara sahip sonsuzlukların olduğunu ortaya koymuş ve "sonluötesi" (Transfinite) sayılar kavramına dayanan bir dizge geliştirmiştir (Hilbert, 1967, s. 374-375). Cantor'un bu çalışmaları, daha sonra Frege ve Dedekind'ın katkılarıyla genişletilmiş ve küme kuramı matematiğe açtığı yeni kapılardan ötürü modern dönemin başında çok önemli bir yere oturmuştur. Bununla beraber, küme kuramında kümelerin oluşmasına dair herhangi bir kısıtlayıcı koşuldan söz edilmemesi, Russell'ın ifade ettiği "kendini içermeyen kümelerin kümesi"nin, kendisini bir eleman olarak içerip içermemesi örneğinde olduğu gibi çeşitli paradokslara yol açmıştır. (alıntılanan kaynak eklenmeli)

Yine bu dönemlerde, Öklidyen-olmayan geometrilerin Öklidyen geometri üzerinden göreli tutarlılık kanıtlarının gösterilmesi sonucunda ise, birbirleriyle çelişik ama kendi içlerinde tutarlı geometrilerin mümkün olduğu kanıtlanmıştır. Hem Russell paradoksu gibi paradokslarla küme teorisi üzerinden matematiğin temellerine dair şüphelerin gündeme gelmesi, hem de Öklidyen-olmayan geometrilerin göreli tutarlılık kanıtlarının verilmesinin bir uzantısı olarak geometrinin *a priori* doğruluğa sahip olduğu fikri sorgulanır hale gelmiştir. Bu gelişmelerin sonucunda matematiğin odak noktası, kendinde doğruluk fikrinden, tutarlılık ve kanıtlanabilirlik fikrine kaymış, bu durum ise Hilbert programında olduğu gibi matematiğe dair biçimselci anlayışların gelişmesine kaynaklık etmiştir.

Bu tartışmaların geometri alanındaki etkisi, Kant'ın *a priori* uzay görüsü fikrinin tartışmaya açılması olmuştur. Geometri alanında süregiden tartışmalardan Poincare ve Russell arasında yaşanan tartışmada, Poincare geometrik aksiyomların kılık değiştirmiş tanımlar (definition in disguise) olduğunu ve her türlü çelişkiden uzak olmak kaydı ile keyfî bir biçimde seçildiklerini savunmuştur (Poincare, 1964, s. 54). Poincare'ye göre, aksiyomlar itibarî oldukları için Öklidyen geometri ve Öklidyen-olmayan geometriler arasında hangisinin daha doğru olduğuna yönelik bir soru sormanın anlamı yoktur, yalnızca verili koşullar altında hangisinin daha kullanışlı olduğu sorgulanabilir. Russell'ın savunduğu "semantik atomizm" düşüncesine göre ise (Coffa, 1991, s. 130-134), aksiyomatik sistemlerin temelinde tanımlanması imkânsız ilkel terimler yer alır ve bu terimler aksiyomlardaki kullanımlarına öncel olacak bir anlama sahip oldukları için, geometrinin aksiyomları tarafından tanımlanamazlar.

Poincare ve Russell ihtilafına benzer bir çıkış noktasına sahip olan Frege-Hilbert ihtilafının tarihsel seyrini inceleyecek olursak, aralarındaki yazışmaların Hilbert'in *Geometri'nin Temelleri* (*Grundlagen der Geometrie*-1899) tarih kalabilir ama Almancası gerekli değil adlı eserinden de önceye gittiğini görürüz. Frege 1895'te, daha önce katıldıkları bir konferansta Hilbert'le yapmış oldukları ve kesintiye uğramış bir konuşmayı müteakiben, matematikteki formalizm üzerine bir yazışma başlatmıştır. Hilbert 1899'da *Geometri'nin Temelleri*'ni yazdıktan sonra ise Frege bunun hemen akabinde, Hilbert'e bu eseriyle alakalı yorumlarını iletmiş ve sistemine dair daha fazla açıklama yapması talebinde bulunmuştur (Sterrett, 1994, s. 2). Aralarındaki yazışma Hilbert'in Frege'ye yazdığı cevap ve bu cevap üzerine Frege'nin Hilbert'e yazdığı başka bir mektupla devam etmiş ve Frege, 1903'te Hilbert'in aksiyomatik dizgesi ile alakalı fikirlerini "Geometri'nin Temelleri Üzerine" başlıklı makalesinde tekrar düzenlemiştir. Frege'nin bu makalesine cevabı Alwin Korselt aynı başlıklı makalesinde, Hilbert'in çalışmasının saf biçimselci bir biçimde anlaşılması gerektiğini belirterek vermiştir. Son olarak Frege, 1906'da yayımladığı ve bir önceki makalesiyle aynı başlıklı ve onun ikinci parçası niteliğindeki makalesinde, Hilbert'in geometri aksiyomatizasyonuna dair eleştirilerini Korselt'in cevabını da içerisine alacak şekilde genişleterek ve ayrıntılarına girerek sürdürmüştür.

Modern matematiğin Hilbert ve Poincare çizgisini devam ettirip geliştirdiğini düşününce bu tartışmaların sonucu belli olmuş gibi gözükse de, ikililer arasında gerçekleşen yazışmalar dikkate alındığında, hala cevabı verilmemiş sorular olduğu görülebilir. Özü itibariyle Frege'nin aritmetiği mantığa indirgeme çalışmalarının devamı gibi görülebilecek olan Hilbert'in geometri aksiyomatizasyonunun neden Frege tarafından bu denli bir tepkiyle karşılandığını incelemek ve Frege düşüncesinde geometri ve aritmetik arasındaki farkı anlamlandırmak, geometrinin temellerine yönelik bir araştırma için önemlidir. Bu çalışmada, Frege ve Hilbert arasında yaşanan geometrinin statüsüne yönelik anlaşmazlık, Hilbert'in *Geometri'nin Temelleri* adlı eseri ve Frege'nin buna getirdiği itirazları içeren mektuplar ve makaleler bağlamında incelenecektir. Bu bağlamda, tartışmanın merkezinde iki düşünürün aksiyomatik sistemlerin doğası ve tutarlılık ile bağımsızlık kanıtlarının metodolojisine dair görüş farklılıklarının yer aldığı gösterilecek, bunun ise ikilinin görü ile geometrinin nesnesi olan uzay arasındaki ilişkiye dair farklı bakış açılarına sahip olmalarından kaynaklandığı savunulacaktır.

1. Geometrinin Yeniden Aksiyomatizasyonu

19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarında yaşanan matematiğe sağlam bir temel bulma çabaları arasında, özellikle David Hilbert'in 1920'lerde geliştirdiği Hilbert Programı, modern matematik anlayışının gelişimi açısından en etkili yaklaşımlardan biri olmuştur. Hilbert Programı'nın erken aşamalarında, mantıksal biçimselcilerin yaptığı aksiyomatik uygulamalar, programın gelişimine yön vermiş (Zach, T.y.: 1-2), tüm matematiği aksiyomatik bir yapı içinde düzenlemek ve bu aksiyomatik sistemin tutarlı olduğunu kanıtlamak programın amacı olmuştur (Zach, 2019). Bu tutarlılığın kanıtı ise Hilbert'in "sonlucu" (İng. finitary) yöntemi ile sağlanmalıdır. Hilbert'in aksiyomatizasyon metodu, analiz ve küme teorisi gibi alanları da kapsayan klasik matematiğe felsefî ve tatmin edici bir temel sağlamayı hedefler. Bu bağlamda, Hilbert'in *Geometri'nin Temelleri* eseri, aksiyomatik metodun kavramsallaştırılmasının gelişimini sunması itibariyle felsefî bir önem taşır.

Hilbert, bu eserinde geometrinin yeniden aksiyomatizasyonunu gerçekleştirirken, geometrinin öğelerini ve bunlara bağlı beş aksiyom grubunu açıklar (Hilbert, 1950, s. 2). Geometriyi şeylerin üçlü sistemi olarak ele alan Hilbert, ilk sistemin gibi harflerle ifade edilen noktalarla, ikinci sistemin gibi harflerle ifade edilen çizgilerle ve üçüncü sistemin gibi Yunan harfleriyle ifade edilen düzlemlerle tanımlandığını belirtir. Bu üçlü sistemde, noktalar doğrusal geometrinin, noktalar ve doğrular düzlemsel geometrinin, noktalar, doğrular ve düzlemler ise uzay geometrisinin öğeleridir. Hilbert'e göre, geometrinin bu öğeleri arasında "üzerinde", "arasında" ve "eş" gibi belirli karşılıklı ilişkiler bulunur ve bu ilişkilerin tam ve kesin tasviri geometrinin aksiyomlarının bir sonucudur.

Hilbert, geometrinin öğeleri arasındaki ilişkilerin aksiyomların belirlenmesiyle netleşeceğini ifade eder ve geometrinin aksiyomlarını çeşitli gruplar halinde sunar (Hilbert, 1950, s. 2-15). İlk grup, "birbirinden farklı iki A ve B noktası her zaman tam olarak bir doğru çizgiyi belirler" gibi aksiyomların bulunduğu ve geometrik öğeler arasındaki konumsal ilişkileri tanımlayan "Bağlantı Aksiyomları"dır. İkinci grup, "eğer A, B, C bir doğru çizginin noktaları ise ve B, A ile C'nin arasında yer alıyorsa, B aynı zamanda C ile A'nın da arasında yer almaktadır" gibi aksiyomlarla "Sıralama Aksiyomları" olarak adlandırılan, "arasında" terimini tanımlayan aksiyomlardan oluşur. Üçüncü grup, "Paralellik Aksiyomu" olarak bilinen, bir doğrunun dışında verilen bir noktadan geçen ve bu doğruyu kesmeyen tek bir doğru bulunabileceğini ifade eden aksiyomdur. Dördüncü grup ise "yer değiştirme" (İng. displacement) veya "eş olma" (congruence) kavramlarının taşıdığı düşünceyi içeren “Eşlik Aksiyomları” olarak adlandırılır. Son olarak, “süreklilik” fikrini temsil edecek şekilde, Hilbert’in “Süreklilik Aksiyomu” olarak tanımladığı ve Arşimet Aksiyomu’nu içeren aksiyom yer alır. Alıntılanan kaynağa sonda yer verilmeli

Hilbert, bu beş grup aksiyomun birbirleriyle çelişmediğini, yani mantıksal çıkarımlarla bu aksiyomlardan çelişkili önermeler türetmenin imkânsız olduğunu, reel sayılar üzerine inşa ettiği bir tutarlılık kanıtıyla gösterir. Aksiyomların kendi aralarındaki uyumluluğu (compatibility) gösterdikten sonra ise, “Paralel Aksiyomları’nın Bağımsızlığı”, “Eşlik Aksiyomları’nın Bağımsızlığı” ve Süreklilik Aksiyomu’nun Bağımsızlığı” bölümlerinde bu aksiyomların karşılıklı bağımsızlıklarını da gösterir (Hilbert, 1950, s. 19-22). Eserinin sonraki bölümleri ise geometrideki çeşitli teoremlerin ispatlarına ayrılmıştır.

Hilbert, Öklid’in aksiyom-postula ayrımını terk ederek sadece aksiyomlara yer vermekte ve aksiyomlara dair bakış açısını köklü bir şekilde değiştirmektedir. Öklid’in Öğeler adlı eserinde, geometrik ilişkileri açıklayan önermelere “postula” denir; “büyüklüğün eşitliği” gibi daha genel doğruları ifade eden önermeler ise “aksiyom” olarak adlandırılır (Barker, 2003, s. 37-42). Postulalarda kullanılan “nokta” veya “doğru” gibi terimler, geometrinin belirli nesneleri hakkında konuşur ve postulalar bu nesnelerle ilgili doğruları belirtir. Bu sistemde hem aksiyomlar hem de postulalar açıkça doğru kabul edilen ilkeler sunduğu için ispatları gerekmez ve diğer geometrik yasaların ispatında temel olarak kullanılır. Hilbert, Öklidyen geometrinin ötesinde bir genelleme elde etmek amacıyla, geometrinin temel kavramları olan nokta, doğru ve düzlem yerine, genel bir üç nesneli sistem ve bu nesneler arasındaki ilişkileri ele almayı önerir. Böylece geometrinin aksiyomları, bu genel sistemdeki üç nesne arasındaki ilişkileri tanımlar ve “nokta”, “çizgi”, “üzerinde olmak” gibi geometrik terimler tanımlanmadan kullanılır.

Hilbert’in yeni aksiyomatik yöntemiyle başlıca hedeflerinden biri, geometrinin herhangi bir görüye dayanmaksızın yapılabilmesidir. Bu yaklaşımda, matematiksel ve mantıksal unsurlar uzay görüsünden ayrıldığında, geometrinin epistemolojik temelleri daha net bir şekilde ortaya konabilir (Mancosu, 1998, s. 149). Hilbert’in burada uzay görüsü ile kastettiği, Kant felsefesinde sentetik a priori bilginin temellendirilmesinde kullanılan uzayın *a priori* görüsü fikridir. Kısaca açıklayacak olursak Kant, *Saf Aklın Eleştirisi*’nin (. “Giriş” bölümüne, *a priori* ve *a posteriori* bilme yetileri ile analitik ve sentetik yargılar arasındaki farkları ortaya koyarak başlamıştır. Burada duyu verisine dayalı yargılar *a posteriori*, duyu verisine dayanmaksızın evrensel olarak zorunlu olan yargılar ise *a priori* olarak belirlenirken, sentetik yargılar yüklemin özne kavramda içerilmediği yargılar olarak, analitik yargılar ise yüklemin hali hazırda özne kavramda içerildiği yargılar olarak açıklanmıştır (Kant, 2000, s. 130).

Kant'a göre, tüm analitik yargılar doğaları itibariyle *a priori*'yken, sentetik *a posteriori* yargılara ek olarak sentetik *a priori* denilen üçüncü bir yargı tipi daha mümkündür. Ayrıca, bu üç yargı tipi arasından bilgimizi gerçekten arttıranlar da sentetik *a priori* yargılardır. Bu tip yargılar *a priori* oldukları için duyu deneyimiyle temellenmezler, yani zorunlu ve evrenseldirler. Sentetik oldukları için de içkin olarak ilişkili olmayan kavramların birbirlerine bağlanmasıyla oluşurlar, yani kendi mantıksal biçimleri itibariyle doğru olmazlar. Böyle olunca da sentetik *a priori* bilgilerin "üçüncü bir şey" tarafından temellendirilmeleri gerekir (Barker, 2003, s. 22-27). Sentetik *a priori* bilgiyi temellendirmek için ihtiyacımız olan üçüncü şey ise zihnimizin saf formları olan uzay ve zamanın *a priori* görüsüdür. Buna göre, geometri uzay görüsünü temel alırken, aritmetik zaman görüsünü esas alır; yani geometrinin nesneleri uzay görüsüne dayanarak inşa edilirken, sayı gibi aritmetiğin nesneleri zaman görüsüne dayanarak inşa edilirler. Aritmetik ve geometrinin sentetik *a priori* olması ise, bu alanlardaki bilginin hem deneysel bilgiler gibi bilgimizi arttırması, hem de zorunlu ve evrensel olması demektir (Çevik, 2019, s. 51-54).

Bununla beraber Öklidyen-olmayan geometrilerin göreli tutarlılık kanıtlarının verildiği tarihsel süreç ile birlikte, *a priori* görü fikri sarsılmıştır. Öklidyen ve Öklidyen-olmayan geometrilerin ortak özelliği mantıksal açıdan eşit derecede kabul edilebilir olmaları ve aynı derecede tutarlı olmalarıdır. Özellikle Einstein'ın Genel Görelilik Kuramı'nı (1915) Öklidyen-olmayan Riemann geometrisiyle ifade etmesi ile bu geometrilerden herhangi birisinin uzayı daha doğru bir biçimde temsil ettiğinin söylenemeyeceğinin ortaya çıkması, biçimselci matematik felsefesinin gelişmesinin temel saiklerinden olmuştur. Birbirleriyle çelişik ama kendi içlerinde tutarlı oldukları düşünülen bu geometrilerin ortaya çıkması ve kabul görmesiyle, matematikte kendinden doğruluk fikrinin yerini tutarlılık ve kanıtlanabilirlik fikri almıştır (Gözkân, 2008, s. xii).

Bu sürecin önemli bir sonucu olarak Hilbert, görüye dayanmayan bir geometri aksiyomatizasyonu geliştirmek ile, hangi aksiyomların seçileceği konusunda görüsel olandan yararlanılabilecek olsa dahi, nihayetinde bu bilgilerin ötesine geçilerek herhangi bir üçlü nesne sistemi üzerinde çalışılması gerektiğini savunmaktadır. Buna göre Hilbert'in çalışma arkadaşlarından

Bernays'in da belirttiği gibi, aksiyomatik sistemin tutarlılık problemi, uzay ve zamanın saf görüsüne dayandığı sürece anlamsızdır (Mancosu, 1998, s. 174) ve bu nedenle, uzay ve zamanın saf görüsü fikri terk edilmelidir. *A priori* görü ise sadece meta-matematiksel bağlamlarda kullanılmalı ve sistem içindeki rolü, araştırılabilir sembollerin manipülasyonu ve kombinasyonları ile sınırlandırılmalıdır.

Hilbert'in bir diğer amacı, aksiyomları Öklid'in yönteminden farklı bir şekilde konumlandırmaktır. Hilbert'e göre, aksiyomatik sistemler olgusal bir şeyler hakkında bilgi vermez, sadece matematiksel olarak araştırılması gereken ilişkiler sisteminin içsel özelliklerini ifade eden bir yapı sunar. Bu bağlamda, aksiyomlara doğru veya yanlış denemez; çünkü aksiyomlar yalnızca sistem içindeki bağlamda anlam kazanır. Eğer bir üçlü nesne sistemi ve bu nesneler arasındaki ilişkiler belirlenmişse, geometrinin aksiyomları bu ilişkileri ve terimleri içeriyorsa, yani geometrik terimler ve bunlar arasındaki ilişkileri, bu nesneler ve aralarındaki ilişkilerle eşleyince aksiyomlar doğru hale geliyorsa, tüm geometrik teoremler de bu sistem açısından doğru olur. Hilbert, böyle bir geometrik aksiyomatizasyonun hem tam hem de basit olması gerektiğini savunur (Mancosu, 1998, s. 151). Bir sistemin tam olması, olağan matematikte kabul edilen geometrik doğruları içerebilmesini ifade ederken; basit olması, sınırlı sayıda aksiyomun yeterli olabilmesi ve bu aksiyomların birbirlerinden bağımsız olduğunun gösterilmesini ifade eder.

Hilbert'in belirlediği bu iki temel şartın yanı sıra, aksiyomların tutarlılığının sağlanması da gereken bir diğer önemli koşuldur. Tutarlılık, aksiyomlar arasında sınırlı sayıda adım sonucunda çelişki elde edilememesi şeklinde tanımlanabilir. Hilbert'in aksiyomatik sisteminde tutarlılığın bu denli önemli olmasının nedeni ise, tasvir edilen matematiksel yapının varlığının, aksiyomatik teorinin tutarlılığıyla garanti edilmesidir (Zach, T.y.: 3). Özellikle Öklidyen-olmayan geometrilerin Öklid geometrisine göreli tutarlılık kanıtlarının verilmesiyle birlikte, bu geometrilerin aksiyomlarının günlük deneyimin uzayıyla çelişen önermelere sahip olduğu düşünüldüğünden, aksiyomların kendi iç tutarlılığını kanıtlamak zor bir problem olarak ortaya çıkmıştır (Nagel ve Newman, 2008, s. 44). Öklidyen-olmayan geometrilerin tutarlılık kanıtları Öklidyen geometrinin tutarlılığına dayandırıldığı için ise, esas sorun Öklidyen geometrinin tutarlılığı meselesine dönüşmüş olur.

Bu sorunun çözümü için geliştirilen yöntem, biçimsel bir sistemin soyut aksiyomlarını, somut bir model aracılığıyla kendi içindeki doğru önermelere çevirmek olmuştur. Bu amaçla Hilbert, *Geometrinin Temelleri'nde*, Öklid aksiyomlarını kartezyen koordinat sistemini kullanarak basit cebirsel doğruluklar haline getirmiştir (Nagel ve Newman, 2008, s. 45-48). Geometrik aksiyomların tutarlılığının aritmetik düzeyde ele alınması, doğal olarak aritmetikte tutarlılık kanıtı arayışına zemin hazırlamıştır (Mancosu, 1998, s. 151). Bu sebeple 1900'lerin başı itibariyle Hilbert'in esas odak noktası, aritmetiğin aksiyomatizasyonu olmuştur.

Sonraki aşamada Hilbert, göreli tutarlılık kanıtlarının sınırlılıklarını aşmak amacıyla "mutlak tutarlılık kanıtı" (direct consistency proof) ingilizcelerini yazmanın gerekli olduğunu düşünmüyorum arayışına girmiştir (Nagel ve Newman, 2008, s. 53-54). Bu yaklaşım, tutarlılığı kanıtlamak için başka bir sistemin tutarlılığını varsaymaya ihtiyaç duymaz. Mutlak tutarlılık kanıtı elde edebilmek için ilk adım, sistemin tam anlamıyla biçimselleştirilmesidir. Bu, sistemdeki sembollerin tamamen anlamdan yoksun, içi boş işaretler olarak ele alınması anlamına gelir. Tam anlamıyla biçimsel bir sistemde, aksiyomlar ve teoremler, temel işaretlerden kurallar aracılığıyla daha büyük yapıların oluşturulduğu anlam içermeyen zincirler olarak bir araya gelir. Bu durumda, aksiyomlardan teorem türetmek, belirli bir işaretler kümesinden kurallar çerçevesinde başka bir işaretler kümesine geçmekten ibarettir. Biçimsel matematikte asıl önemli olan sembollerin anlamı değil, bu sembollere kurallar tarafından kazandırılan işlevdir.

Ancak, mevcut biçimsel sistemdeki anlamdan yoksun işaretler ve bu işaretlerle oluşturulan formüllerin yapısı hakkında konuşulurken, anlamlı önermeler ortaya çıkar. Bu anlamlı önermeler, dizgenin kendisine değil, dizge hakkında konuşan üst düzey matematiksel yapı olan meta-matematiğe aittir. Bu çerçevede, tutarlılığın da meta-matematiksel bir kanıt olduğu anlaşılır. Hilbert'in biçimsel bir dizge ile onun betimlenmesi arasındaki farkı kullanarak geliştirdiği mutlak tutarlılık kanıtı, dizgedeki tüm tamdeyimlerin incelenmesi ve dizgenin aksiyomlarından çelişkili önermelerin türetilip türetilmediğinin gösterilmesi üzerine kuruludur (Nagel ve Newman, 2008, s. 55-59). Bu tür bir tutarlılık kanıtı, formüllerin sonsuz özelliklerine ve bu özelliklerden türetilen sonsuz çıkarımlara dayanamayacağından, Hilbert tarafından sonlu bir yaklaşım benimsenmiştir. Başka bir dizgenin tutarlılığına başvurmadan, sınırlı sayıda çıkarım ilkesiyle sonuç elde etmeyi hedefleyen bu mutlak kanıt, sonlucu ve meta-matematiksel bir yaklaşımı temsil eder.

Hilbert'in mutlak tutarlılık kanıtı arayışına, önermeler mantığı bağlamında *Principia Mathemetica*'da gerçekleştirilen mutlak tutarlılık kanıtı ile ulaşılabilmiştir (Brown, 2008, s. 75). Ancak, söz konusu aritmetik olduğunda, Gödel'in 1930'larda yaptığı çalışmalar, doğal sayılar aritmetiğini içeren herhangi bir biçimsel sistemin her zaman eksik olacağını ve bu sistemde her zaman karar verilemeyen önermelerin bulunacağını göstermiştir. Ayrıca, Gödel, bu tür sistemlere kendi içlerinde tutarlılık kanıtı verilemeyeceğini, yani geometrinin tutarlılığının da kendisine dayandırıldığı aritmetik için mutlak tutarlılık kanıtı bulmanın mümkün olmadığını ortaya koymuştur (Gözkân, 2014, s. xv).

Hilbert Programı'nın tutarlılık kanıtı bulma amacını temelden sarsan bu teoremler, *Principia Mathematica* gibi biçimsel dizgeler genişletilse bile, bu sistemlerde türetilmeyecek aritmetiksel doğrulukların var olmaya devam edeceğini göstermiştir (Nagel ve Newman, 2008, s. 78). Bu süreçte genel olarak Gödel'in kanıtlamaları ön planda olsa da Frege'nin geometrinin yeni tip aksiyomatizasyonuna yönelik itirazlarının incelenmesi de Hilbert programının sınırlılıklarını anlamak açısından önemlidir.

2. Frege-Hilbert İhtilafının Ayrışma Noktaları

Frege, Hilbert'in aksiyomatik dizgesi ile alakalı fikirlerini çeşitli konferans ve yazışmalarda dile getirmiş, daha sonradan bu fikirleri "Geometri'nin Temelleri Üzerine" (1903 ve 1906) başlığıyla yayımladığı iki makalede toparlayarak ayrıntılı bir biçimde ele almıştır. Bahsi geçen makaleler, karşılıklı yazışmalar ve Hilbert'in *Geometri'nin Temelleri* adlı eseri ikilinin genel düşünce yapısı da dikkate alınarak incelendiğinde, iki düşünür arasında gelişen ihtilafta temel ayrışma noktalarının, aksiyomatik dizgelerin doğası ve tutarlılık/bağımsızlık kanıtlarının metodolojisi üzerine temellendiği görülmektedir.

2.1. Aksiyomatik Dizgelerin Doğasına Yönelik Anlaşmazlık

Frege ve Hilbert arasındaki aksiyomatik sistemler üzerindeki anlaşmazlık, esasen geleneksel aksiyom-tanım ayrımı ile modern aksiyom-tanım ayrımları arasındaki farklılıklardan kaynaklanmaktadır. Hilbert'in sisteminde geometrik terimler açık bir şekilde tanımlanmamış, aksine bu terimlerin anlamı sistemin genel yapısı içinde örtük olarak belirlenmiştir. Bu yaklaşım, Frege'nin itirazlarına yol açmıştır (De Castro, 2018, s. 114). Frege'ye göre, böyle bir düzenleme aksiyomların tanımlara özgü yükler taşımasına neden olur ve aksiyom ile tanım arasındaki önemli farkı ortadan kaldırır.

Ayrıca, geleneksel matematik anlayışında aksiyomlar, mantıksal çıkarımlar yoluyla doğruluğu kanıtlanması gerekmeyen, kendiliğinden doğru kabul edilen ve sav içeren kesin düşüncelerdir. Öklidyen geometride aksiyomların geçerliliği, uzay görüsüne dayanarak temellendirilir ve bu aksiyomlar, görünün temel ve birbirine bağlı unsurlarını ifade eder (Frege, 1971b, s. 114). Ek olarak, aksiyomların tanımlar dışındaki matematiksel önermelerden farklı olarak, önceden belirlenmemiş anlam veya gönderim içeren terimlerle ifade edilmemesi, bu önermelerin ve kavramların kesin ve belirsizlikten uzak olmasını sağlar (De Castro, 2018, s. 114).

Tanım, klasik matematikte bir terim veya işaretin anlamını ve gönderimini belirleme işlevini üstlenir. Tanımlar, daha önce anlamı belirlenmemiş terimleri ele alarak anlamlarını netleştirdikleri ve bu terimlere gönderim kazandırdıkları için diğer matematiksel önermelerden farklıdır. Aksiyomlar veya teoremler ise, tanımlar aracılığıyla belirlenmiş terimlerin üzerine inşa edilir. Bir tanım doğru ya da yanlış olamayacağından ötürü, doğruluğunu kanıtlamaya gerek yoktur; tanım yalnızca kabul edilebilir veya edilemez olabilir. Başka bir ifadeyle, aksiyomlar görüye dayandığından çelişki barındırmazken, tanımların çelişki içermemesi için dikkatle oluşturulması gerekir; yani, aynı işaretin birden fazla ifadesi olmamalıdır (Frege, 1971a, s. 24-25). Böylece tanımlar, sadece bir araç olarak işlev görür ve epistemik değerleri özdeşlik ilkesinden öteye geçmez. Ancak, tanımların mantıksal yapıyı belirlemedeki rolü, onların pragmatik değerini önemli ölçüde artırır.

Frege, aksiyom ve tanım arasındaki belirgin farklara dayanarak, bir tanımın, tanımladığı terimin gönderimini net ve belirsiz olmayan bir biçimde belirlemesi gerektiğini savunur. Eğer bir tanım belirsizlik taşıyorsa, tanımlanan işaret de tutarsız bir kullanım sergiler. Bunun ilk nedeni, tanımlanmış işaretin gönderiminin bileşik bir kavram olmasından ötürü, tanım tanımlanan şeyin mantıksal yapısını yeterince belirleyemediğinde, gönderimin de belirsiz kalmasıdır. Bu durumda, herhangi bir nesnenin tanımın kapsamına girip girmediğini belirlemek mümkün olmayabilir (Kluge, 1971b, s. xxv). Öte yandan Frege'ye göre bir noktanın tanımı verildiğinde, herhangi bir nesnenin (örneğin bir kol saati) nokta olup olmadığı bu tanıma bakılarak açıkça belirlenebilmelidir (Frege, 1971b, s. 63).

Tanımın tanımladığı şeyin gönderimini tam ve açık bir biçimde belirlemesi gerekliliğinin diğer sebebi ise, tam-olmayan bir tanımla tanımlanan bir şeyin gönderiminin de metafizik açıdan tam-olmayan olmasıdır (Kluge, 1971b, s. xxvi). Bu durum, kavramın nesneden farklı olarak doymamış olması gibi tamamlanmamış bir hali değil, metafizik anlamda tam-olmayan bir varlığa işaret eder; bu tür bir varlık ise imkânsızdır. Üçüncü halin imkânsızlığı ilkesi de, aslında kavramların keskin ve net bir şekilde tanımlanması gerektiğinin başka bir ifade biçimidir.

Frege, Hilbert'in sistemine parça parça tanımlama yaklaşımı nedeniyle de karşı çıkar (Kluge, 1971b, s. xxvii). Frege açısından, belirli durumlar için yapılan tanımların daha sonra genişletilerek diğer durumları da kapsayacak şekilde değiştirilmesi kabul edilemez. Bunun birincil nedeni, bu tür parçalı tanımların tanımlanan terimi belirsiz ve net olmayan bir biçimde tanımladığı için, kavrama keskin sınırlar kazandıramamalarıdır. İkincisi ise, pragmatik açıdan, sonradan eklenen tanımlarla önceki tanımlar arasında çelişki riski taşımasıdır ve bu metotta çelişki riskini önleyecek bir kural bulunmamaktadır. Ayrıca, parça parça tanımlama yönteminin kabul edilmesi durumunda, tanıma yapılan her eklemenin tanımlanan terimin gönderimini değiştireceği endişesi de vardır. Bu değişiklik, önceden bu terimleri kullanarak yapılmış kanıt ve teoremlerin geçerliliğini yitirmesine, yani kanıtlandığı düşünülen şeylerin aslında kanıtlanmamış hale gelmesine yol açar.

Frege'nin aksiyom ve tanım arasındaki ayrımı temel alarak ortaya koyduğu bu itirazların kökeninde, kavram ve nesne anlayışının farklılığı yatmaktadır. Frege, Hilbert'in aksiyomatik sisteminde, birinci-düzey kavramlarla ikinci-düzey kavramların karıştırıldığını öne sürer. Frege'ye göre Hilbert'in sisteminde, nesne ve birinci-düzey kavram ilişkisi dikkate alınarak varlık çıkarımı yapılmakta, diğer bir deyişle ikinci-düzey kavramlarla ilgili çıkarım yapma hatasına düşülmektedir (Frege, 1971a, s. 32-36). Hilbert'in sisteminde, her tikel nokta bir nesne olarak ele alınırken, "... bir noktadır" ifadesi birinci-düzey kavramı temsil eder. Frege'ye göre, bu durumda tüm özellikler de birinci-düzey kavramlarla uyumlu olmalıdır. Halbuki Hilbert'in aksiyomları noktanın tanımı olarak ele alındıklarında, onların belirttiği özelliklerin birinci-düzey değil, ikinci-düzey özellikler oldukları görülür. Bunun doğuracağı ilk zorluk, aynı aksiyomlarla, "nokta olma" kavramının tanımı yanında "doğru olma" ya da "düzlem olma" gibi birden çok kavramın tanımı da eş zamanlı yapıldığından, yani birden fazla bilinmeyen olmasından ötürü, gerçek anlamda bir tanımın yapılıp yapılmadığına dair şüphenin bulunmasıdır.

Bu zorluk yok sayılarak, Hilbert'in aksiyomlarının ikinci-düzey kavramları şüpheye mahal bırakmayacak bir biçimde tanımlamış olduğu kabul edilse bile, Öklid'in nokta kavramı, altına nesne düşen birinci-düzey bir kavram iken, Hilbert'in tanımladığı kavram ikinci-düzey bir kavramdır. Aynı şey göreli tutarlılık kanıtlarında kullanılan reel sayılar için de geçerlidir. Dolayısıyla, iki ayrı durumda "nokta" teriminin, farklı gönderimlere sahip olduğu söylenebilir (Frege, 1971a, s. 36-37). Bu durumda, Öklidyen geometri ve diğer geometriler, Hilbert'in ikinci-düzey kavramları tanıtan daha geniş aksiyomatik sisteminin özel örnekleri olarak görülmektedir. Bu sistemler, birinci-düzey kavramlarla sınırlandığından, her bir geometri "nokta" kavramını kendi özel bağlamında tanımlar. Örneğin, X-geometrisinin noktasının, Y-geometrisinin noktasından farklı olduğu kabul edildiğinde, bu farklılık, yapılan tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarını da sorgulayıcı bir hale getirir.

Hilbert'in ise asıl vurguladığı nokta, Frege ile kendi amaçları arasındaki farklılıktır. Hilbert'in amacı, özellikle paralel aksiyomunun diğer aksiyomlardan türememesi gibi, sistemin meta-teoretik özelliklerini gösterecek matematiksel önermelere dair bir anlayış geliştirmektir (Kluge, 1971a, s. 10-14). Frege'nin aksine, Hilbert sisteminde hiçbir önvarsayımın kabul edilmediği, tamamen bağımsız bir matematiksel çerçeve sunmayı hedeflemiştir. Bu fark, Hilbert'in matematiği nesnel ve sistematik bir temele oturtma çabasını yansıtır. Aksiyomlarında yer alan açıklamalar ise, "nokta" gibi kavramlar için birer tanım mahiyetindedir ve burada geçen ifadelere artı olarak Frege'nin beklentisinde olduğu gibi, örneğin "nokta" kavramına "boyutsuzluk" gibi tanımlar ekleme niyetinde de değildir. Bunun sebebi ise, bu tarz girişimlerin orada olmayan bir şey hakkında konuştukları için, hiçbir zaman bulunamayacak olanı aramak gibi olmalarıdır. Bu ise matematiğin kesinliğine zarar verir.

"Nokta" gibi kavramlara üç satırlık bir tanım vermenin imkânsız olduğunu düşünen Hilbert'e göre, bir tanım ancak tüm aksiyom yapısınca tamamlanabilir ve her aksiyom tanıma bir şeyler katarak kavramı değiştirir. Bu sebeple de "nokta" her aksiyomatik dizge de farklı bir şeye karşılık gelmektedir. Bir kavram tam ve kesin surette sabitlendikten sonra ise, Hilbert'e göre sisteme o kavramın tanımına katkıda bulunacak yeni bir aksiyom eklenmesine izin verilemez.

Hilbert ikinci olarak ise, Frege'nin vazedilmiş aksiyomların doğru oldukları için birbirleriyle çelişmeyecekleri yaklaşımının tersine, kendisinin yaklaşımında keyfî olarak vazedilmiş aksiyomlar topluluğunun tüm sonuçları itibariyle birbirleriyle çelişmedikleri sürece doğru oldukları ve bu sayede de aksiyomlarca tanımlanan şeylerin var olduğuna değinir. Hilbert'in anlayışında her teori, içinde geçen kavramların birbirleri ile ilişkilerini yansıtan bir çerçeve ya da bir şemadır ve bu sistemin temel öğeleri istenildiği gibi keyfî bir biçimde inşa edilebilirler. "Nokta" gibi temel terimler, farklı aksiyomatik sistemlerde farklı anlamlar taşıyabilir ve bu bağlamda sistemin teoremleri de bu terimlerin anlamları doğrultusunda şekillenir. Böylece her teori, farklı temel kavramlar içeren sistemlere uygulanabilir. Bu durum, Hilbert'in aksiyomatik yaklaşımının doğruluk, varlık ve tutarlılık gibi konuları klasik matematik anlayışından ne denli farklı bir perspektiften ele aldığını gösterir.

Frege, Hilbert'e yazdığı son mektubunda (Kluge, 1971a, s. 14-21), Hilbert'in sistemini artık daha iyi kavradığını ve bu sistemin esas amacının geometriyi uzay görüsünden tamamen bağımsız, saf mantıksal bir disipline dönüştürmek olduğunu ifade eder. Frege'ye göre Hilbert'in sisteminde aksiyomlar, geçmişte uzay görüsü tarafından doğrulanan temel ilkeler olarak kabul edildikleri eski anlayışın aksine, teoremlerin koşullarını belirleyen ifadeler olarak görülmüşlerdir.

Dolayısıyla, Frege ve Hilbert arasındaki temel farkın aksiyomların doğasına yönelik anlayışlarından kaynaklandığı görülür: Frege, aksiyomları sabit bir konuya dair doğru savlar olarak değerlendirirken, Hilbert aksiyomları çoklu-örneklenebilir koşulları ifade eden tekrar-yorumlanabilir tümceler olarak ele almaktadır. Bu fark, Frege'nin de dahil olduğu eski düşünce biçimiyle 19. yüzyılda gelişen yeni bir matematiksel yaklaşım arasındaki çatışmayı yansıtır (Blanchette, 2018). Frege'nin aksiyom anlayışı, sabit-tanım alanına sahip klasik aksiyom kuramına dayanırken, Hilbert'in yaklaşımı konuları sabitlemeyip çoklu örneklenebilirliği ifade eden araçlar olarak görüldüklerinden, Hilbert'in tekrar-yorumlanabilir tümceleri, Frege'nin klasik aksiyom anlayışıyla uyumlu değildir. Hilbert'in aksiyomların doğasına yönelik vazettiği varlık ve doğruluk kriterinin bir uzantısı olarak ise, ikili arasındaki anlaşmazlığın tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarının metodolojisine yönelik olan ikinci boyutu ortaya çıkar.

2.2. Tutarlılık ve Bağımsızlık Kanıtlarının Metodolojisine Yönelik Anlaşmazlık

Hilbert, bağımsızlığı ve tutarlılığı, "kanıtlanamazlık" üzerinden değerlendirmiştir. Bir önermenin belirli bir önerme kümesine bağımlı olması, o önerme kümesinden türetilebilmesi anlamına geldiği için; bağımsızlık, bir önermenin belirli bir önerme kümesinden kanıtlanamaması olarak tanımlanmıştır.[1] Önermelerin tutarlılığı ise, bu önermeler arasında bir çelişkinin kanıtlanamaması olarak ele alınır (Blanchette, 2018). Hilbert'in bu kanıtları sağlamada başvurduğu temel teknik, "tekrar-yorumlama" yöntemidir. Bu yaklaşımda, *AX* bir geometrik aksiyomlar kümesini ve *B* ise bu aksiyomların tutarlılığını varsaydığımız bir arka plan temsil eder. *AX*'in geometrik terimleri, *B*'nin teoremlerini ifade edebilecek şekilde tekrar-yorumlanarak, *AX* aksiyom kümesinin tutarlılığı, arka plan teori olan B'nin tutarlılığına indirgenir, dolayısıyla eğer *B* tutarlıysa, *AX* de tutarlı kabul edilir. Örnek olarak, Hilbert'in ilk tutarlılık kanıtında, "nokta" ve "doğru" gibi geometrik terimler, sıralı reel sayı çiftleri üzerinden tekrar yorumlanmış ve geometrinin aksiyomları Reel sayıların tutarlılığına indirgenmiştir. Benzer şekilde, I önermesinin *AX* önermeler kümesinden bağımsızlığı da, *AX* ve $\neg I$'nin (yani $\neg I$'nin *AX* önerme kümesi ile birlikte) tutarlılığının *B*'ye göreli olarak kanıtlanması ile gösterilmiştir.

1 Ancak *p* önermesi, *Q* önerme kümesinden türetilemiyorsa; *p, Q*'dan bağımsızdır. Aksi takdirde, yani *p* önermesi, *Q* önerme kümesinden türetilebiliyorsa; *p, Q*'ya bağımlıdır.

Tekrar yorumlama ile göreli tutarlılık kanıtı elde edilmesi şu şekilde özetlenebilir (Blanchette, 2018):

- *AX* tutarsızsa, bir çelişki olması gerekir.
- Mantıksal çıkarım terimlerin özel anlamlarından bağımsızdır.
- Öyleyse *AX*'in tekrar-yorumlanması da çelişkiyi taşır.
- *AX*'in tekrar-yorumlanması sonucunda *B*'nin teoremlerinde ortaya çıkabilecek bir çelişki ise *B*'nin de tutarsız olması demektir.
- Böylece, *B*'nin arka plan bir teori olarak tutarlılığı varsayıldığında, *AX*'in tutarlılığı da *B*'nin tutarlılığına indirgenmiş olur.

Hilbert'in kullandığı teknikleri bu perspektife göre yeniden ifade edersek: *AX* adlı bir aksiyom kümesinin geometrik terimleri, *B* adlı arka plan teorisi yardımıyla tekrar yorumlanır. Bu yorumlama işlemi, *AX*'in terimlerinin *B*'nin teoremlerini temsil edecek şekilde yapılandırılması anlamına gelir. Bu yöntemde, *AX*'in içerdiği n tekrar-yorumlanabilir terim, değişken gibi düşünülebilir ve örtük biçimde n-boşluklu (n-place) bağıntısını tanımlar. B'nin tutarlılığı varsayımı altında (Hilbert'in reel sayılar üzerine dayandığı kanıtında olduğu gibi) oluşturulan yorum, *AX* tarafından tanımlanan bağıntısını sağlayan bir n-öğeli (n-tuple) yorum olarak kabul edilir. Diğer bir ifadeyle, sırasıyla *AX*'in tekrar yorumlanabilir terimlerinin birer yorumu olarak ele alınan bu n-öğe, *AX*'in (bu örnekte geometrinin aksiyomları) doğruluğunu garanti eder. Böyle bir yorumun varlığıyla, 'in sağlanabilirliği (İng. satisfiability) gösterilerek, *AX*'in *B*'ye göreli tutarlılığı kanıtlanmış olur (Blanchette, 2018). Bu bakış açısı, geometrik terimlerin çoklu yorumlara açık olmasını sağlayarak, geometrinin aksiyomlarının da bu terimlerin tanımlarını veren "örtük tanım" kümesi olarak görülmesine imkan tanır.

Frege'nin Hilbert'in metodolojisine yönelik eleştirilerini anlamak içinse öncelikle, Frege'nin gerçek önerme ve sahte-önerme arasındaki ayrımını iyi kavramak gerekmektedir (Frege, 1971b, s. 69-71). Frege, gerçek bir önermenin doğru ya da yanlış olan bir düşünceyi ifade ettiğini savunur. Buna karşılık, sahte-önermeler dilbilgisel olarak doğru yapılar içerebilir ancak gerçek bir düşünce sunmazlar. Sahte-önermelere örnek, koşul tümcelerinin öncülleri veya ardıllarıdır. Örneğin, "Eğer *a* 1'den büyükse, o zaman pozitif bir sayıdır" gibi bir önerme, kendi başına anlamlı bir düşünce ifade etmeyen, sadece koşullu bir yapıdır. Bu ifade, "1'den büyük olan sayılar pozitiftir" gibi daha genel ve anlamlı bir düşünceyi ifade ederler. Bu ise "1'den büyük olma" kavramının "pozitif sayı" kavramının altına düştüğü anlamına gelir. Buradaki orijinal önerme, "*a*" gibi gönderimi olmayan bir terim barındırsa da, bu terimler genelleme anlamı kattıkları için, önerme bütün halindeyken bir düşünceyi dile getirebilmektedir. Öte yandan, orijinal önermeyi bileşenlerine ayırdığımızda elde ettiğimiz "*a* 1'den büyükse..." gibi bir bileşen, "*a*" gibi bir değişken taşıdığı ve "*a*"nın ne gönderimi ne de anlamı olmamakla beraber, burada genelleme de ifade etmediği için bir düşünce ifade etmemektedir. Özetle bütünü bir düşünce ifade eden bir önermenin bu tarz gramatik bileşenleri hiçbir şey söylemeyen sahte-önermelerdir.

Frege'nin Hilbert'in tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarına yönelik getirdiği itirazlar, gerçek önerme ve sahte-önerme ayrımından yola çıkarak vardığı "saf biçimsel sistem" anlayışına dayanmaktadır. İlk olarak, modern matematiğin biçimsel sistem anlayışından bahsedecek olursak, Frege'ye karşı Hilbert'in sistemini savunan Korselt'e göre, modern matematiğin saf biçimsel sistem anlayışında bilinmeyen bir işaret içeren bir aksiyomun varlığı, aksiyomun bu işaretin kullanımını belirleyen kuralı sunduğu anlamına gelmektedir (Korselt, 1971, s. 39-40). Bu durum, klasik matematikte aksiyomların olguların temel doğrularını ifade ettiği düşüncesiyle çelişkili gibi görünebilir, ancak modern matematikte aksiyomlar artık belirli empirik olguları yansıtır şekilde algılanmadıkları için, gönderimi belirsiz terimler içermeleri de sorun teşkil etmemektedir. Biçimsel çıkarım dizilerinin çeşitli şekillerde yorumlanabildiği bu anlayışta matematik, belirli bilinen yorumları dışarıda bırakmayacak biçimde kendi ilkelerini düzenleyen olarak görülür.

Korselt'in "saf biçimsel bir sistem" olarak adlandırdığı bu sistemde yer alan gönderimi belirsiz terimler sistemin saf biçimsel olarak kalabilmesi için şarttır ve sistemin nesnelliğini de teminat altına alır. Aksi takdirde, Hilbert'in önermelerindeki terimler belirli gönderimlere sahip olsaydı, biçimsel bir kuram yerine, biçimsel bir kuramın çeşitli yorumlarına ait olurlardı. Halbuki saf biçimsel bir dizgede, gönderimsiz terimlerin yorumları geniş bir değer aralığına sahip olmalı ve farklı deneyimler arasındaki eş zamanlı bağlantıları gösterebilmelidir (Korselt, 1971, s. 40-47). Dolayısıyla, biçimsel bir kuramın işaretleri/sembolleri, gönderime sahip değildir ve ilgili yorumların kuralları, sistemin kanunları tarafından belirlenir.

Öte yandan Frege, saf biçimsel bir sistemi, öncül sahte-önermeleri ortak olan genel teoremlerin bir sistemi olarak tanımlar (Kluge, 1971b, s. xxxvii-xxxviii). Bu tür bir sistemde, standart mantıksal teknikler kullanılarak, bir kuramın öncül sahte-önermelerini ve bir sonuç sahte-önermesini içeren tek bir karmaşık önerme türetilebilir ve böylesi bir önerme ya da kuram, genel olmasına rağmen kavramlar arası ilişkileri belirler. Ayrıca, sistemdeki gönderimsiz ifadeler, farklı yerine koyma (İng. substitution) hamleleri vasıtasıyla gönderimi belirli ifadelerle değiştirilerek, çeşitli tikel kuramlar elde edilebilir. Frege'ye göre, Hilbert'in aksiyomları, önermesel bir bütünün öncül sahte-önermeleri olarak değerlendirilip tanım ya da aksiyom olarak görülmediklerinde, bu aksiyomların tanımlanmamış anlamsız ifadeler içermesi bir sorun teşkil etmez. Aksine, bu onların öncül-sahte önermeler olmaları için gereklidir. Benzer şekilde, Hilbert'in teoremleri de öncül sahte-önermelere benzer bir biçimde tanımlanmamış anlamsız ifadelere sahip olduklarından ve türetildikleri aksiyomlar da doğru ya da yanlış değeri alamayan sahte-önermeler oldukları için, teorem olarak kabul edilemezler. Dolayısıyla, Frege açısından Hilbert'in sisteminde aksiyomlar, öncül sahte-önermeler; teoremler ise, ardıl sahte-önermeler olarak düşünülebilir. Çıkarımlar ise, anlamsız ifadelerin yerine gönderimi olan ifadelerin koyulmasıyla ortaya çıkabilecek salt çıkarım şemaları olarak ele alınabilir. Sonuç olarak, Frege'ye göre Hilbert'in sistemi ancak genellik belirten ikinci-düzey saf biçimsel bir sistem olarak değerlendirilebilir.

Hilbert'in sistemi Frege'nin ifade ettiği saf biçimsel sistemler gibi ele alındığında, ikinci-düzey bir sisteme karşılık gelen Hilbert'in aksiyomatik dizgesi, Öklidyen ya da Öklidyen-olmayan geometrilerin aksiyomlarının yerine-koyulmasıyla örneklendirilmiş ve bu şekilde ancak birinci-düzey bir sistem elde edilmiş olunur. Buna göre, (Hilbert'in aksiyomatik dizgesi genel bir sistem olarak, Öklidyen ve Öklidyen-olmayan geometriler ise tikel örnekler olarak ele alındıklarında) ancak genelden tikele yapılacak farklı çıkarımlarla, öncül sahte-önerme olarak iş gören sahte-aksiyomlar, farklı birinci-düzey teorilerin gerçek aksiyomlarına dönüşebilir. Aynı şekilde ardıl sahte önerme işlevi gören sahte-teoremler de, birinci-düzey teorilerin gerçek teoremlerine dönüşebilir.

Öte yandan Hilbert ve Korselt'e göre ise, Öklidyen-olmayan geometrilerdeki farklı paralel aksiyomları Öklidyen geometrinin paralel aksiyomunun yerine koyulduğunda örneklendirilmiş olur ve bu sayede farklı ve tutarlı tikel geometriler elde edilir (Kluge, 1971b, s. xxxviii-xxxix). Playfair'in Öklid'in 5. postulasını "bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan o doğruya, ancak ve ancak tek bir paralel doğru çizilebilir" şeklinde ifadelendirmesi üzerinden düşünecek olursak, Öklidyen-olmayan geometrilerin bu beşinci postula yerine "bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan o doğruya, en az iki paralel doğru çizilebilir" ya da "bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan o doğruya, hiçbir paralel doğru çizilemez" aksiyomlarını kullandıklarını hatırlayabiliriz. Bu durumda Öklidyen geometrinin paralel aksiyomu yerine, onunla çelişkili olan diğer paralel aksiyomlarından biri yerleştirildiğinde, Hilbert'in sistemi örneklendirilmiş ve bu şekilde farklı ve yine tutarlı tikel geometriler elde edilmiş olur.

İkinci olarak, Hilbert'in sisteminde bağımsızlığın, bir önermenin belirli bir önerme kümesinden kanıtlanamaması olarak tanımlanmıştı. Bu örneklendirme sonucunda, Öklidyen geometrinin paralel aksiyomu hariç diğer aksiyomları, Öklidyen geometrinin paralel aksiyomuna esasen çelişkili olan Öklidyen-olmayan geometrilerin paralel aksiyomlarından biri ile birlikte kullanılmış ve buradan tutarsızlık çıkmamış olur. Eğer Öklidyen geometrinin paralel aksiyomu, diğer aksiyomlara bağımlı olsaydı, onlardan türetilebiliyor olurdu. Bu durumda da sistemde kendisi yerine kendisiyle çelişkili diğer paralel aksiyomunun kullanılması ile tutarsız bir dizge elde edilirdi.[2] Sonuç olarak tutarsız bir dizge elde edilmediğinden ötürü, bu durumda Öklidyen geometrinin paralel aksiyomunun diğer aksiyomlardan bağımsızlığı da gösterilerek, Öklidyen geometrinin kendisi hakkında da bir şeyler söylenmiş olur.

Frege'ye göre ise, biçimsel sistemlerin doğası, bu tür bir çıkarım yapılmasına olanak tanımaz. Frege'nin Hilbert'in sistemini Öklidyen geometri gibi tikel, birinci-düzey bir geometri olarak değil, bu tarz bir geometrinin ancak yerine koymayla elde edilebileceği, ikinci-düzey genel bir dizge olarak gördüğünü hatırlayalım. Frege'ye göre, bu noktada yapılabilecek tek çıkarım, çeşitli birinci-düzey teorilerin ikinci-düzey bir teorinin altına düştüğüdür. Bu çıkarım önemli olsa da Öklidyen geometrinin birinci-düzey aksiyomlarının bağımsızlığıyla ilgili doğrudan bir kanıt sunmaz. Bu kanıtlar daha çok, tikel birinci-düzey aksiyomların çıkarımlandığı ikinci-düzey sahte-aksiyomların kavramlarının özellikleriyle ilgilidir ve bu özelliklerin bağımsızlıkları hakkında bilgi verir. Öklidyen geometri gibi birinci-düzey aksiyomların tutarlılığı ve bağımsızlığı için farklı bir yöntem gereklidir (Kluge, 1971b, s. xxxix).

Başka bir ifadeyle, ikinci-düzey genel bir geometrinin tutarlılığı, birinci-düzey bir geometri ile o geometriyi sağlayan bir yorum bulunduğunda gösterilebilir, ancak bu tür bir tutarlılık, başka bir birinci-düzey geometrinin tutarlılığını garanti etmez. Yani bu örneklendirme ile birinci-düzey bir geometri olan Öklidyen-olmayan geometrilerin tutarlılığı, Hilbert'in ikinci-dü-

2 Hilbert'in sistemindeki paralel aksiyomu hariç diğer aksiyomlara *Q*, paralel aksiyomuna da *p* diyelim, Öklidyen-olmayan bir geometrinin paralel aksiyomu bu durumda ¬p olacaktır. Bu örneklendirme sonucunda, *p* yerine ¬p konulduğundan, *Q* ve ¬p birlikte bir aksiyom kümesi oluşturmuş olur. Yeni oluşturulan bu küme kendi içinde tutarlıysa, *p*'nin *Q*'dan bağımsızlığı da gösterilmiş olur. Zira eğer *p, Q*'ya bağımlı olsaydı; *p*, *Q*'dan türetilebiliyor olurdu. Bu durumda da *Q*'dan *p* türetilebildiği için, *Q* ve ¬p'den oluşan aksiyom kümesi tutarsız olurdu.

zey siteminde yerine koyma ve bu geometriyi sağlayan bir yorum bulma ile gösterilerek Hilbert'in sisteminin de tutarlılığı gösterilmiş olur, ama Hilbert'in sistemi genel ve ikinci-düzey bir sistem olduğu için, bu durum tikel ve birinci-düzey başka bir geometri olan Öklidyen geometrinin tutarlılığını garantilemez.

Blanchette, Frege'nin Hilbert'in göreli tutarlılık kanıtlarını neden geçerli bulmadığını şu şekilde açıklar (Blanchette, 2018):

- *AX*, Hilbert'in aksiyomlarını içeren tümce kümesi;
- genel durum, yani *AX* tümce kümesindeki n tekrar-yorumlanabilir terim ile örtük olarak tanımlanmış n-boşluklu bağıntı;
- , *AX*'in terimlerinin sıradan geometrik anlamlarını aldığı düşünce kümesi (örneğin burada nokta geometrik noktayı temsil eder);
- ise, *AX*'in terimlerinin Hilbert'in tekrar-yorumlaması ile anlam kazandığı düşünce kümesidir (bu durumda nokta bir reel sayı çifti anlamına gelir).
- Hilbert'in 'in tekrar-yorumlanmasıyla inşa ettiği n-öğe, 'ı sağlar. 'ın tutarlılığı ise'in sağlanmasına/gerçekleşmesine yol açar. Frege'nin itirazı, 'ın tutarlılığından'in tutarlılığına geçilebilse de, 'in tutarlılığından 'nin tutarlılığına geçmenin sorunlu olması noktasındadır. Bunun nedeni, ve 'nin özel geometriler olması, 'in ise genel bir durumu ifade etmesidir. Özet olarak, özel geometriler genel aksiyomların özel örnekleridir ve özel bir geometride çelişki olmamasından yola çıkılarak genel geometrinin tutarlılığına ulaşılabilse de, başka bir özel geometrinin tutarlılığı sonucuna ulaşılamaz. Bu nedenle, 'ın tutarlılığından ya da 'in sağlanabilirliğinden 'nin tutarlılığına geçilecekse, bu adımın açıkça gösterilmesi gerekir.

Halbuki Hilbert açısından böyle bir açıklamaya ihtiyaç duyulmaz. Hilbert'e göre tutarlılık, *AX*'in geometrik terimlerinin yer-tutucu olarak ele alınması durumunda, *AX* tarafından tanımlanan kavram ve ilişkilerin iskelesine (İng. scaffolding) uygulanır. Bu nedenle, 'nin tutarlılığı, yalnızca 'ın tutarlılığı sağlandığında geçerli olur. Zira her iki düşünce kümesi de aynı iskelenin örneklemesidir (Blanchette, 2018). Frege için, geometrik yorum üzerinden sağlanan tutarlılık ile reel sayılar yorumu üzerinden elde edilen tutarlılık farklı iken ve Frege, Hilbert'in 'den 'ye geçişinin açıklamasını isterken, Hilbert'in peşinde olduğu tek bir soru vardır ve tümcelerin doğru ifade edildiğini gösteren bir yorum bulunduğunda bu soru cevaplanmış olur. Yani Hilbert'in yaklaşımında, 'nin tutarlılığından 'nin tutarlılığına yapılmış bir geçiş zaten söz konusu değildir.

Bunlara ek olarak, Frege açısından Hilbert'in aksiyomla tümceleri mi düşünceleri mi kastettiği de belirsizdir. Frege için, tutarlılık ve bağımsızlık önermelerin ya da tümcelerin değil, düşüncelerin konusu olduğu gibi, düşünceler belirli bir konu üzerine olduklarından ötürü, belirli kelimelere farklı anlamlar yükleyerek elde edilen tekrar-yorumlama, düşüncelere uygulanabilir değildir: bu tarz bir tekrar-yorumlama sadece tümceler için söz konusu olabilir. Eğer Hilbert aksiyomlarına tekrar-yorumlama uyguluyorsa, onları tümce olarak görüyor demektir. Ancak aksiyomların bağımsızlık ve tutarlılığını kanıtlamaya çalışıyorsa, bu da onları düşünce olarak değerlendirdiği anlamına gelir. Bu çelişki, Hilbert'in aksiyom anlayışının net olmadığını gösterir (Blanchette, 2018) ve düşünce kümeleriyle tümce kümeleri arasında açıklanması gereken çıkarımlar yapıldığı anlamına gelir.

Sonuç olarak, Frege'nin görüşleri, bu iki ana tartışma çerçevesinde hem Hilbert'in sistemini daha iyi anlamamıza yardımcı olmuş, hem de dil-dünya ilişkisi, tanımların ve aksiyomların doğası, kavram-nesne ilişkisi ve birinci-düzey ile ikinci-düzey kavramlar arası ilişkilere dair önemli açıklamalar sunmuştur. Günümüzde aksiyomatizasyona yönelik standart görüş, Hilbert'in anlayışını sürdürse de Frege'nin itiraz ettiği noktaların ne dereceye kadar yanıtlandığı hala önemli bir soru işareti olarak kalmaktadır.

3. İhtilafın Kaynağı Üzerine: Görü ve Uzay Nesnesi

Geometri aksiyomlarının statüsüne yönelik Frege-Hilbert ihtilafı değerlendirildiğinde, Frege'nin Hilbert'in göstermiş olduğu tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarını geçersiz bularak Hilbert'in devrimci bakış açısını yakalayamamış olması yorumunun literatürde öne çıktığı görülür (Blanchette, 1996, s. 318). Aksiyomatik bakış açısının ancak kısmi olarak yorumlandığı ve soyut yapılar arasındaki benzerlikler üzerinden karakterize edilebileceği gerçeği ortaya çıktıktan sonra, Hilbert'in sistemi kabul görmüş, modern matematik bu anlayış doğrultusunda ilerlemiş ve birçok verimli çalışma gerçekleştirilmiştir. Bununla birlikte, Hilbert'in tutarlılık ve bağımsızlık kanıtları önemli meta-teoretik sonuçlar sağlasa da Frege'nin itiraz ettiği şekliyle bu kanıtların, geometri aksiyomlarının tutarlılık ve bağımsızlıklarını gerçekten sağlayıp sağlamadıkları değerlendirilmelidir.

Birçok yorumcu açısından ihtilafın temelinde, Hilbert'in yalnızca sentaktik tutarlılığı hedeflemesine karşılık, Frege'nin geometri bağlamında semantiği de göz önünde bulundurma gerekliliğini öne çıkarması yer almaktadır. Frege'nin itirazlarının kulağa ilk başta şaşırtıcı gelmesinin sebebi ise, mantıkçılık projesindeki en önemli iddialarından birisi olan aritmetiksel doğruların mantık ilkelerinden çıkarımsanabilmesi iddiasının Hilbert programının da itici gücü olmasıdır. Halbuki geometri Frege için, aritmetiğin aksine doğruları mantık ilkelerinden çıkarımsanamayacak alanlardan birisidir, yani Öklidyen geometrinin doğruları mantığın doğrularından bağımsızdır ve görüye dayanır.

Bu konuyu daha detaylı ele aldığımızda, Hilbert'in sisteminin mantıksal terimlerin anlamlarını sabit tuttuğunu, mantıksal olmayan terimleri ise yalnızca şematik bir şekilde ele aldığını ve bu terimlerin semantik bir değeri bulunmadığını görürüz (Blanchette, 1996, s. 319-320). Başka bir ifadeyle, aksiyomlar herhangi bir tikel konuyu ifade etmedikleri için, çeşitli yorumlara açık olup mantıksal olmayan terimlere çeşitli özellikler ve ilişkiler atanmasını sağlayabilirler. Tutarlılık kanıtları da bu yeniden-yorumlama esasına dayanarak sunulmuştur. Bu perspektiften bakıldığında, Hilbert'in sisteminde mantıksal çıkarım açısından gizli bir kısıtın mevcut olduğu görülür: bir tümcenin diğerlerinden türetilme ilkeleri, mantıksal olmayan terimlerin içeriklerinden bağımsızdır. Dolayısıyla Hilbert açısından çıkarımlar konu-nötr olup, tutarlılıktan anlaşılan sentaktik tutarlılıktır.

Öte yandan Frege'nin *Kavram Yazısı*'nda oluşturduğu biçimsel dizge konu-nötr gibi gözükse de ve Frege açısından mantığın ilkelerinin sentaktik dönüşüm kurallarıyla ifade edilebileceği düşünülebilir olsa da, ihtilaf Frege'nin tutarlılık ve bağımsızlık gibi temel mantıksal ilişkilerin tümceler değil, düşünceler düzeyinde gerçekleştiğini savunmasından kaynaklanır. Frege, bir düşüncenin çeşitli tümcelerle ifade edilebileceği görüşündedir ve bu görüşün arkasında "kavramsal analiz" anlayışı yer alır (Blanchette, 1996, s. 322-324). Buna göre, bir düşünceyi ifade eden ve sentaktik olarak basit olan bir tümcenin içerdiği kavramlara kavramsal analiz uygulandığında, elde edilen tümce, kavramları daha basit kavramlara ayrılamayan, sentaktik olarak daha karmaşık bir tümcedir. Her iki tümce de aynı düşünceyi ifade eder, ancak kavramsal analize tabi tutulmamış basit tümcenin sağladığı çıkarımlar, mantıksal analiz sonucunda elde edilen tümcenin sağladığı çıkarımların tamamını gösteremez. Bu farkın arkasında, Frege'nin türetilebilirlik ve kanıtlanabilirlik arasındaki ayrımı yatmaktadır.

Türetilebilirliği tümceler üzerinden tanıtırken, kanıtlanabilirliği düşünceler üzerinden tanıtan Frege'ye göre türetilebilirlik-kanıtlanabilirlik ayrımı, tutarlılığın düşüncelerle ilgili olduğunu ve bir düşünce kümesinin ancak kendisinden bir çelişki kanıtlanamıyorsa tutarlı sayılacağını gösterir. Bir düşünce kümesini ifade eden bir tümce kümesi üzerinden ise, o düşünce kümesinin tutarlılığı değil ancak tutarsızlığı gösterilebilir. Yani, düşünceleri ifade eden tümce kümesinden sentaktik olarak çelişki türetilebiliyorsa, bu düşünce kümesi tutarsızdır. Fakat çelişki türetilemiyorsa, düşünce kümesinin tutarlılığına dair herhangi bir pozitif çıkarımda bulunulamaz. (Blanchette, 1996, s. 325-327). Örneğin "B noktası, A ve C noktaları arasındadır" ve "B noktası, C ve A noktaları arasındadır" tümceleri ele alınıp "arasındalık" kavramı kavramsal analize tabi tutulduğunda, birinci tümcenin ifade ettiği düşüncenin, diğer tümcenin ifade ettiği düşünceyi zaten içerdiği görülür. Dolayısıyla düşünceler üzerinden gittiğimizde, sıralılık belirten ek bir aksiyoma gerek olmadığı görülür. Yani "A, B, C bir doğru üzerindeki noktalar olmak üzere, B, A ile C'nin arasında ise, B aynı zamanda C ile A'nın da arasındadır" gibi bir aksiyom gereksiz hale gelir. Bu durumda Hilbert açısından bağımsız olan bu aksiyom, Frege açısından diğer sıralama aksiyomlarına bağımlıdır.

Özetle Frege'nin bakış açısına göre sentaktik tutarlılık, düşüncelerin tutarlılığını garantilemez. Bir düşünce kümesi tutarsız olabilirken, onu ifade eden ve mantıksal analize tabi tutulmamış tümceler tutarlı olabilirler. Bunun nedeni, mantıksal analizin, mantıksal sonuçların önceden belirlenmemiş bağlantılarını açığa çıkarma potansiyelidir (Blanchette, 1996, s. 331). Dolayısıyla, Hilbert'in model-kuramsal yaklaşımında, mantıksal-olmayan terimlerin içeriği önemsiz; aynı sentaktik biçime sahip tümceler, aynı model-kuramsal özelliklere sahip olabilirken, tutarlılık ve bağımsızlığı semantik açısından ele alan Frege için, Hilbert'in sentaktik tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarının yetersiz olması anlaşılabilir bir durumdur.

Frege açısından, bağımsızlığın çıkarımlar üzerinden kanıt-kuramsal olarak mı, yoksa anlam açısından doğrulukla bağlantılı olarak mı tanımlanacağı, tutarlılık ve bağımsızlık kanıtlarına yönelik itirazlarında öne çıkan ikinci meseledir (Eder, 2016, s. 6-9). Frege'nin yazılarından, aksiyomların doğru düşünceleri ifade ettiği klasik aksiyomatik sistemlerin, gerçek aksiyomların bağımsızlığı için gerekli görüldüğü anlaşılabilir. Frege, temel doğruları kullanma gereksinimini vurgular çünkü bağımsızlık kanıtında olduğu gibi, kanıtlanabilirlik ve doğruluk arasında bir bağlantı kurulması gerektiğine inanır. Dolayısıyla Frege, öncüllerin doğruluğunun kabul edilmediği bir kanıtlama anlayışını kabul etmez.

Frege'nin itiraz ettiği üçüncü nokta ise, Hilbert'in sisteminde varlık ve tutarlılık arasında ortaya çıkan döngüselliğin, Hilbert'in mutlak tutarlılık kanıtı sunamamasından kaynaklandığıdır (De Castro, 2018: 120). Açacak olursak, Hilbert bir grup aksiyomun tutarlılığını belirli modellerin varlığına başvurarak göstermiş, ancak matematiksel nesnelerin varlığını da tutarlılık üzerinden tanımlamış ve bu yaklaşım bir döngüselliğe yol açmıştır. Hilbert'in bu noktadaki görüşünü daha iyi anlamak için, Frege ve Hilbert arasındaki kavram anlayışlarındaki farklılıklara bakmak gerekir. Frege'nin kavram anlayışında bir kavramın kaplamına nelerin düştüğünün belirli olması gerekirken, Hilbert bunu anlamsız bulur ve kavramları tanımlayan aksiyomların çelişkisizliğini göstermenin yeterli olduğunu savunur.

Hilbert'in konuya ilişkin diğer düşünceleri incelendiğinde, aslında bir çeşit yapısalcılığı (İng. structuralism) savunduğu anlaşılabilir (De Castro, 2018, s. 119-120). Bu yapısalcılığın temel sorunu, aksiyomatik dizge ile tanımlanan yapıların tekrar-yorumlanması ile oluşturulan ve aksiyomatik dizgeyi örneklendiren sistemlerin, belirli bir arka plan ontolojisine dayandırılmasını gerektirmesidir. Bu arka plan ontoloji, yapısalcı olmayan bir şekilde tanımlanmalı, yani aksiyomları, söz konusu yapıların tanımlayıcı koşulları değil, mutlak anlamda doğru önermeler olarak ele alınmalıdır. Bu durum aksiyomatik dizgelere salt biçimsel bir yaklaşımın bir yerden sonra tıkanacağını gösterir. Örneğin, Hilbert geometri aksiyomlarının tutarlılığını, reel sayılar teorisine dayandırarak göstermiştir. Bu durumda geometrik aksiyomların tutarlılığı aritmetik aksiyomların tutarlılığı ile gösterilebilse de, aritmetik aksiyomların tutarlılığının gösterilmesi için mutlak bir kanıt gerektirir.

Frege'nin tutarlılık ve bağımsızlık kanıtları üzerinden yeni aksiyomatik sisteme yönelttiği bu eleştirilerin temelinde ise, değerlendirmelerde ortak olarak öne çıktığı üzere, geometri-görü ilişkisi yer alır. Buna göre Frege'nin asıl meselesi, analitik-sentetik sınırını, yani sadece mantıksal kanunları kullanarak kanıtlanabilen şeylerle, sadece görüye dayalı olarak kanıtlanabilen şeyler arasındaki ayrımı netleştirmek olarak yorumlanabilir (Eder, 2016, s. 6-9). Dolayısıyla geometrinin temellendirilmesi bağlamında Frege açısından geometrinin görüye dayanması öne çıkar.

Frege için uzay görüsü üç boyutlu ve düzdür; geometrinin aksiyomları ise uzaydaki geometrik düzlemsel nesneler hakkında konuşan apaçık doğrulardır (Shipley, 2015, s. 2-4). Ancak Frege, geometrinin dayandığı görüyü detaylı bir biçimde açıklamaz. Frege'nin yazılarından anlaşıldığı kadarıyla, onun geometriyi temellendirdiği görü, öznel veya psikolojik bir görüden ziyade, herkes tarafından paylaşılan nesnel bir şeydir. Ayrıca onda nesnel olan şey, kanunlara konu olan ve kelimelerle de ifade edilebilir olandır, zira saf görüsel olan iletilemez.

Öte yandan birçok araştırmacı Hilbert programının karşılaştığı sorunların temel sebeplerinden biri olarak görü fikrinden uzaklaşılmış olmasını gösterir. Örneğin Mancosu'nun Nelson'dan aktardığına göre, matematikten epistemolojik meselelerin dışlanması, aritmetiği anlamsız bir çeşit oyuna indirgemektedir, halbuki aritmetik için oluşturulan meta-matematiğe görüsüz bir biçimde gidilmesi mümkün değildir (Mancosu, 1998, s. 174). Başka bir deyişle, ne matematiksel aksiyomların epistemik karakterleri ne de saf görünün matematiksel yargılar için epistemik kaynak olarak varlığı inkâr edilemez.

Bununla beraber, Hilbert'in biçimselciliğinin matematiği yalnızca işaretlerin manipülasyonuna indirgeyen bir anlayış olmadığı da savunulmaktadır. Örneğin Güven'e göre, Hilbert'in *Geometri'nin Temelleri* eserinin girişinde, Kant'tan alıntı yaparak "bütün bilgimiz görüyle başlar, kavramlara geçer, idelerde sona erer" ifadesini kullanması, biçimselciliğinin yalnızca formel bir yaklaşımı değil, aynı zamanda matematiğin epistemolojik temellerine dair bir düşünceyi de içerdiğini gösterir (Güven, 2020, s. 146). Hilbert aksiyomların kendilerinin bir doğruluk değeri taşımadığını kabul ederek aksiyomatik yöntemde önemli bir değişikliğe yönelmiş olsa da, kanıtlama zincirinde olmasa dahi geometrinin olanağını belirlerken görüye hala bir rol atfetmektedir. Buna göre Hilbert, uzay ya da sayı bağıntılarını formel bir dizgeyle ifade edebilmek için, bu dizgede somut bir görüsel kavrayışımızın olması gerektiğini savunur. Bu somut verilmişliğin, görüsel kavrayış sayesinde işaret/im haline getirildiği anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, Hilbert'in aksiyomatik yaklaşımı, aksiyomları dizgenin tutarlılığıyla koşul altına alarak epistemolojik sorunları matematiksel olanlardan ayırırken, aynı zamanda matematik yapabilmenin ön koşulu olarak görüsel verilmişliği kabul etmeye devam eder.

Görüldüğü gibi Frege ve Hilbert arasındaki ihtilaf, yalnızca aksiyomatizasyon, tanım ve tutarlılık gibi sistematik ve metodolojik farklılıklardan kaynaklanmamaktadır; esasen ihtilafın kökeninde, iki düşünürün geometri ve uzaya dair farklı anlayışları yer almaktadır. Hilbert'in görüsel zemini olanak açısından koruduğu kabul edilse bile, ikilinin uzay görüsünden ne anladığı ve Frege'nin itirazlarının tamamen ortadan kalkıp kalkmadığı soru işareti olarak kalmaya devam etmektedir.

Sonuç

Araştırmaya konu ettiğimiz ihtilafın önemli noktalarından ilki, Hilbert'in geometriye dair sentaktik yaklaşımının karşısında, Frege'nin semantiğin de devreye sokulması gerekliliğini savunan anlayışının yer almasıdır. Frege'nin *Kavram Yazısı*'ndaki yaklaşımının bir benzerini geometride sürdürmekte olan Hilbert açısından geometrinin aksiyomları, aritmetik aksiyomlar gibi mantıksal-olmayan terimlerin içeriğinden bağımsız bir şekilde, yalnızca şematik bir biçimde ele alınabilirler. Bu yaklaşım, aksiyomların yalnızca yapısal ve biçimsel özelliklerine odaklanarak, içeriklerinden bağımsız olarak değerlendirilmesini sağlar. Frege ise geometriyi, aritmetiğin aksine, mantığa dayandırmak yerine belirli bir nesnel uzay görüsüne dayandırdığından, Frege açısından geometrik aksiyomların mantıksal-olmayan terimleri içerikten bağımsız ele alınamazlar.

Frege'nin Hilbert ve Korselt'e yönelik eleştirileri de, özellikle geometri bağlamında, Hilbert'in salt şematik yaklaşımının yetersiz olduğunu vurgular. Hilbert'in aksiyomatik dizgesi sadece biçimsel bir yapıyla mı sınırlıdır, yani mantıksal olmayan terimlerin içeriklerinden bağımsız mıdır? Eğer öyleyse, Hilbert'in sisteminde korunan "üç boyutluluk" veya "süreklilik" gibi uzayla ilgili kavramların temeli nedir?

Çitil'in *Matematik ve Metafizik* kitabında dikkat çektiği gibi (Çitil, 2012, s. 202), örneğin Hilbert Tamlık Aksiyomu ile, daha önce açıkladığı beş aksiyom grubuna, tamamen geometrik bir doğası olmayan ve daha çok teorik bir bakış sağlayan ek bir aksiyom getirmiştir (Hilbert, 1950, s. 15). Bu aksiyomla Hilbert, geometrinin temel öğelerini nokta, doğru ve düzlem olarak sınırlamış ve bu öğelere beş aksiyoma uyan yeni bir geometri oluşturulacak başka bir öğe eklenemeyeceğini belirtmiştir. Eğer Hilbert'in yaklaşımı sadece şematikse, sistemini üç boyutla sınırlandırmanın nedeni uzayın üç boyutluluğundan başka ne olabilir?

Detaylandırmak gerekirse, Hilbert'in geometriyi aksiyomatize ederken uyguladığı yaklaşım, aksiyomların içerikten bağımsız ve terimlerinin anlamdan yoksun olduğu, çeşitli modellerle doldurulabilecek ve bir özel model mevcut olduğunda tutarlılığı sağlanabilecek bir yapı olarak görülmektedir. Bu bağlamda, Hilbert'in geometri aksiyomatizasyonu için başvurduğu model reel sayılardır. Hilbert'in görüşüne göre, bu yöntemle Öklidyen geometrinin tutarlılığı, reel sayıların tutarlılığına bağlanarak sağlanmış olur ve böylece göreli bir tutarlılık kanıtı sunulmuş olur.

Bu noktada, Hilbert'in tutarlılık ve bağımsızlığa yönelik kanıtları incelendiğinde, model olarak doğrudan reel sayıları değil de'ü kullandığı görülür. Burada sorulması gereken soru, Hilbert'in'ü model olarak seçmesinin gerçekten rastgele bir tercih olup olmadığıdır. Hilbert her ne kadar'ü seçerken uzayla ilgili herhangi bir içerik düşünmeden hareket ettiğini söylemiş olsa da,'ün kendisi üç boyutluluk ve süreklilik gibi, uzay nesnesine ait gibi gözüken özellikler taşımaktadır. Bu, Hilbert'in aksiyomlarını içerikten bağımsız olarak sunduğunu iddia ettiği dizgenin tutarlılık kanıtının dayandığı'ün, aslında uzay nesnesinden bağımsız olup olmadığını sorgulamamıza yol açar. Bu soru, Frege'nin de vurguladığı gibi, geometri aksiyomatizasyonunun ve tutarlılık kanıtlarının içerikten bağımsız bir biçimde yapılıp yapılamayacağına, yani geometrinin uzay görüsü üzerinden temellendirilip temellendirilmediğine dair sorularla örtüşmektedir.

Ancak, Hilbert'in geometrinin olanağı açısından görüye yer verdiği göz önüne alındığında, bu görüsel zeminden yalnızca olanak açısından ve işaretler/imler düzeyinde bahsettiği ve dizgenin kendisine ve kanıtlama zincirine görünün sızmadığını iddia ettiği görülür. Koç'un Frege'ye yönelik itirazına benzer şekilde (Koç, T.y.: 52-53), Hilbert bu bağlamda herhangi bir transandantal zemin araştırması yapmamıştır. Sonuç bölümünde alıntı yapılmasa daha iyi olur. Bölümün amacı problematiğin altını çizmek ve sistematik bir şekilde elde edilen verileri değerlendirmek olmalı)

Öte yandan, Frege her ne kadar Hilbert'in sistemine yönelik eleştirilerinde anlamın sızabileceğine dair ipuçları sunmuş ve bu fikrini geometrinin görüye dayandığını savunarak temellendirmiş olsa da, kendisi de görünün nesnesinin mahiyeti hakkında bir açıklamada bulunmamıştır. Frege'nin geometrinin sentakse indirgenemediği görüşünün ileriye taşınamamasında, geometrinin nesnesine dair yeterli ontolojik araştırmanın eksikliği önemli bir etken olarak görünmektedir. Eğer bu eksiklik giderilirse ve geometrinin temellendirilmesi semantiği de kapsayan ontolojik bir bakış açısıyla ele alınırsa, hem Öklidyen hem de Öklidyen-olmayan geometrileri anlamayı sağlayacak daha kapsamlı bir uzay nesnesi hakkında konuşmak mümkün olacaktır.

Kaynakça | References

Barker, S. (2003). *Matematik felsefesi* (Çev. Yücel Dursun). İmge Yayınları.

Blanchette, P. A. (1996). Frege and hilbert on consistency. *The Journal of Philosophy*, *93*(7), 317-336.

Blanchette, P. A. (2018). The Frege-Hilbert controversy. Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/frege-hilbert/

Brown, J. R. (2008). *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. Routledge.

Coffa, J. A. (1991). *The semantic tradition from Kant to Carnap: To the Vienna station*. Linda Wessels (Ed.), Cambridge University Press.

Çevik, A. (2019). *Matematik felsefesi ve matematiksel mantık*. Nesin Yayıncılık.

Çitil, A. A. (2012). *Matematik ve metafizik: Sayı ve nesne*. Alfa Basım Yayım.

De Castro, M. F. (2018). The controversy between frege and Hilbert. Filosofía Univ (Rev.), *Costa Rica*, *LVII*(147), 113-128.

Eder, G. (2016). Frege's 'on the foundatons of geometry' and axiomatic metatheory. *Mind*, *125*, 5-40.

Frege, G. (1971a). On the foundations of geometry by G. Frege – I. İçinde E.-H. W. Kluge (Çev.), *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic* (ss. 22-37). Yale University Press.

Frege, G. (1971b). On the foundations of geometry by G. Frege – II. İçinde E.-H. W. Kluge (Çev.), *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic* (ss. 49-112). Yale University Press.

Gözkân, H. B. (2008). Sunuş. İçinde E. Nagel & J. R. Newman (Yazarlar), *Gödel Kanıtlaması* (ss. xiii-xviii). Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi.

Güven, Ö. (2020). Hilbert, matematiğin temelleri ve görü. *Felsefe Arkivi 52*, 113-149.

Hilbert, D. (1950). *The foundations of geometry* (Çev. E. J. Townsend). The Open Court Publishing Company.

Hilbert, D. (1967). The foundations of mathematics. İçinde J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel* (ss. 464-479). Harvard University Press.

Kant, I. (2000). *Critique of pure reason* (Çev. Paul Guyer & Allen W. Wood). Cambridge University Press.

Kluge, E.-H. W. (1971a). Frege-Hilbert correspondence leading to "On the foundations of geometry". İçinde E.-H. W. Kluge (Çev.), *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic* (ss. 6-21). Yale University Press.

Kluge, E.-H. W. (1971b). Introduction. İçinde E.-H. W. Kluge (Çev.), *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic* (ss. xi-xlii). Yale University Press.

Koç, Y. (t.y.). Matematiğin ontolojisi bakımından Kant ile Frege karşılaştırması. *Felsefe Ar*. F., 4, 49-54.

Korselt, A. (1971). On the foundations of geometry. İçinde E.-H. W. Kluge (Çev.), *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic* (ss. 38-48). Yale University Press.

Mancosu, P. (1998). Hilbert and Bernays on metamathematics. İçinde *From Brouwer to Hilbert* (ss. 149-188). Oxford University Press.

Nagel, E. & Newman, J. R. (2008). *Gödel kanıtlaması* (Çev. Bülent Gözkân). Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi.

Poincare, H. (1964). *Bilim ve hipotez* (Çev. Fethi Yücel). M.E.B.

Shipley, J. (2015). Frege on the foundation of geometry in intuition. *Journal for the History of Analytical Philosophy*, 3(6), 1-23.

Sterrett, S. G. (1994). Frege and Hilbert on the foundations of geometry. *Dept. of Philosophy Graduate Student Colloquium*. University of Pittsburgh.

Zach, R. (2019). Hilbert's program. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program

Zach, R. (t.y.). *Hilbert's program then and now*. (Revised and expanded version of the entry at Stanford Encyclopedia of Philosophy [Zach, 2003a]). (Y.y.): (T.y.).