

Türk ve Amerikan Matematik Ders Kitaplarının Hareket ve Eşleştirme Yaklaşımları Bağlamında Karşılaştırılması: Yansıma Dönüşümü Örneği*

A Comparison of Turkish and American Mathematics Textbooks in the Context of Motion and Mapping Perspectives: The Case of Reflection Transformation

Kübra İler¹, Murat Akarsu², Mehmet Fatih Öçal³

¹Arş. Gör., Süleyman Demirel Üniversitesi, kubrailer@sdu.edu.tr, (<https://orcid.org/0000-0002-3052-0256>)

²Sorumlu Yazar, Doç. Dr., Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, drmuratakarsu@gmail.com, (<https://orcid.org/0000-0002-8769-5460>)

³Prof. Dr., Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, fatihocal@gmail.com, (<https://orcid.org/0000-0003-0428-6176>)

Geliş Tarihi: 12.10.2024

Kabul Tarihi: 17.02.2025

ÖZ

Bu çalışma, Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'ndeki lise matematik ders kitaplarının yansıma dönüşümünü nasıl ele aldığını, hareket ve eşleme perspektiflerine odaklanarak incelemektedir. Ders kitapları, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamasında önemli bir rol oynamaktadır. Farklı perspektifler göz önünde bulundurulduğunda, hareket perspektifi, eşit uzaklık ve diklik gibi temel özelliklere vurgu yapmadan, şekillerin simetri eksenini boyunca yansıtılmasını içerir ve bu durum kavram yanlışlarına yol açabilir. Öte yandan, eşleme perspektifi bu temel özellikleri korur ve tüm noktaların düzlemde yansıtılmasına odaklanır. Çalışmada, her iki ülkeden iki ders kitabı, yansıma dönüşümünün tanımları, simetri ekseninin ele alınışı ve simetri tanım kümesi yaklaşımları açısından doküman incelemesi yöntemiyle analiz edilmiştir. Türk ders kitapları büyük ölçüde hareket perspektifini benimserken, eşleme perspektifine daha az yer vermektedir. Buna karşılık, Amerika Birleşik Devletleri ders kitapları daha çeşitli bir yaklaşım sergilemekte; birinin eşleme, diğersinin ise hareket perspektifine odaklandığı görülmektedir. Türk ders kitapları, örnekler ve etkinlikler yoluyla genellikle hareket perspektifini pekiştirirken, Amerika Birleşik Devletleri ders kitapları her iki perspektifi daha dengeli bir şekilde sunmaktadır. Çalışmanın bulguları, Türk ders kitaplarının öğrenciler ve öğretmenler arasında hareket perspektifinin tercih edilmesine katkıda bulunabileceğini göstermektedir. Amerika Birleşik Devletleri ders kitapları ise öğrencilerin her iki perspektifle de etkileşimde bulunmasına daha fazla olanak tanımaktadır. Sonuç olarak, her iki perspektifi de içeren öğretim materyallerinin, öğrencilerin yansıma dönüşümüne ilişkin kavramsal anlayışlarını geliştirebileceği ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Matematik ders kitapları, yansıma dönüşümü, hareket perspektifi, eşleştirme perspektifi, doküman incelemesi.

ABSTRACT

This study examines how high school mathematics textbooks from Türkiye and the United States address the concept of reflection transformation, focusing on two perspectives: motion and mapping. Textbooks play a crucial role in shaping students' understanding of mathematical concepts. When considering

*Bu çalışma 27-30 Eylül 2023 tarihleri arasında düzenlenen 15. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiriden üretilmiştir.

different perspectives, the motion perspective involves reflecting shapes across a symmetry axis without emphasizing key properties such as equal distance and perpendicularity, which can lead to misunderstandings. In contrast, the mapping perspective stresses reflecting all points on the plane while preserving these essential properties. The study analyzes two textbooks from each country, assessing their definitions of symmetry transformation, treatment of the symmetry axis, and approach to the domain of symmetry using a documentary analysis method. Turkish textbooks largely adopt the motion perspective, placing little emphasis on the mapping perspective. In contrast, U.S. textbooks display a more diverse approach, with one focusing on the mapping perspective and the other on the motion perspective. Turkish textbooks tend to reinforce the motion perspective through examples and activities, while U.S. textbooks present a more balanced view of both perspectives. The findings suggest that Turkish textbooks may contribute to a preference for the motion perspective among students and teachers. U.S. textbooks, however, offer more opportunities for students to engage with both perspectives. The study concludes that integrating both perspectives in teaching materials could enhance students' conceptual understanding of reflection and symmetry transformations

Keywords: Mathematics textbooks, reflection transformation, motion perspective, mapping perspective, documentary analysis.

GİRİŞ

Eğitim materyalleri öğretim ortamlarının verimliliğini artırmada önemli bir role sahiptir. 21. yüzyıl'da eğitimin niteliğini artırmak adına öğretmenlerden eğitim materyallerini etkin bir biçimde kullanmaları beklenmektedir. Eğitim materyallerinin kullanılması, öğrencilerin derslere karşı oluşturmuş oldukları olumsuz tutumların değişmesinde ve öğrencilerin eleştirel bakış açılarının gelişerek yaratıcılıklarının artmasına katkı sunmaktadır (Cnets, 2006). Eğitim ve öğretim sürecinde ulaşılabilirlik ve kullanım açısından yaygın olarak tercih edilen eğitim materyallerinden birisi de ders kitaplarıdır. Öğretim programlarının temsilcisi olarak görülen ders kitapları (Fan vd., 2013; Sherman, Walkington & Howell, 2016; Valverde vd., 2002), öğretmenler ve öğrenciler için önemli bir eğitim kaynağıdır. Matematik eğitimi öğrencilerin günlük yaşam becerilerini edinmede önemli role sahip olduğundan, matematik ders kitapları da öğrencilerin günlük yaşam becerilerini edinmelerinde ve başarılarını artırmada kritik bir öneme sahiptir. Matematik ders kitapları öğretmenlere derslerini planlamada (Alajmi, 2012; Li, 2000; Reys vd., 2004), konuları nasıl öğreteceklerine, kullanacakları öğretim yöntem ve metotlarına karar vermede (Hirsch & Reys 2009) bir rehber niteliğinde görev yapar. Aynı zamanda ders kitapları öğretmenlerin kendi pedagojik alan gelişimleri üzerinde bir rehber rolüne sahiptir (Newton & Newton, 2007; Remillard, 2018).

Öğretmenler matematiksel kavramları öğretmek için, öğrenciler ise öğrendiklerini pekiştirmek için matematik ders kitaplarından faydalanırlar. Dolayısıyla matematik ders kitaplarının içeriğinin konu anlatımı, örnekler, etkinlikler ve alıştırmalar bakımından kavramsal olarak güçlü nitelikte olması gerekmektedir. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [National Council of Teachers of Mathematics] [NCTM] (2000), öğrencilerin problem çözme, eleştirel düşünme, akıl yürütme ve ispat yapma becerilerini geliştirmelerine katkıda bulunan etkinliklerin öğrencilere sunulması gerektiğini vurgulamaktadır. Çünkü bu becerilerin geliştirilmesi aynı zamanda öğrencilerin matematik konularını kavramsal olarak öğrenmelerine yardımcı olmaktadır. Öğrencilerin konuları kavramsal olarak öğrenebilmeleri için üst düzey karmaşık yapıda problemler ve alıştırmalar çözmeleri gerekmektedir. Ders kitaplarının içeriğini analiz etmek öğrencilerin konuları kavramsal olarak öğrenmelerine ne derece katkı sunduğunu ortaya çıkarmak açısından oldukça önemlidir. Nitekim alanyazında öğrenci ve öğretmen görüşleri alınarak yapılan ve matematik ders kitaplarının içeriğinin yetersiz olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Korkmaz, Tutak & İlhan, 2020; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Şirin, Yıldız, 2020; Van Steenbrugge, Valeke & Desoete, 2013). Dolayısıyla ders kitaplarının öğrencilerin matematik başarıları üzerinde önemli bir etkisi olduğu söylenebilir (Hadar, 2017; Shield & Dole, 2013). Öğrenciler ve öğretmenler üzerinde bu denli öneme sahip olan ders

kitapları, son yıllarda çalışma odağı haline gelmiştir (Bütüner, 2020; Fan, 2013; Fan vd., 2018; Jones vd., 2014; Kar vd., 2018; Takeuchi & Shinno, 2020).

Fan ve arkadaşları (2013) matematik ders kitapları hakkında yapılan çalışmaları dört araştırma grubunda kategorize etmişlerdir: (i) matematik ders kitaplarının öğretim ve öğrenme sürecindeki rolü, (ii) matematik ders kitapları analizleri ve analizler üzerinden yapılan karşılaştırma çalışmaları, (iii) matematik ders kitaplarının öğrenme ve öğretme sürecini nasıl şekillendirdiğini sorgulayan çalışmaları ve (iv) diğer alanlardaki ders kitapları ile matematik ders kitaplarının karşılaştırmasını yapan çalışmalar. Matematik ders kitaplarının karşılaştırılması hakkında çalışmak, diğer ülkelerde kullanılan ders kitaplarından çıkarımlar yapmaya katkı sunar (Hawson, 2013). Bu çıkarımlar farklı ülkelerin matematik öğretiminde konuları kavramsal açıdan ele alış biçimleri, ders içeriklerinde hangi öğretim yöntem ve metotlarının tercih edildiği, materyal kullanımının ve ölçme değerlendirme işleyişlerinin nasıl olduğu olabilir.

Alanyazın çalışmaları incelendiğinde, başta Singapur, Amerika Birleşik Devletleri, Çin, Japonya, İngiltere ve Türkiye olmak üzere pek çok ülkenin matematik ders kitapları hakkında karşılaştırma çalışmalarının yapıldığı görülmektedir (Alajmi, 2012; Bütüner, 2020; Chen, 2024; Erbaş, Alacacı & Bulut, 2012; Fan & Zhu, 2007; Jones & Fujita, 2013; Kar vd., 2018; Mersin & Karabörk, 2021; Son & Senk, 2010; Takeuchi & Shinno, 2020). Bu çalışmalarda farklı ülkelere ait matematik ders kitapları, çeşitli konular (ör: kesirler, kesirlerde işlemler, cebir öğretimi vb.) ve beceriler (ör: problem çözme, ispat, mantıksal akıl yürütme) açısından detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Bu bağlamda, matematik öğretiminde önemli bir yer tutan ve farklı ülkelerin ders kitaplarında nasıl ele alındığı incelenmesi gereken konulardan biri de geometrik dönüşümlerdir. İlköğretim ve ortaöğretim matematik eğitiminde temel bir konu olan geometrik dönüşümler, kavramsal öğrenme açısından büyük bir öneme sahiptir (Ada ve Kurtuluş, 2010; Akarsu, 2018; Ortak Çekirdek Eyalet Standartları Girişimi [Common Core State Standards Initiative, CCSSI], 2010; Flanagan, 2001; Glass, 2001; Knuchel, 2004; NCTM, 2000; Yanık & Flores, 2009). Bu dönüşümler, öğrencilerin uzamsal ve görsel becerilerini geliştirerek (Bansilal & Naidoo, 2012; Clements & Battista, 1992; Edwards, 1997; Yanık, 2011), mantıksal akıl yürütme, problem çözme ve gerçek hayat durumlarını analiz etme yetkinliklerini kazanmalarına katkı sağlamaktadır (Aktaş & Ünlü, 2017; Coxford, 1973; Hollebrands, 2003; Yanık, 2014). Ayrıca, cebir ve geometri tabanlı bazı ileri düzey matematik konularının (ör., eşlik, benzerlik, fonksiyon ve trigonometri) kavramsal olarak öğrenilmesine de yardımcı olmaktadır (Flanagan, 2001; Yanık, 2006). Dolayısıyla, farklı ülkelerdeki matematik ders kitaplarının geometrik dönüşümleri nasıl ele aldığı ve bu konunun öğrencilere hangi bakış açısıyla sunulduğu, araştırılması gereken önemli bir konu olarak öne çıkmaktadır.

Geometrik dönüşümlerden yansıma dönüşümü konusu hakkında yapılan matematik ders kitabı karşılaştırması hakkında sınırlı sayıda çalışma bulunduğundan (Takeuchi & Shinno, 2020; Zorin, 2011), ders kitaplarını hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre inceleyen bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Aynı zamanda alanyazın çalışmaları sonucunda öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin hareket perspektifine sahip olmalarının nedenlerinden birinin de derslerde kullanılan ders kitapları olabileceği ihtimalinden dolayı bu çalışmanın amacı lise düzeyinde kullanılan Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri matematik ders kitaplarında bulunan yansıma dönüşümü konusunun hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre karşılaştırmasını yapmaktır. Bu bağlamda Türk ve Amerikan matematik ders kitaplarında ilgili konuya yönelik tanımlar, örnekler, problemler ve alıştırmalar incelenmiştir.

1.1.Geometrik Yansımanın Hareket ve Eşleştirme Perspektiflerine Göre Anlaşılması

Yansıma dönüşümü, geometrik dönüşümler içinde önemli bir yere sahip olup, öğrencilerin uzamsal düşünme yeteneklerini geliştirmelerine, simetri kavramını anlamalarına ve soyut matematiksel ilişkileri keşfetmelerine katkı sağlar (Clements & Battista, 1992; Edwards,

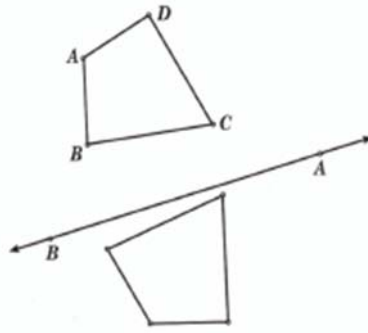
1997). Bir şeklin belirli bir eksene göre simetrik olarak yer değiştirmesi esasına dayanan bu dönüşüm, öğrencilerin görsel-uzamsal becerilerini geliştirerek geometri ile cebir arasındaki bağlantıyı kurmalarına yardımcı olur (Yanık, 2011; Hollebrands, 2003). Ayrıca, eşlik ve benzerlik gibi temel matematiksel kavramların anlaşılmasını desteklerken, dönüşümleri cebirsel olarak ifade edebilme becerisi kazandırarak fonksiyon bilgisinin temellerini oluşturmalarına da katkıda bulunur (Flanagan, 2001). Yansıma dönüşümü, yalnızca matematiksel bağlamda değil, aynı zamanda mimarlık, sanat, mühendislik ve fizik gibi pek çok alanda da önemli uygulamalara sahiptir (Bansilal & Naidoo, 2012; Yanık & Flores, 2009). Bununla birlikte, bu dönüşüm yalnızca geometri içinde değil, aynı zamanda öteleme ve dönme gibi diğer geometrik dönüşümlerin (Yanık, 2006) ve nokta, düzlem, doğru parçası, tanım ve değer kümesi gibi temel matematiksel kavramların öğrenilmesinde de kritik bir rol oynar (Akarsu, 2018). Dolayısıyla, yansıma dönüşümünün kavramsal olarak derinlemesine anlaşılması, öğrencilerin hem akademik başarılarını artırmada hem de matematiksel düşünme becerilerini geliştirmede büyük bir öneme sahiptir.

Dolayısıyla yansıma dönüşümünün öğrenciler tarafından kavramsal olarak öğrenilmesi beklenmektedir. Alanyazın çalışmalarında yansıma dönüşümünün farklı tanımları olduğu görülmektedir. Yapılan tanımlamalar sonucunda yansıma dönüşümünün kavramsal olarak öğrenilmesinde iki önemli perspektifin ortaya koyulduğu görülmüştür: hareket ve eşleştirme perspektifleri (Hollebrands, 2003; Yanık, 2006). Geometrik yansımanın hareket perspektifi olarak anlaşılması demek, yansıma dönüşümü uygulanırken eşit uzaklık ve/veya diklik özelliklerini kullanmadan, sadece verilen noktaları veya şekilleri simetri ekseninin diğer tarafına yansıtmak demektir. Bunlara ek olarak verilen noktalar ve şekil dışında düzlemi boş olarak düşünmek demektir. Eşleştirme perspektifine göre yansıma dönüşümü ise, düzlem üzerinde bulunan tüm noktaları eşit uzaklık ve diklik özelliklerini koruyarak yine aynı düzlem üzerinde noktalara dönüştüren birebir ve örten bir fonksiyon şeklinde tanımlanmaktadır (Coxford, 1973; Martin, 1982; Zembat, 2007). Diğer bir ifadeyle, yansıma dönüşümü uygularken, eşit uzaklık ve diklik özelliklerini kullanarak düzlem üzerindeki sonsuz noktayı sonsuz noktaya eşleştirmek demektir. Yansıma dönüşümünün hareket perspektifi tanımına göre öğrenilmesi matematiksel olarak kavram yanılgısına sebep olduğundan (Flanagan, 2001; Yanık, 2006) yansıma dönüşümünün kavramsal olarak anlaşılmasında eşleştirme perspektifine sahip olunması beklenmektedir (Akarsu ve İler, 2022). Fakat alanyazın çalışmaları incelendiğinde öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin yansıma dönüşümünü kavramsal olarak anlamada hareket perspektifine sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır (Akarsu, 2018; Akarsu & İler, 2022; Flanagan, 2001; Yanık, 2006). Bu durumun nedenlerinden birinin matematik ders kitaplarının öğrencilerin eşleştirme perspektifine sahip olmasını destekleyen nitelikte içeriğe sahip olmamasından kaynaklanabilir (Akarsu, 2022).

Son yıllarda alan yazında yapılan çalışmalar, geometrik yansıma kavramsal olarak anlaşılmasında öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin farklı perspektifler doğrultusunda değerlendirdikleri görülmektedir. Literatürde geometrik dönüşümlere yönelik özellikle iki perspektife yoğunlaşıldığı görülmektedir: Hareket ve eşleştirme perspektifleri (Hollebrands, 2003; 2004, Yanık, 2006). Örneğin, Hollebrands'ın (2004) araştırmasında, lise öğrencilerinden bir dörtgeni [ABCD] eğik bir simetri eksenini [BA] boyunca yansıtmaları istendiğinde (bkz. Şekil 1), çoğu öğrenci yansıma noktalarını doğru şekilde yerleştirmek için eşit uzaklık ve diklik özelliklerini kullanmamıştır ve şekli yanlış yerde konumlandırmışlardır. Bu durum, öğrencilerin simetri ekseninin rolü olan eşit uzaklık ve diklik özelliklerini kavramsal olarak anlamada veya bu özellikleri yansıma dönüşümünde kullanmalarında zorluk yaşadıklarını göstermektedir. Sonuç olarak, öğrenciler simetri ekseninin rolünü anlamada hareket perspektifine sahiptirler.

Şekil 1

Örnek Yansıma Dönüşümü

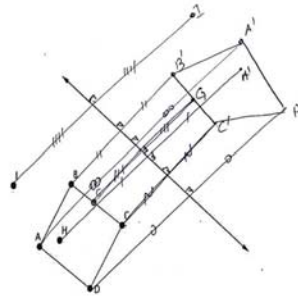


Yanık (2006) yılında öğretmen adayları ile yaptığı çalışmasında, öğretmen adaylarından bir yamuk şeklinin yansıtılmasını istemiştir. Öğretmen adayı önce yamuk şeklinin dört köşe noktalarına yansıma dönüşümü uygulayarak simetri ekseninin diğer tarafında belirlemiştir. Sonra bu noktaları birleştirerek yamuk şeklinin yansımasını tamamlamıştır. Yanık, köşe noktaları ve kenarlar dışında başka bir şeyi yansıtıp yansıtmadığını sorduğunda, öğretmen adayı "hayır" cevabını vermiştir. Öğretmen adayı, yansıma dönüşümünü uygularken düzlemdeki sonsuz noktaların yansıtılması gerektiğini belirtmek yerine sadece verilen şekli ve şekil üzerindeki belirli noktaları yansıttığını ifade ettiğinden, yansımanın tanım kümesi hareket perspektifine sahiptir.

Akarsu ve İler (2022) dört matematik öğretmeni ile yaptığı çalışmalarında ise, yansıma dönüşümü uygularken düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu anlamaları ve yansıma dönüşümünü sonsuz noktalara uygulamaları gerektiğini vurgulamaları için bir ABCD dörtgeni ve bu dörtgenin içinde ve dışında belirli noktaları işaretleyerek yansıma dönüşümü uygulamaları istenmiştir (bkz. Şekil 2). Matematik öğretmenleri önce dört köşe noktalarının yansımasını alarak ve bu noktaları birleştirerek dörtgeni oluşturmuşlardır. Sonrasında, dörtgenin içinde ve dışındaki noktaları yansıtarak yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. Yansıma dönüşümü uygularken neyi yansıttın sorusuna üç öğretmen sadece verilen şekle ve noktalara cevabını verirken, bir öğretmen düzlemde sonsuz nokta olduğunu ve yansıma dönüşümü uygularken görünen ve görünmeyen bütün noktalara uygulanması gerektiğini belirtmiştir. Sonuç olarak, yansıma dönüşümünü sadece verilen şekle ve noktalara uygulayan öğretmenler hareket perspektifine sahip iken, sonsuz noktalara uygulayan öğretmen yansıma dönüşümü eşleştirme perspektifine sahiptir.

Şekil 2

Örnek Yansıma Dönüşümü



Özetle, elde edilen bulgular, yansıma dönüşümünü dar bir çerçevede ele alan bireylerin hareket perspektifine, daha geniş bir bakış açısıyla değerlendirenlerin ise eşleştirme perspektifine sahip olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin hareket perspektifine yönelmesinin nedenlerinden biri, derste kullanılan ders

kitapları ve kaynaklar olabilir. Bu doğrultuda, bu çalışmanın araştırma sorusu şu şekilde belirlenmiştir:

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'nde liselerde yaygın olarak kullanılan ders kitapları, yansıma dönüşümünü hareket ve eşleştirme perspektifleri açısından nasıl ele almaktadır?

YÖNTEM

2.1 İncelenen Ders Kitapları

Bu çalışma, iki Amerikan ve iki Türk ders kitabının yansıma dönüşümü konusunda, hareket ve eşleştirme yaklaşımları açısından incelemeyi ve içeriklerini karşılaştırmayı amaçlamaktadır. Analiz sürecinde doküman analizi yöntemi kullanılmıştır (Merriam, 2009). Bu ders kitaplarında yansıma, öteleme ve dönme gibi farklı dönüşüm türleri ilgili öğretim programları (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; CCSSI, 2010) doğrultusunda sunulmaktadır. Bu çalışmada ise özellikle yansıma dönüşümü konusu üzerine odaklanılmıştır. Bu öğretim programlarının beklentileri doğrultusunda her iki ülkedeki öğrencilerin önceki yıllarda simetri eksenini hakkında bilgi sahibi oldukları varsayılmaktadır. Ancak bu konular Türkiye'de 12. sınıfta ayrıntılı olarak öğretilirken, CCSSI (2010) öğretim programını takip eden Amerika Birleşik Devletleri'ne bağlı eyaletlerde ise 10. sınıf veya sonrasında zorunlu ders olarak verilen geometri dersinde işlenmektedir. Amerika Birleşik Devletleri'nde, öğrencilerin seviyesine göre dersin alındığı sınıf seviyesi değişiklik gösterebilmektedir.

Türkçe ders kitaplarının kullanılmadan önce Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (TTKB) tarafından beş yıl süreyle onaylanması gerekmektedir. Türkiye, merkezi bir eğitim sistemine sahip bir ülkedir ve ders kitabı yayıncıları ulusal ve merkezi öğretim programına göre kitapları hazırlamaktadırlar. İncelenen iki Matematik ders kitabı Kemancı vd. (2021) ile Emin vd. (2021) tarafından hazırlanmış olup sırasıyla Türk Ders Kitabı 1 (TDK₁) ve Türk Ders Kitabı 2 (TDK₂) olarak kodlanmıştır. Her ikisi de TTKB tarafından onaylanan ve yaygın olarak kullanılan ders kitaplarıdır. Bu ders kitapları için herhangi bir yardımcı materyal ya da kitap bulunmamaktadır. Öğretmenler (veya okullarındaki matematik zümreleri) kullanacakları ders kitabını seçtikten sonra, sınıfta başka herhangi bir yardımcı veya ek materyal kullanmalarına izin verilmemektedir. Öğrencilerin bu konuyu öğrenmeleri için ders kitaplarının sağladığı fırsatları belirlemek amacıyla, Türk lise matematik öğretim programlarındaki kazanımlar da incelenmiştir. Türk lise ders kitaplarında simetri eksenine göre sekiz, simetrinin tanım kümesine göre ise dört aktivite bulunmaktadır. Aktiviteler birbirine benzer yapıda olduğundan, bulgular bölümünde yapılan açıklamalarda en belirgin örnekler paylaşılmıştır.

Amerika Birleşik Devletleri'nde 43 eyalet, okullarında CCSSI'nin sunduğu öğretim programını benimsemiştir. CCSSI (2010) standartlarını son yıllarda bazı eyaletlerin yürürlükten kaldırmıştır. Diğer bazı eyaletler ise benzer girişimlerde bulunmaktadırlar. Ancak bu öğretim programı hala birçok eyalette kullanılmaktadır. Ayrıca bazı eyaletler CCSSI'nin sunduğu öğretim programını temel alınarak kendi öğretim programlarını oluşturma çabasıındadırlar. Bu sebeple, bu çalışmada CCSSI ile uyumlu iki Amerikan ders kitabı seçilmiştir. Bu çalışmada Larson ve Battaglia (2024) ile Larson ve Boswell (2019) ders kitapları kullanılmıştır. Bu ders kitapları için sırasıyla Amerikan Ders Kitabı (ADK₁ ve ADK₂) kodları kullanılmıştır. Bu kitapların da içinde bulunduğu geometri ders kitabı serileri en popüler olanlar arasındadır. ABD'nde yaygın olarak bu kitap serileri derslerde kullanılmaktadır. Lise öğrenci nüfusunun büyük bir kısmı bu kitap serilerinden yararlanmaktadır. ADK₁ ve ADK₂ de simetri konusunda sınırlı sayıda dörder aktivite bulunmaktadır. Bulgular bölümünde bu aktiviteler detaylı olarak gösterilmiş ve açıklanmıştır.

CCSSI'ye (2010) göre öğrenciler dönüşümler ünitesini sekizinci sınıfta öğreniyor ve bu kavramı genellikle onuncu sınıfta (veya daha sonraki yıllarda) verilen geometri dersinde ayrıntılı olarak inceliyorlar. Her iki Amerikan ders kitabında bu konuyu öğretmek için bir ana ders kitabı bulunmaktadır. Bunun yanı sıra öğretmenlerin kullanımına sunulan ve öğretmenlere rehberlik eden yardımcı kitaplar bulunmaktadır. Yansıma dönüşümünün öğretimine yönelik bütüncül bir bakış açısı geliştirebilmek için bu çalışmada hem ana hem de yardımcı kitaplardan yararlanılmıştır. İncelenen ders kitaplarına ilişkin bibliyografik bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

İncelenen Kitapların Bibliyografik Bilgileri

Kitaplar	Basım yılı	Sayfa sayısı	Yansıma dönüşümüne ayrılan sayfa sayısı	Yansıma dönüşümüne yönelik problem sayısı
TDK ₁	2021	405	8	15
TDK ₂	2021	432	17	22
ADK ₁	2024	728	7	39
ADK ₂	2019	695	6	17

CCSSI'da (2010) yansıma dönüşümü, *eşlik-benzerlik* (congruence) başlığı altında *düzlemde dönüşümler ile deneyler* (experiment with transformations in the plane) bölümü altında yer almaktadır. Programda geometrik dönüşümle ilgili beş kazanım yer almakta ve yansıma dönüşümü de dâhil olmak üzere tüm dönüşüm türlerine yer verilmektedir. MEB (2018) öğretim programında da benzer bir yaklaşım benimsenmiştir. MEB (2018) geometrik dönüşümler için iki kazanım ve bu kazanımları açıklamak adına toplam beş öneriye yer verilmiştir. CCSSI (2010) ve MEB (2018) matematik öğretim programlarında dönüşümlerle ilgili kazanımlar Tablo 2'de sunulmuştur. MEB (2018) öğretim matematik programında geometrik dönüşümler ile ilgili kazanımlar "Geometri" öğrenme alanının altında "Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler" alt öğrenme alanında verilmiştir. CCSSI (2010), sınıflarda nelerin öğretilmesi gerektiğine dair daha fazla ayrıntı sunarken, MEB (2018) bu ayrıntıları önerilerle sağlamaktadır. Örneğin, CCSSI (2010) öğretim programındaki ikinci kazanım düzlemde dönüşümlerin asetat ve geometri dönüşümü kullanılarak temsil edilmesine vurgu yaparken, bu vurgu Tablo 2'de görüldüğü gibi MEB (2018) öğretim programındaki ilk kazanım için sunulan önerilerde açıklanmıştır.

Tablo 2

CCSSI (2010) ve MEB (2018) Programlarındaki Dönüşüm ile İlgili Kazanımlar ve Açıklamalar

CCSSI (2010) Matematik Öğretim Programında Dönüşüm ile ilgili Kazanımlar	MEB (2018, s. 38-39) Matematik Öğretim Programında Dönüşüm ile ilgili Kazanımlar
CCSS.MATH.CONTENT.HSG.CO.A.1: Açık, çember, dik doğru, paralel doğru ve doğru parçasının kesin tanımlarını; nokta, doğru, bir doğru üzerindeki mesafe ve bir çember yayı etrafındaki mesafe gibi tanımsız kavramlara dayalı olarak bilmek.	12.4.1.1. Analitik düzlemde koordinatları verilen bir noktanın öteleme, dönme ve yansıma dönüşümleri altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulur.
CCSS.MATH.CONTENT.HSG.CO.A.2: Düzlemde dönüşümleri, örneğin asetat veya geometri yazılımı kullanarak temsil etmek; dönüşümleri, düzlemdeki noktaları girdi olarak alan ve diğer noktaları çıktı olarak veren fonksiyonlar şeklinde tanımlamak. Mesafeyi ve açıyı koruyan dönüşümler ile korumayanları (örneğin öteleme ile yatay germe arasındaki fark) karşılaştırmak.	a) Öteleme, simetri ve dönme kavramları hatırlatılır. b) Noktanın; noktaya, eksenlere, $y=x$ doğrusuna, bir doğruya göre simetrisi ve doğrunun noktaya göre simetrisi vurgulanır. Doğrunun doğruya göre simetrisine yer verilmez. c) Bilgi ve iletişim teknolojileri yardımıyla öteleme, simetri ve dönme ele alınır.
CCSS.MATH.CONTENT.HSG.CO.A.3: Bir dikdörtgen, paralelkenar, yamuk veya düzgün çokgen	12.4.1.2. Temel dönüşümler ve bileşkeleriyle ilgili problem çözer. a) Modelleme çalışmalarına yer verilir.

verildiğinde, onu kendisi üzerine taşıyan dönme ve yansıma hareketlerini tanımlamak.
CCSS.MATH.CONTENT.HSG.CO.A.4: Dönme, yansıma ve ötelemeleri; açılar, çemberler, dik doğrular, paralel doğrular ve doğru parçaları cinsinden tanımlamak.
CCSS.MATH.CONTENT.HSG.CO.A.5: Bir geometrik şekil ve bir dönme, yansıma veya öteleme verildiğinde, dönüşüme uğramış şekli çizmek (örneğin kareli kağıt, saydam kağıt veya geometri yazılımı kullanarak). Bir şekli başka bir şeklin üzerine taşıyacak dönüşüm dizisini belirtmek.

b) Doğadan ve mimari eserlerden örneklendirme yapılır.


2.2 Veri Analizleri

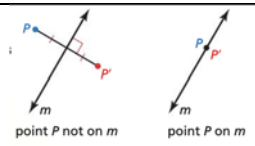
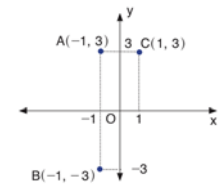
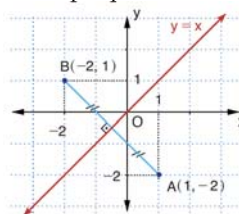
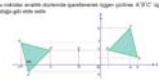
Alanyazında geometrik dönüşümlerin nasıl öğretildiğini karşılaştıran çeşitli çalışmaları bulunmaktadır (Bahadır & Demir, 2017; Demir & Kurtuluş, 2019; Flanagan, 2001; Sünker & Zembat, 2012; Yanık, 2006). Bu çalışmada ise seçilen ders kitaplarının yansıma dönüşümünü hangi perspektifler doğrultusunda ele aldığı incelenmiştir. Ders kitabı karşılaştırma çalışmaları, genellikle içerik ve problemlere odaklanmaktadır. Benzer şekilde, yansıma dönüşümü seçilen ders kitaplarında verilen tanımlar, örnekler ve problemler bağlamında analiz edilmiştir.

Analizlerde, Akarsu ve Öçal (2022) tarafından önerilen teorik çerçeve kullanılmıştır. Analizlerdeki temel bakış açısı, kavramların ve örneklerin hareket veya eşleme yaklaşımlarını yansıtmayı yansıtmadığı yönündedir. Yansıma dönüşümü, bu dönüşümün tanımı, simetri ekseninin rolü ve yansıma dönüşümü tanım kümesi olmak üzere üç kavramla tanımlanmaktadır. Yansıma dönüşümünün hangi yaklaşım doğrultusunda yapıldığı ilgili literatürdeki bu üç kavramın ne yönde benimsendiği ile ilişkilidir. Kitap analizlerindeki tanım, açıklama ve örnekler bu tanımlara göre değerlendirilmiştir. Kitaplardaki bir açıklamasının simetri eksenini kavramı bağlamında eşleştirme yaklaşımını benimsediğini söyleyebilmek için, bu açıklamanın ilgili yaklaşımın kriterlerini karşılaması gerekir. Örneğin, hareket ve eşleştirme perspektifine yönelik yapılan çalışmalarda (ör., Akarsu & Öçal, 2020; Yanık, 2006) simetri ekseninin iki özelliği olan diklik ve eşit uzaklık özelliklerinden de bahsediliyorsa verilen tanımın eşleştirme perspektifine yönelik olduğu, aksi halde, iki özelliğinden de bahsetmiyor veya sadece birinden bahsediyorsa, hareket perspektifine yönelik olduğu belirtilmektedir. Akarsu ve Öçal (2022), Flanagan (2001) ve Yanık (2006) tarafından önerilen kriterler doğrultusunda, ders kitaplarındaki açıklamaların veya örneklerin bu kavramlar çerçevesinde hareket veya eşleme yaklaşımını destekleyip desteklemedikleri Tablo 3' deki kriterlere göre belirlenmiştir. Kitaplarda yer alan tanımlar, açıklamalar ve örnekler, her bir kavram için ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Karşılaştırmalar bu kavramlar bağlamında gerçekleştirilmiştir.

Tablo 3

Simetri Eksenini, Alan ve Düzlem Kavramları için Hareket ve Eşleme Yaklaşımları Kriterleri

Kavramlar	Hareket Perspektifi	Eşleştirme Perspektifi	Örnekler ve Açıklamalar
Yansıma Dönüşümünün Tanımı	<ul style="list-style-type: none"> - Şeklin simetri eksenine göre ters çevrilmesini vurgulamak - Şeklin ilk durumuna göre ters bir görüntü elde edilmesini vurgulamak 	<ul style="list-style-type: none"> - Düzlemde bulunan tüm noktaların bir doğruya göre eşit uzaklık ve diklik özelliğini koruyarak dönüşümün gerçekleştirilmesini vurgulamak - Aynı düzlemdeki noktaları dönüştüren birbir ve örten bir 	 <p> $A(-1,3), B(-2,2)$ ve $C(-1,2)$ noktaları $A'(1,3), B'(2,2)$ ve $C'(1,2)$ noktaları $A''(-1,-3), B''(-2,-2)$ ve $C''(-1,-2)$ noktaları $A'''(1,-3), B'''(2,-2)$ ve $C'''(1,-2)$ noktaları Bu örneklerde verilen koordinatlar simetri eksenine göre yansıma ve eşleme hareketleri ile elde edilmiştir. </p> <p>Simetri eksenini örneğinde, düzlem üzerinde verilen şeklin yalnızca köşe noktaları yansıtıldığı ve geri kalan noktalar göz ardı edildiği için hareket perspektifi</p>

	fonksiyonun varlığını vurgulamak	 <p>point P not on m point P on m</p> <p>Simetri eksenini örneğinde, düzlem üzerinde verilen şeklin tüm noktalarının yansıtıldığı için eşleştirme perspektifi</p>
Simetri ekseninin rolü	<p>-Şeklin yansıma dönüşümü altındaki görüntünün konumunu belirlerken eşit mesafe özelliğini dikkate alınmamak</p> <p>-Şeklin yansıma dönüşümü altındaki görüntünün konumunu belirlerken diklik özelliğini dikkate alınmamak</p> <p>-Şekli noktalar kümesi olarak değil, bir bütün olarak temsil etmek.</p>	<p>-Şeklin yansıma dönüşümü altındaki görüntünün konumunu belirlerken eşit uzaklık özelliğini dikkate almak</p> <p>-Şeklin yansıma dönüşümü altındaki görüntünün konumunu belirlerken diklik özelliğini dikkate alınmamak</p> <p>-Şekli noktalar kümesi olarak yansıtmak.</p>  <p>Simetri ekseninin rolü olan eşit uzaklık ve diklik kavramlarından görsel üzerinde sadece eşit uzaklık vurgulandığından ve dikliğe değinilmediğinden hareket perspektifi</p>  <p>Simetri ekseninin rolü olan eşit uzaklık ve diklik kavramlarından görsel üzerinde her ikisi de vurgulandığından eşleştirme perspektifi</p>
Yansıma dönüşümü tanım kümesi	<p>-Kavramı tanımlamamak.</p> <p>-Geometrik yansımayı gerçekleştirirken yalnızca belirli noktaları dikkate almak.</p> <p>-Düzlemin boş olduğunu veya şekli oluşturan noktaların düzlemden bağımsız olduğunu varsaymak</p>	<p>-Kavramı tanımlamak.</p> <p>-Belirli şekiller veya noktalar yerine düzlemdeki her noktayı tanım kümesinden seçerek yansıtmak.</p> <p>-Sonsuz sayıda noktanın düzlemi oluşturduğunu ve geometrik nesnelerin verilen düzlemin alt kümesi olduğunu vurgulamak.</p>  <p>Sadece şeklin simetrisinin oluşturulması gerektiği ve düzlemdeki diğer noktalar göz ardı edildiğinden hareket perspektifi</p> <p>Eşleştirme perspektifine yönelik örnek kitaplarda yok.</p>

Araştırmacılar analizlerin nasıl yapılacağını Tablo 3'teki kriterlere göre tartışarak belirlemişlerdir. İlk analizler tüm yazarlarla beraber yapılmıştır. Daha sonra her bir araştırmacı ders kitaplarının içeriğini birden çok defa gözden geçirmiştir. Ders kitaplarındaki tanımlar, açıklamalar, örnekler ve problemler göz önünde bulundurularak her birinin hareket veya

eşleştirme yaklaşımlarına uygun olup olmadıkları Tablo 3'teki kriterlere göre incelenmiştir. Yansıma dönüşümü için her bir kavram ayrı ayrı dikkate alınmıştır. Her bir kavram bağlamında bu yaklaşımların göstergelerine göre incelenen içeriğin analiz sonuçları arasında tutarsızlık olup olmadığını tartışmak üzere araştırmacılar düzenli olarak bir araya gelmişlerdir. Her kavram için tam uyum sağlandıktan sonra bulgulara son hali verilmiştir.

Bu araştırmada anket veya ölçek uygulanmamıştır. Ayrıca, deney, görüşme veya gözlem gibi insan katılımcılara yönelik herhangi bir veri toplama yöntemi içermediğinden, etik kurul onayı alınmasına gerek duyulmamıştır.

BULGULAR

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'nde kullanılmakta olan matematik ders kitaplarında yer alan yansıma dönüşümü konusunun hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre incelenmesini ve karşılaştırılmasını amaçlayan bu çalışmada bulgular bölümü, yansıma dönüşümünün anlaşılmasını sağlayan üç kavramı ifade eden kriterlere göre kategorize edilmiştir. Bu kriterler yansıma dönüşümü tanımı, simetri ekseninin rolü, simetrisinin tanım kümesidir. Bu bağlamda her bir kriter, eşleştirme ve hareket perspektifine göre incelenmiştir. İncelenen üç kriter için Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'nde yaygın olarak kullanılmakta olan ikişer matematik kitabı (TDK₁, TDK₂, ADK₁ ve ADK₂) önce her ülkenin kendi içinde ardından ülkeler arasında karşılaştırılması ile bulgular sunulmuştur.

3.1 Yansıma Dönüşümü Tanımı

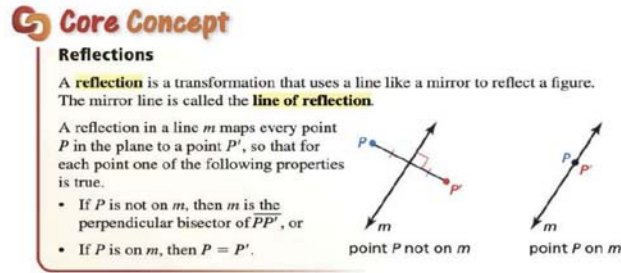
Kitaplarda yer alan yansıma dönüşümü tanımları incelenirken Tablo 3'teki kriterler göz önünde bulundurulmuştur. Bulgular kitaplardaki tanımlarda odaklanılan perspektifler doğrultusunda sunulmuştur.

Türkiye'de kullanılan matematik kitapları incelendiğinde, her iki kitapta da yansıma dönüşümü tanımının “*Bir şeklin bütün noktalarının bir noktaya veya bir doğruya göre (simetri eksenine) göre eşit uzaklıkta görüntülerinin alınması ile oluşan dönüşüm*” (Kemancı vd., s. 157, Emin vd., s.201) şeklinde yapıldığı görülmektedir. Bu ifadeye göre yansıma dönüşümü tanımının, düzlem üzerinde verilen bir şeklin bir doğruya göre referans alınarak eşit uzaklıkta yansıtılması şeklinde açıklandığı görülmektedir. TDK1 ve TDK2 ders kitapları incelendiğinde tanımda belirtilen “*şeklin bütün noktalarının*” simetrisinin oluşturulması gerektiği ifadesi, yansıma dönüşümünün yalnızca şekle uygulanması gerektiği ifadesini vurgulamaktadır. Bu ifadenin, yansıma dönüşümü hareket perspektifi tanımında belirtilen “*verilen şeklin yansıtılması*” kavramı ile aynı kavram olması nedeniyle, Türkiye kitaplarında verilen simetri tanımının bu kriter bakımından hareket perspektifine yönelik olduğu görülmektedir. Tanımın eşleştirme perspektifine yönelik yapılmış olması için, yansıma dönüşümünün yalnızca verilen şekle değil düzlem üzerinde bulunan tüm noktalara uygulanması gerektiğini vurgulamış olması gerekirdi. Dolayısıyla TTKB tarafından onaylanan ders kitaplarındaki yansıma dönüşümünün tanımı, hareket perspektifi tanımına uygundur.

Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılmakta olan matematik ders kitaplarında yer alan yansıma dönüşümü tanımları ise Şekil 3 ve Şekil 4'te gösterilmiştir.

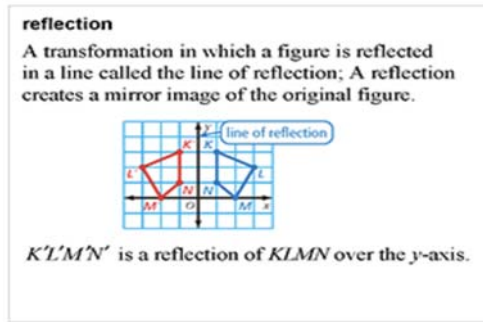
Şekil 3

ADK₁ Ders Kitabı Simetri Tanımı (s.182)



Şekil 4

ADK₂ Ders Kitabı Simetri Tanımı (s.54)



İncelenen ADK₁ ders kitabında yansıma dönüşümü Şekil 3'teki gibi şu açıklanmıştır:

“Simetri bir şekli yansıtmak için ayna gibi bir çizgi kullanan dönüşümdür.

Bir m doğrusuna göre simetri düzlemdeki her bir noktayı bire-bir eşler. Bu durumda her nokta için şu önermelerden biri doğrudur:

- Eğer P , m üzerinde değilse, o zaman m , PP' [doğru parçası]nın dik açıortayıdır.

Ya da

- Eğer P , m üzerinde ise, $P=P'$ olur”. (s. 182)

ADK₁'de yer alan simetri tanımını açıklamak gerekirse, düzlem üzerinde bulunan her bir noktanın simetri eksenini referans alınarak eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin korunarak birebir kendisine karşılık gelen noktalar ile eşleşmesi durumu olarak ifade edildiği söylenebilir. ADK₁'deki simetri tanımı hareket ve eşleştirme perspektifi kriterlerine göre incelendiğinde, tanımda yer alan “düzlemdeki her bir noktayı bire-bir eşler” ifadesi simetrinin düzlem üzerindeki her bir noktaya uygulanması gerektiğini vurgulamaktadır. Yansıma dönüşümünün hareket ve eşleştirme perspektifi tanımlarına göre bu ifade incelendiğinde eşleştirme perspektifinde düzlem üzerinde bulunan tüm noktalara uygulandığı anlaşılmaktadır. Buna göre, ADK₁'de verilen yansıma dönüşümü eşleştirme perspektifine göre yapılmış bir tanımdır.

ADK₂'de yansıma dönüşümü tanımı şu şekilde ifade edilmiştir: “Simetri, bir şeklin simetri eksenini olarak isimlendirilen bir doğruya göre yansımasıdır. Simetri orijinal şeklin ayna görüntüsünü oluşturur.” (s.54). ADK₂'de yer alan simetri tanımını açıklamak gerekirse, simetrinin bir ayna görüntüsü olduğunu, bir simetri eksenine göre görüntünün oluştuğunu ifade

etmektedir. ADK_2 'deki simetri tanımı hareket ve eşleştirme perspektifi kriterlerine göre incelendiğinde, tanımda yer alan “*şeklin simetri eksenini olarak isimlendirilen bir doğruya göre yansımasıdır.*” ifadesi simetrisinin yalnızca şekle uygulanması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu bağlamda, ADK_2 'de verilen yansıma dönüşümü hareket perspektifine göre yapılmış bir tanımdır.

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan matematik ders kitaplarında yer alan yansıma dönüşümü tanımları incelendiğinde Türkiye tarafından kullanılan her iki kitapta da yansıma dönüşümü tanımları aynı iken, Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan kitaplarda yansıma dönüşümü tanımlarının farklı olduğu görülmektedir. Türkiye’de kullanılan kitaplarda verilen simetri tanımlarını, şekle ait noktaların simetrisinin oluşturulması gerektiğini ifade ettiğinden hareket perspektifine yönelik iken, Amerika'ya ait ders kitaplarında ise ADK_1 düzlemdeki tüm noktaların simetrisinin oluşturulması gerektiğini ifade ettiğinden eşleştirme perspektifine, ADK_2 şeklin simetrisinin yansıtılmasını ifade ettiğinden hareket perspektifine yönelik olduğu ortaya çıkarılmıştır.

3.2 Simetri Ekseninin Rolü

Simetri eksenini, yansıma dönüşümünün kavramsal olarak hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre anlaşılmasında dikkate alınan parametrelerden biridir. Alan yazında yapılan araştırmalar, simetri ekseninin iki önemli özelliği bulunduğunu göstermektedir: eşit uzaklık ve diklik. Yansıma dönüşümü uygulanırken, düzlemi oluşturan tüm noktaların simetri eksenine eşit uzaklıkta ve simetri eksenine dik olacak şekilde simetrisinin oluşturulması gerekmektedir.

Türkiye’de güncel olarak kullanılmakta olan matematik ders kitaplarında yer alan simetri eksenini tanımı ve bir noktanın koordinat düzlemindeki eksnelere ve herhangi bir doğruya göre simetrisini anlatan ifadeler görsel olarak Şekil 5 ve Şekil 6’da gösterilmiştir.

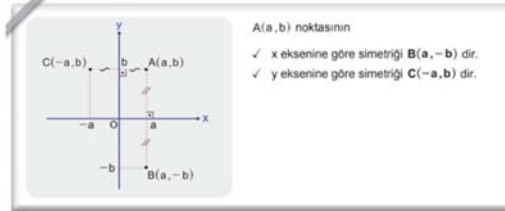
Şekil 5

TDK₁ Simetri Eksenini Tanımı (s.157, s.159)

Eğer simetri dönüşümü bir doğruya göre yapılıyor ise bu doğruya **simetri eksenini** denir ve S ile gösterilir.

(s.157)

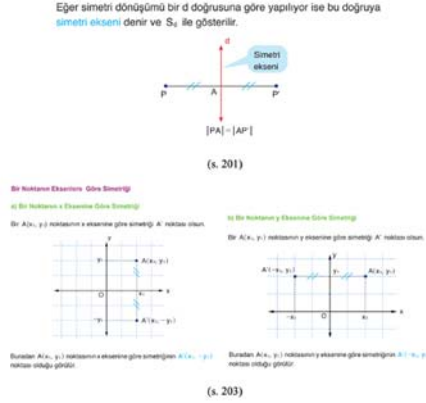
Bir Noktanın x ve y Eksenlerine Göre Simetrisi



(s.159)

Şekil 6

TDK₂ Simetri Eksenini Tanımı (s. 201, s.203)

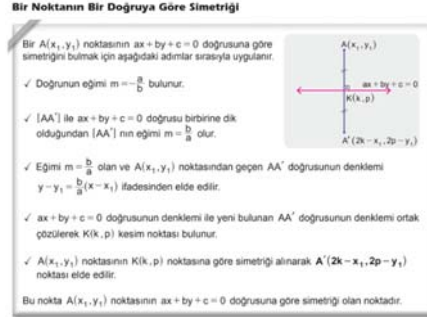


TDK₁ ve TDK₂ incelendiğinde, her iki kitapta da simetri eksenini tanımının “Eğer yansıma dönüşümü bir d doğrusuna göre yapılıyor ise bu doğruya simetri eksenini denir” (Kemancı vd., s. 157, Emin vd., s.201) şeklinde yapıldığı görülmektedir. Bu ifadeye göre simetri eksenini, yansıma dönüşümü uygulanırken referans olarak kullanılması gereken bir doğru olarak ifade edilmektedir. Kitaplarda yazılı olarak ifade edilen tanım aşamasında simetri eksenini özellikleri hakkında herhangi bir açıklama yapılmadığı görülmektedir. Fakat bilinmektedir ki simetri eksenini iki önemli özelliği bulunmaktadır. Bu özellikler, eşit uzaklık ve dikliktir. Bu özellikleri açıklamak gerekirse, düzlem üzerinde yansıma dönüşümü uygulanırken düzlem üzerindeki her bir noktanın kendisine eşit uzaklıkta ve simetri eksenine dik olarak bire-bir biçimde karşılık gelen nokta ile eşleşmesi ile simetrisinin oluşturulması gerekmektedir. TDK₁ ve TDK₂'de verilen simetri eksenini tanımında sözel olarak eşit uzaklık ve diklik ifadelerine dair herhangi bir vurgu yapılmadığı görülmektedir. Fakat Şekil 5 ve Şekil 6'da verilen görseller incelendiğinde simetri eksenini özelliklerinden görseller üzerinden ifade edildiği görülmektedir. Bu görsellerde simetri eksenini koordinat düzlemi üzerinden açıklandığı, koordinat eksenlerinin de simetri eksenini olarak kullanıldığı gözlenmektedir (Kemancı vd., s. 159, Emin vd., s. 203). Verilen şekillerin koordinat eksenlerine göre yani koordinat eksenlerinin simetri eksenini gibi kullanılması ile eşit uzaklık ve diklik özelliklerine göre simetrisi oluşturulmuştur. Bununla birlikte görsellerde şekillere ait koordinatların, x ve y eksenlerine göre simetrisinin oluşturulması ile görüntünün yeni koordinatlarını formül yoluyla gösterildiği görülmektedir. Bu görseller ve ifadeler incelendiğinde, Türkiye tarafından kullanılan her iki kitapta da simetri eksenini özellikleri eşit uzaklık ve diklik ifadeleri doğru kullanıldığından kitaplardaki tanımların eşleştirme perspektifine yönelik yapıldığı çıkarımı yapılmıştır.

Diğer yandan TDK₁ ve TDK₂'de dikkat çeken bir detaya rastlanmıştır. Her iki kitapta da sırasıyla önce “bir noktanın koordinat eksenlerine ve orijinden geçen doğrulara göre simetri” tanımları yapılmasının ardından “bir noktanın herhangi bir doğruya göre simetri” tanımının yapıldığı görülmüştür. Bir noktanın herhangi bir doğruya göre simetrisinin oluşturulması ile ilgili bilgiler görsel olarak Şekil 7 ve Şekil 8'de gösterilmiştir.

Şekil 7

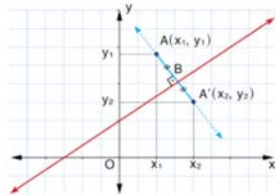
TDK₁ Noktanın Doğruya Göre Simetri Tanımı (s.162)



Şekil 8

TDK₂ Noktanın Doğruya Göre Simetri Tanımı (s.207)

Bir Noktanın Herhangi Bir Doğruya Göre Simetriği



Düzlemde herhangi bir $A(x_1, y_1)$ noktası ve eğimi m_1 olan d doğrusu alınır. A noktasının d doğrusuna göre simetriği A' noktası olmak üzere AA' doğrusu d doğrusuna diktir.

AA' doğrusunun eğimi m_2 olarak alınırsa birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 olacağı için $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

Şekil 7 ve Şekil 8 incelendiğinde, TDK₁ ve TDK₂'de bir noktanın herhangi bir doğruya göre simetrisinin görseller üzerinde ifade edilerek eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin tanımı yapıldığı fakat sözel ifade kısmında ise eşit uzaklık ve diklik kavramlarından biraz daha uzaklaşılarak formül yoluyla doğru denklemlerinden ve eğim ifadelerinden bahsedildiği görülmektedir. Görseller üzerinden açıklanmış olan bölümlerde simetri ekseninin eşit uzaklık ve diklik özelliklerinde doğru biçimde bahsedildiği için yapılan bu açıklamaların da eşleştirme perspektifine göre yapıldığı sonucu çıkarılmıştır. Fakat, bir noktanın önce koordinat eksenlerine göre simetri tanımının ardından da bir noktanın herhangi bir doğruya göre tanımının verilmesinin öğrenciler için zihin karmaşasına yol açabileceği düşünülmektedir. Noktanın koordinat düzleminde eksenlere ve orijinden geçen doğrulara göre simetrisi ile noktanın herhangi bir doğruya göre simetrisi açıklamaları arasında aslında hiçbir fark yoktur. Çünkü en nihayetinde koordinat düzlemini oluşturan eksenler ve orijinden geçen doğruları da birer "herhangi bir doğru" olarak düşünülmelidir. Yapılan tanımların hepsi de eşleştirme perspektifine göre yapılmış olsa da neden böyle bir ayrıma gidildiği konusunda bir belirsizlik mevcuttur. Bu düşünce doğrultusunda kitapta verilmiş olan örnekler detaylı biçimde incelenmiştir. TDK₁ ve TDK₂'deki incelenen aktivitelere örnekler Şekil 9 ve Şekil 10'te gösterilmiştir.

Şekil 9

TDK₁ Simetri Örnekleri

ÖRNEK I

A(2, 4) noktasının x eksenine ve y eksenine göre simetri doğrusunu atıfıdaki görüntüsü olan noktaları bularak analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



A(2, 4) noktasının x eksenine göre simetriği A'(2, -4) noktasıdır. y eksenine göre simetriği A''(-2, 4) noktasıdır.

a: s. 159

ÖRNEK II

O(0, 0), A(0, 3), B(-2, 0), C(6, -7), D(-2, 8) ve E(-4, -6) noktaların x eksenine ve y eksenine göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

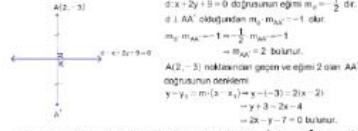
Nokta	x eksenine göre simetriği	y eksenine göre simetriği
O(0, 0)	O'(0, 0)	O''(0, 0)
A(0, 3)	A'(0, -3)	A''(0, 3)
B(-2, 0)	B'(-2, 0)	B''(2, 0)
C(6, -7)	C'(6, 7)	C''(-6, -7)
D(-2, 8)	D'(-2, -8)	D''(2, 8)
E(-4, -6)	E'(-4, 6)	E''(4, -6)

b: s. 160

ÖRNEK III

A(2, -3) noktasının $d: x - 2y + 9 = 0$ doğrusuna göre simetriği A' noktasına göre A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$d: x - 2y + 9 = 0$ doğrusunun eğimi $m_d = \frac{1}{2}$ dir.

$d \perp AA'$ olduğundan $m_d \cdot m_{AA'} = -1$ olur.

$m_d \cdot m_{AA'} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_{AA'} = -1$

$\Rightarrow m_{AA'} = -2$ bulunur.

A(2, -3) noktasından geçen ve eğimi 2 olan AA' doğrusunun denklemi

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = 2(x - 2)$

$\Rightarrow y + 3 = 2x - 4$

$\Rightarrow 2x - y - 7 = 0$ bulunur.

$x - 2y + 9 = 0$ ve $2x - y - 7 = 0$ denklemlerin ortak çözümlerini $x = 1$ ve $y = -5$ bulunur. Böylece K noktasının koordinatları K(1, -5) olarak elde edilir.

A(2, -3) noktasının K(1, -5) noktasına göre simetriği A'(2 - 2(1 - 1) - (-3)) = A'(0, -7) noktası olarak bulunur. Bu durumda A(2, -3) noktasının $d: x - 2y + 9 = 0$ doğrusuna göre simetriği A'(0, -7) noktasıdır.

c: s. 161

d: s. 162

Şekil 10

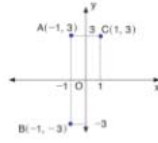
TDK₂ Simetri Örnekleri

ÖRNEK 13

A(-1, 3) noktasının x eksenine ve y eksenine göre simetrisi olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

A(x, y) noktasının x eksenine göre simetrisi B(x, -y) olduğundan A(-1, 3) noktasının x eksenine göre simetrisi B(-1, -3) olur.
A(x, y) noktasının y eksenine göre simetrisi C(-x, y) olduğundan A(-1, 3) noktasının y eksenine göre simetrisi C(1, 3) olur.



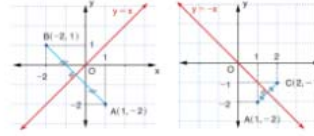
a: s. 204

ÖRNEK 14

A(1, -2) noktasının $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına göre simetrisi olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

A(x, y) noktasının $y = x$ doğrularına göre simetrisi B(y, x) noktası olduğundan A(1, -2) noktasının $y = x$ doğrularına göre simetrisi B(-2, 1) olur.
A(x, y) noktasının $y = -x$ doğrularına göre simetrisi C(-y, -x) noktası olduğundan A(1, -2) noktasının $y = -x$ doğrularına göre simetrisi C(2, -1) olur.



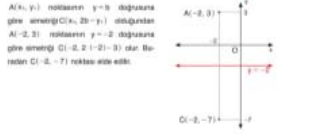
b: s. 205

ÖRNEK 15

A(-2, 3) noktasının $x = 4$ ve $y = -2$ doğrularına göre simetrisi olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

A(x, y) noktasının $x = a$ doğrularına göre simetrisi B(2a - x, y) olduğundan A(-2, 3) noktasının $x = 4$ doğrularına göre simetrisi B(10, 3) olur. Buradan B(10, 3) noktası elde edilir.



c: s. 207

ÖRNEK 16

A(-2, 1) noktasının $2x + y - 4 = 0$ doğrularına göre simetrisi olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x + y - 4 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = -2$ dir.

AK doğrularının eğimleri

$$m_2 = m_1 = -2$$

$$-2m_2 = 1$$

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

A(-2, 1) noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{2}$ olan doğru denklemini

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

$$2y - 2 = x + 2$$

$$2x - x + 4 = 0$$

Buradan $2x - x + 4 = 0$ ve $2x + y - 4 = 0$ doğru denklemlerini çözümler

$$\begin{cases} 4x - 2x - 8 = 0 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -8 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$$

$$x = -4, y = 4$$

A noktasının koordinatları

$$\frac{A_1x_2 - A_2x_1}{A_1y_2 - A_2y_1} = \frac{-2 \cdot 4 - 1 \cdot (-4)}{-2 \cdot 4 - 1 \cdot (-4)} = \frac{-8 + 4}{-8 + 4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Buradan A(-2, 1) noktasının $2x + y - 4 = 0$ doğrularına göre simetrisi olan noktası $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olarak elde edilir.

d: s. 208

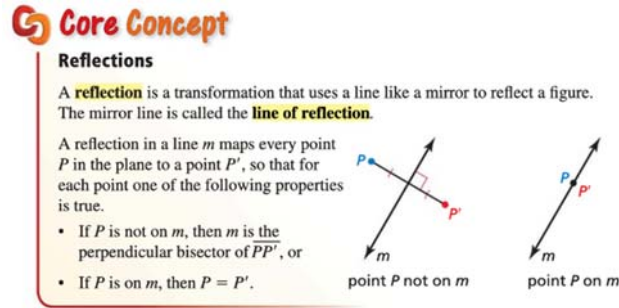
TDK₁ ve TDK₂'deki simetri eksenleri örnekleri incelendiğinde koordinat düzleminde eksenlere ve herhangi bir doğruya göre yansıma dönüşümü uygulandığında, koordinat düzleminde eksenlere göre yapılan yansıma dönüşümü örneklerinin ezbere dayalı çözümlerden oluştuğu görülürken (örneğin bir noktanın x eksenine göre simetrisi sonucunda x koordinatının artık -x olduğu, y koordinatının ise aynı kaldığı ifadesi), herhangi bir doğruya göre yansıma dönüşümü uygulanması ile ilgili örneklerin ise tamamen formül üzerinden denklemler aracılığıyla çözüldüğü görülmektedir.

TDK₁ ve TDK₂'deki simetri eksenleri tanımları incelendiğinde tanımların koordinat düzlemi üzerinden yapıldığında, x ve y eksenlerinin simetri eksenleri olarak kullanıldığı ve bunlar haricinde orijin doğrularına göre simetri eksenleri tanımının yapıldığı görülmektedir. Tanımlarda simetri ekseninin özelliği olan eşit uzaklık ve diklik kavramları görseller üzerinden ifade edilerek gösterilmiştir. Bu durum hareket ve eşleştirme perspektifleri bakımından incelendiğinde aslında tanımların eşleştirme perspektifine yönelik yapıldığı ortaya çıkarılmıştır.

Diğer yandan Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılmakta olan ADK₁ ve ADK₂'de yer alan simetri eksenleri tanımları ise Şekil 11 ve Şekil 12'de gösterilmiştir.

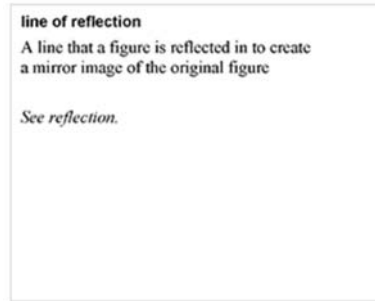
Şekil 11

ADK₁ Simetri Eksenini Tanımı (s.182)



Şekil 12

ADK₂ Simetri Eksenini Tanımı



İncelenen ADK₁ ders kitabında simetri eksenini Şekil 11'deki gibi şu şekilde açıklanmıştır:

"Simetri bir şekli yansıtmak için ayna gibi bir çizgi kullanan dönüşümdür.

Bir m doğrusuna göre simetri düzlemdaki her bir noktayı bire-bir eşler. Bu durumda her nokta için şu önermelerden biri doğrudur:

- *Eğer P , m üzerinde değilse, o zaman m , $\overline{PP'}$ [doğru parçası]nın dik açıortayıdır.*

Ya da

- *Eğer P , m üzerinde ise, $P=P'$ olur." (s. 182)*

ADK₁'de yer alan simetri eksenini tanımında, simetri ekseninin bir ayna görüntüsü oluşturma görevinin bulunduğunu ve bu ayna görüntüsü oluştururken eşit uzaklık ve diklik özelliklerini koruduğunu ifade etmektedir. Bu ifade doğrultusunda bir ayna görüntüsünü düşündüğümüzde düzlemin bir tarafında ne var ise, ki bunlar noktaları ifade etmektedir, aynı biçimde düzlemin diğer tarafına yansıdığını anlatmaktadır. Yansıma esnasında tüm noktaların eşit uzaklık ve diklik özelliklerini koruduğunu göstermektedir. Yapılan simetri eksenini tanımı ve açıklaması aynı zamanda görsel üzerinden de ifade edilerek diklik ve eşit uzaklık özellikleri vurgulanmıştır. ADK₁'de verilen simetri eksenini tanımı hareket ve eşleştirme perspektiflerine çerçevesince incelendiğinde, bu tanımın eşleştirme perspektifine yönelik yapıldığı sonucu ortaya çıkarılmıştır. ADK₁'de yer alan simetri eksenini aktivite örneği Şekil 13'de görülmektedir.

Şekil 13

ADK₁ Simetri Örneği

EXAMPLE 1

Reflecting in Horizontal and Vertical Lines

Graph $\triangle ABC$ with vertices $A(1, 3)$, $B(5, 2)$, and $C(2, 1)$ and its image after the reflection described.

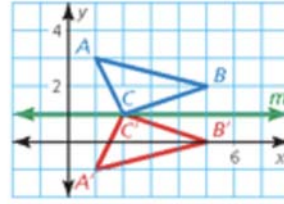
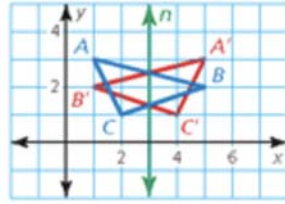
a. In the line $n: x = 3$

b. In the line $m: y = 1$

SOLUTION

a. Point A is 2 units left of line n , so its reflection A' is 2 units right of line n at $(5, 3)$. Also, B' is 2 units left of line n at $(1, 2)$, and C' is 1 unit right of line n at $(4, 1)$.

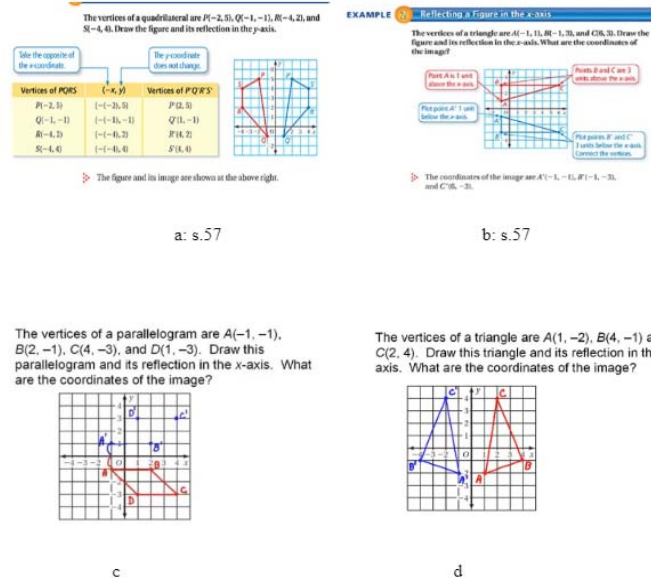
b. Point A is 2 units above line m , so A' is 2 units below line m at $(1, -1)$. Also, B' is 1 unit below line m at $(5, 0)$. Because point C is on line m , you know that $C = C'$.



ADK₂'de ise Şekil 12'de olduğu gibi simetri eksenini tanımlama için şu ifadeler yer verilmiştir: “Orijinal şeklin ayna görüntüsünü oluşturmak için bir şeklin yansıtıldığı bir doğrudur.” “ADK₂'de yer alan simetri eksenini tanımlama için açıklama gerekirse, verilen bir şeklin ayna görüntüsünü oluşturmak için faydalanılan bir eksen olarak tanımlandığı ifade edilmektedir. Açıklanan bu ifadeye göre eşit uzaklık ve diklik kavramları açıkça vurgulanmamaktadır. Ayna görüntüsünün eşit uzaklığı ifade ettiği bilinmektedir. Fakat bu konuyu ilk defa öğrenen bir öğrenci için diklik kavramının ilk aşamada zihinde canlandırılması zor olabilir. ADK₂'de yer alan simetri eksenini tanımlama için açıklama gerekirse eşit uzaklık ve diklik kavramlarını detaylı bir biçimde açıklamadığı için kitapta yer alan örnekler detaylı bir biçimde incelenmiştir. ADK₂'de incelenen aktivitelere örnekler Şekil 14'te gösterilmiştir.

Şekil 14

ADK₂ Simetri Örnekleri



Şekil 14'te verilen örnekler incelendiğinde, kitapta verilen simetri aktivitelerinin koordinat düzlemi üzerinden gösterildiği gözlenmektedir. Koordinat düzleminin eksenlerinin dik olmasından ötürü diklik özelliğini ihmal ederek ifade ettiği görülmektedir. Eşit uzaklık özelliğinin ise eksenler üzerinden gösterilerek açıklandığı görülmektedir. Örneklerden anlaşılacağı üzere ADK₂'de simetri eksenini tanımlı "ayna görüntüsü" olarak ifade edilmiştir. Simetri eksenini koordinat düzlemi üzerinde eksenlerin simetri eksenini gibi kullanılması üzerinden açıklanmış, diklik özelliği hem sözel olarak tanımda hem de görsellerde vurgulanmamış ve eşit uzaklık özelliği görseller üzerinden açıklanmıştır. ADK₂'de verilen simetri eksenini tanımlı hareket ve eşleştirme perspektiflerine çerçevesince incelendiğinde, simetri eksenini tanımlı eşleştirme perspektifine yönelik verilmiş olsa da öğrencileri hareket perspektifine sahip olmaya yönlendirecek biçimde yapıldığı sonucu ortaya çıkarılmıştır.

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan matematik ders kitaplarında yer alan simetri eksenini tanımları incelendiğinde Türkiye'de kullanılan her iki kitapta da yansıma dönüşümü tanımları aynı iken, Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan kitaplarda simetri eksenini tanımlarının bire-bir aynı olmasa da benzer şekilde olduğu görülmektedir. TDK1 ve TDK₂'de verilen simetri eksenini tanımları, şeklin simetri görüntüsünün oluşturulması esnasında eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin açıklanmasından dolayı bu tanımlar eşleştirme perspektifine yönelik iken, Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılmakta ders kitaplarında ise ADK₁ eşit uzaklık ve diklik özelliklerini hem sözel hem de görsel olarak ifade ettiğinden eşleştirme perspektifine, ADK₂ ise eşit uzaklık ve diklik özelliklerini sözel olarak ifade etmeyip, eşit uzaklığı görsel üzerinden göstermekle birlikte diklik özelliği hiçbir yerde (aktiviteler ve tanımlar) kullanmadığından hareket perspektifine yönelik olduğu ortaya çıkarılmıştır.

3.3 Yansıma Dönüşümü Tanım Kümesi

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan kitaplarda simetrinin tanım kümesine ait bulgular tanımlar ve örnekler üzerinden incelenmiştir. Kitaplar yansıma dönüşümü tanım kümesi tanımlı ve kriterlerine (bkz., Tablo 3) göre incelenip hareket veya eşleştirme perspektifine göre sınıflandırılmıştır.

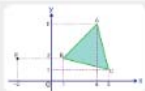
TDK₁ ve TDK₂ matematik kitapları incelendiğinde, her iki kitapta da yansıma dönüşümü tanımının “Bir şeklin bütün noktalarının bir noktaya veya bir doğruya göre (simetri eksenini) göre eşit uzaklıkta görüntülerinin alınması ile oluşan dönüşüm” (Kemancı vd., 2021, s. 157; Emin vd., 2001, s. 201) şeklinde yapıldığı görülmektedir. Millî Eğitim Bakanlığı kitaplarında yer alan bu tanım simetrisinin tanım kümesi bakımından incelendiğinde, tanımın içinde “şeklin hareketi”, “şeklin ters çevrilmesi” ve “şeklin yer değiştirmesi” gibi ifadelerle yer verilmemiş olmanın yanında, düzlemi oluşturan tüm noktaların simetri eksenine göre bire-bir ve örten olacak şekilde eşleşmesi ya da yansıması gerektiği ifadeleri kullanılmamıştır. Tanımlarda yalnızca “şekli oluşturan bütün noktaların” simetri görüntüsünün oluşturulması gerektiği belirtilmiştir. İncelenen bu tanımda düzlem üzerindeki şekil dışındaki noktaların göz ardı edildiği düşüncesi görülmektedir. Bu bakımdan Türkiye tarafından kullanılan tanımların simetrisinin tanım kümesi bakımında hareket perspektifine yönelik olduğu ve öğrencileri hareket perspektifine sahip olacak şekilde yönlendirdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Diğer yandan TDK₁ ve TDK₂'de yer alan aktiviteler de simetrisinin tanım kümesi bakımından incelenmiştir. TDK₁ ve TDK₂'da yer alan aktivitelere örnekler Şekil 14 ve Şekil 15'te gösterilmiştir.

Şekil 15

TDK₁ Simetri Örnekleri (Kemancı vd., 2021)

ÖRNEK III



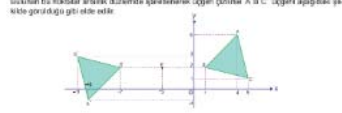
Yandaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin B noktasına göre simetrisi olan A'B'C' üçgeninin köşe noktalarının koordinatlarını bulunuz ve A'B'C' üçgenini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM III

ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları olan A(4,5), B(1,2) ve C(5,1) noktalarının B(-3,2) noktasına göre simetrisi olan noktalar A', B' ve C' olur. Buna göre

A'(2+3) = 5, 2-2 = 0 → A'(5, 0)
 B'(2+3) = 5, 2-2 = 0 → B'(5, 0)
 C'(2+3) = 5, 2-2 = 0 → C'(5, 0) bulunur.

Bu noktalar analitik düzlemde gösterilerek üçgen A'B'C' üçgeni aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi elde edilir.



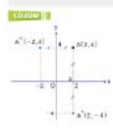
a: s. 158

ÖRNEK I

A(2,4) noktasının x eksenine ve y eksenine göre simetrisi doğrudan aşağıdaki gibidir. Bu noktaları buradaki analitik düzlemde gösteriniz.

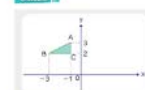
ÇÖZÜM I

A(2,4) noktasının x eksenine göre simetrisi A'(2,-4) noktasıdır. y eksenine göre simetrisi A''(-2,4) noktasıdır.



b: s. 159

ÖRNEK II



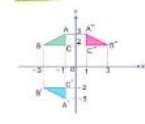
Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin x eksenine göre simetrisi olan A'B'C' üçgenini de y eksenine göre simetrisi olan A''B''C'' üçgeninin köşe noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM II

A(1,3), B(-3,2) ve C(-1,2) noktalarının

- x eksenine göre simetrisi olan noktalar A'(1,-3), B'(-3,-2) ve C'(-1,-2) noktalarıdır.
- y eksenine göre simetrisi olan noktalar A''(-1,3), B''(3,2) ve C''(1,2) noktalarıdır.

Bu noktalar analitik düzlemde gösterilerek birleştirilerek ABC üçgeninin x eksenine göre simetrisi olan A'B'C' üçgeni ile y eksenine göre simetrisi olan A''B''C'' üçgeni yan yana çekilerek gibi elde edilir.



c: s. 160

ÖRNEK III

A(2,5) ve B(2,-3) noktalarını y = x doğrusuna göre simetrisi olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM III

A(2,5) noktasının y = x doğrusuna göre simetrisi A'(5,2) noktasıdır. B(2,-3) noktasının y = x doğrusuna göre simetrisi B'(3,-2) noktasıdır.

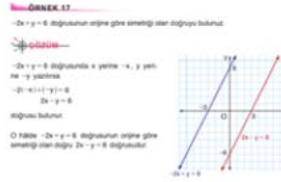
d: s. 161

Şekil 16

TDK₂ Simetri Örnekleri (Emin vd., 2021)



a: s.205



b: s. 209



c: s. 207



d: s.202

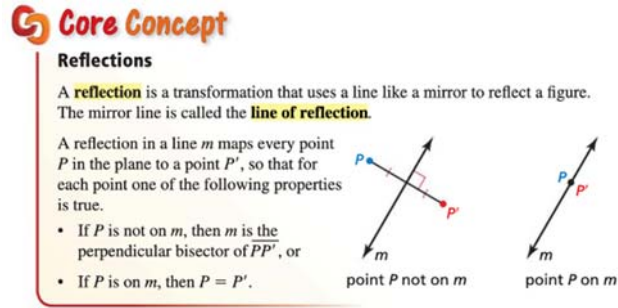
Şekil 15 ve Şekil 16'da Türkiye'de kullanılan kitaplarındaki simetri eksenleri örnekleri incelendiğinde, yansıma dönüşümlerinin yalnızca düzlem üzerinde verilen şekillere ya da belirlenen bazı noktalara yönelik yapıldığını gösteren aktiviteler olduğu görülmektedir. Örneğin Şekil 14a'da TDK₁'de verilen örnek incelendiğinde, sadece şeklin simetrisinin oluşturulması gerektiği ve görüntünün köşe koordinatlarının ifade edilmesi gerektiği söylenmiştir. TDK₁'de yer alan tanımları hatırlatmak gerekirse "şeklin tüm noktalarının" yansıtılması gerektiği ifade edilmişti. Simetrisinin tanım kümesi bakımından bu örnek incelendiğinde, düzlemdeki tüm noktaların simetri görüntüsünün oluşturulması gerektiğine yönelik bir vurgu ya da yönlendirme bulunmadığı görülmektedir. Diğer yandan Şekil 14b ve 14c incelendiğinde yine sadece bir noktaya yönelik yansıma dönüşümünün uygulandığı ve düzlemdeki diğer noktaların göz ardı edilerek bir öğretim tekniği kullanıldığı ve öğrenciye yönlendirici ek sorular yöneltilmediği görülmektedir.

TDK₂'de yer alan sorular incelendiğinde ise, dikkat çeken ilk durum yansıma dönüşümünde görsel içeriğe sahip soruya yer verilmemiş olmasıdır. Sorular belirli noktaların doğru denklemlerinin simetri görüntülerinin oluşturulması şeklinde verilmiştir. Bu bakımdan TDK₂'de bulunan soruların, simetrisinin tanım kümesinin kavramsal olarak anlaşılmasında hareket perspektifine yönlendirici şekilde olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Amerika Birleşik Devletleri tarafından güncel olarak kullanılmakta olan ADK₁ ve ADK₂'de yer alan simetri tanımları Şekil 17 ve Şekil 18'de gösterilmiştir.

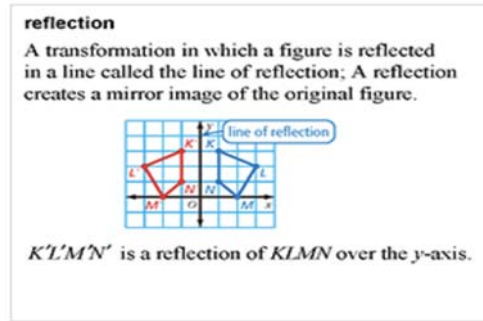
Şekil 17

ADK1 Simetri Ekseni Tanımı (s.182)



Şekil 18

ADK2 Simetri Ekseni Tanımı (s.54)



İncelenen ADK₁'de yansıma dönüşümü Şekil 17'deki gibi şu şekilde açıklanmıştır:

“Simetri bir şekli yansıtmak için ayna gibi bir çizgi kullanan dönüşümdür.

Bir m doğrusuna göre simetri düzlemdeki her bir noktayı bire-bir eşler. Bu durumda her nokta için şu önermelerden biri doğrudur:

- Eğer P , m üzerinde değilse, o zaman m , $\overline{PP'}$ [doğru parçası]nın dik açıortayıdır.
Ya da
- Eğer P , m üzerinde ise, $P=P'$ olur.” (s. 182)

Şekil 17 ADK₁'de yer alan simetri tanımını açıklamak gerekirse, düzlem üzerinde bulunan her bir noktanın simetri ekseni referans alınarak eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin korunarak birebir kendisine karşılık gelen noktalar ile eşleşmesi durumu olarak ifade edilebilir. ADK₁'de verilen tanım simetrisinin tanım kümesi hareket ve eşleştirme perspektifi kriterlerine göre incelendiğinde, tanımda yer alan “düzlemdeki her bir noktayı bire-bir eşler” ifadesi simetrisinin düzlem üzerindeki her bir noktaya uygulanması gerektiğini vurguladığından bire-bir ve örten olma durumunu sağlamaktadır. Dolayısıyla ADK₁'de simetrisinin tanım kümesi bakımında eşleştirme perspektifine yönelik olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Diğer yandan Şekil 18 ADK₂'de yansıma dönüşümü tanımı şu şekilde ifade edilmiştir: “Simetri, bir şeklin simetri ekseni olarak isimlendirilen bir doğruya göre yansımasıdır. Simetri orijinal şeklin ayna görüntüsünü oluşturur.” (s.54). ADK₂'de yer alan simetri tanımında, simetrisinin bir ayna görüntüsü olduğu, bir simetri eksenine göre görüntünün oluştuğu ifade edilmektedir. Kitapta yer alan bu tanım simetrisinin tanım kümesi bakımından incelendiğinde,

tanımın içinde “şeklin hareketi”, “şeklin ters çevrilmesi” ve “şeklin yer değiştirmesi” gibi ifadelerle yer verilmemiş olmasının yanında, düzlemi oluşturan tüm noktaların simetri eksenine göre bire-bir ve örten olacak şekilde eşleşmesi ya da yansımaları gerektiği ifadeleri kullanılmamıştır. Ayrıca verilen şeklin bütün noktalarının simetri görüntüsünün oluşturulması gerektiği gibi bir ifadeye de yer verilmediği görülmektedir. Tanımda şekil dışındaki noktaların göz ardı edildiği ve şeklin de yalnızca bir bütün parçaymış gibi dikkate alındığı düşüncesi görülmektedir. Bu bakımdan ADK₂'de verilen tanımın simetrisinin tanım kümesi bakımından hareket perspektifine yönelik olduğu görülmektedir. Tanımın hareket perspektifine yönelik olmasından dolayı, kitapta yer verilen aktiviteler simetrisinin tanım kümesi bakımından incelenmiştir. ADK₂'de yer alan simetri aktivitelerine örnekler Şekil 19'da gösterilmiştir.

Şekil 19

ADK₂ Simetri Örnekleri

EXAMPLE 3 Reflecting a Figure in the y-axis

The vertices of a quadrilateral are $P(-2, 5)$, $Q(-1, -1)$, $R(-4, 2)$, and $S(-4, 4)$. Draw the figure and its reflection in the y-axis.

Take the opposite of the x-coordinate. The y-coordinate does not change.

Vertices of PQRS	$(-x, y)$	Vertices of P'Q'R'S'
$P(-2, 5)$	$(2, 5)$	$P'(2, 5)$
$Q(-1, -1)$	$(1, -1)$	$Q'(1, -1)$
$R(-4, 2)$	$(4, 2)$	$R'(4, 2)$
$S(-4, 4)$	$(4, 4)$	$S'(4, 4)$

The figure and its image are shown at the above right.

The vertices of a parallelogram are $A(-1, -1)$, $B(2, -1)$, $C(4, -3)$, and $D(1, -3)$. Draw this parallelogram and its reflection in the x-axis. What are the coordinates of the image?

The vertices of a triangle are $A(1, -2)$, $B(4, -1)$ and $C(2, 4)$. Draw this triangle and its reflection in the y-axis. What are the coordinates of the image?

Draw the figure and its reflection in the x-axis. Identify the coordinates of the image.

- $A(2, 2), B(4, 4), C(1, 2)$
- $M(-2, 1), N(3, 3), P(2, 2)$
- $F(2, -2), G(-1, 4), H(-3, 1), I(5, -4)$
- $D(-2, -1), E(3, -1), F(5, -5), G(-2, -5)$

Draw the figure and its reflection in the y-axis. Identify the coordinates of the image.

- $Q(-4, 2), R(-2, 4), S(-1, 3)$
- $T(1, -2), U(4, 2), V(4, -2)$
- $H(2, -1), K(5, -2), L(5, -5), M(2, -4)$
- $J(2, 2), K(5, 4), L(6, -2), M(5, -1)$

18. ALPHABET Which letters look the same when reflected in the line?

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a: s.57

b

c

d: s. 58

Şekil 19'da ADK₂'de yer alan simetri eksenleri örnekleri incelendiğinde, yansıma dönüşümlerinin yalnızca düzlem üzerinde verilen şekillere ya da belirlenen bazı noktalara yönelik yapıldığını gösteren aktiviteler olduğu görülmektedir. Örneğin Şekil 18a'da verilen örnek incelendiğinde, sadece şeklin köşe noktalarının simetrisinin oluşturulması gerektiği ve görüntünün koordinatlarının ifade edilmesi gerektiği söylenmiştir. ADK₂'de verilen tanımı hatırlamak gerekirse, tanımda simetri “bir şeklin simetri eksenini olarak isimlendirilen bir doğruya göre yansımasıdır. Simetri orijinal şeklin ayna görüntüsünü oluşturur.” şeklinde ifade edilmiştir. Bu bakımdan ADK₂'de bulunan aktivitelerin, simetrisinin tanım kümesinin kavramsal olarak anlaşılmasında hareket perspektifine yönlendirici şekilde olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan matematik ders kitaplarında yer alan tanımlar ve aktiviteler simetrisinin tanım kümesi bakımından incelendiğinde, Türkiye tarafından kullanılan her iki kitapta da yansıma dönüşümü tanımları aynı iken, Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan kitaplarda farklı olduğu görülmektedir. Türkiye'de kullanılan kitaplarda yer alan tanımlar ve aktivitelerde simetrisinin tanım kümesinden, simetrisinin düzlem üzerindeki tüm noktalara uygulanması gerektiği durumundan söz edilmediğinden ve sadece düzlem üzerinde verilen şekil ya da noktalara odaklanıldığından Türkiye'de kullanılan ders kitapları, simetrisinin tanım kümesi bakımından öğrencileri hareket perspektifine sahip olmaya yönelik içerikte olduğu ortaya çıkarılmıştır. Diğer yandan Amerika Birleşik Devletleri

tarafından kullanılan ders kitaplarında ise, ADK_1 'de yer alan tanımda düzlem üzerinden bulunan tüm noktaların görüntüsünün oluşturulması gerektiği ifadesi kullanıldığından ADK_1 simetrisinin tanım kümesi bakımından eşleştirme perspektifine yönelik iken, ADK_2 'de yer alan tanım ve aktiviteler düzlem üzerindeki tüm noktaların simetri görüntüsünün oluşturulması gerektiği ifadesine yönelik bir vurgu ya da açıklama yapmadığından, yalnızca şeklin ve şekle ait köşe noktalarının simetrisinin oluşturulması gerektiğine odaklandığından bu kitabın simetrisinin tanım kümesi bakımından hareket perspektifine yönelik olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Tablo 3

Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri Ders Kitaplarında Yansıma Dönüşümünün Hareket ve Eşleştirme Perspektiflerine Göre Analiz Sonuçları

Kavramlar	TDK_1	TDK_2	ADK_1	ADK_2
Yansıma dönüşümü tanımı	Hareket	Hareket	Eşleştirme	Hareket
Simetri ekseninin rolü	Eşleştirme	Eşleştirme	Eşleştirme	Hareket
Simetrisinin tanım kümesi	Hareket	Hareket	Eşleştirme	Hareket

Tablo 3 incelenen TDK_1 , TDK_2 , ADK_1 ve ADK_2 'de' de yansıma dönüşümü konusunda 3 parametre çerçevesinde hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre incelenmesi sonucunda ulaşılan bulguları özetlemektedir. Buna göre Türkiye'de kullanılmakta olan ders kitapları simetri tanımında hareket perspektifine yönelik iken, Amerika Birleşik Devletleri ders kitaplarının biri hareket diğeri eşleştirme perspektifine yöneliktir. İkinci parametre olan simetri eksenini kitaplarda incelendiğinde ise Türkiye'de kullanılmakta olan ders kitaplarının eşleştirme perspektifine yönelik olduğu, Amerika Birleşik Devletleri ders kitaplarının ise birinin hareket diğeri eşleştirme perspektifine yönelik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Son parametre olan simetrisinin tanım kümesinde ise Türkiye'de kullanılmakta olan ders kitaplarının ikisinin de hareket perspektifine yönelik olduğu, Amerika Birleşik Devletleri ders kitaplarının ise birinin hareket diğeri eşleştirme perspektifine yönelik olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'nde sıklıkla kullanılan matematik ders kitapları, yansıma dönüşümü konusunun kavramsal olarak anlaşılmasını sağlayan parametreler olan simetrisinin tanımı, simetri ekseninin rolü ve simetrisinin tanım kümesi kapsamında hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre karşılaştırılmıştır. Araştırmada, Türkiye ve Amerika Birleşik Devletleri'nde sıklıkla kullanılan ikişer ders kitabı incelenmiştir. Ele alınan ilk parametre simetrisinin ders kitaplarındaki tanımları olmuştur. Türkiye'de kullanılan ders kitaplarında simetrisinin tanımları birbirine benzer ve hareket perspektifine odaklanmışken, Amerika Birleşik Devletleri tarafından kullanılan ders kitaplarında tanımların birbirinden farklı ve eşleştirme perspektifine yönelik olduğu görülmüştür. Akarsu (2018), Amerika'da kullanılan 6, 7 ve 8. sınıf ders kitaplarında yer alan simetri konusundaki tanımların, simetrisinin yalnızca verilen şekle uygulanması gerektiği şeklinde açıklamalar içerdiğini, dolayısıyla bu kitapların hareket perspektifine yönelik olduğunu belirtmiştir. Öğretim sürecinde en çok kullanılan materyal olan ders kitaplarının, öğrencilerin kavramsal anlayışları üzerinde büyük bir etkiye sahip olduğu düşünüldüğünde, öğrencilerin de simetri konusunu anlamada çoğunlukla hareket perspektifine sahip olacağı yönündeki düşünce oldukça güçlüdür. Nitekim, Hollebrands'da (2003) lise öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin simetriyi tanımlamada şekillerin hareketi ve ters çevrilmesi gibi kavramlar kullandıklarını, dolayısıyla hareket perspektifine yönelik tanımlar yaptıklarını ortaya koymuştur. Bu bulgular, Türkiye'de kullanılan ders kitaplarının öğrencileri yansıma dönüşümü tanımı konusunda hareket perspektifine

yönlendirdiğini, Amerika Birleşik Devletleri'nde kullanılan ders kitaplarının ise birinin eşleştirme perspektifini birinin ise hareket perspektifini ön plana çıkardığını göstermektedir. Her iki yaklaşımın da öğrencilerin simetriyi kavramsal olarak anlamalarına farklı şekillerde katkı sağlayabileceği düşünülmektedir. Bu nedenle, her iki perspektifin de dengeli bir şekilde ele alındığı öğretim materyallerinin geliştirilmesi, öğrencilerin simetri kavramını daha geniş bir bağlamda anlamalarına yardımcı olabilir.

İncelenen ikinci parametre olan simetri ekseninde, Türkiye'de kullanılan ders kitaplarının eşleştirme perspektifine yönelik olduğu, Amerika Birleşik Devletleri'nde kullanılan ders kitaplarından birinin eşleştirme, diğerinin ise hareket perspektifine yönelik olduğu tespit edilmiştir. Bu durumun, simetri konusunda öğretim programlarında en çok işlenen parametrenin simetri eksenini olması ve simetrisinin çoğunlukla koordinat düzlemi örnekleri üzerinden anlatılmasının, eksenlerin eşit uzaklık ve diklik özelliklerini anlatmada daha anlaşılabilir bir yöntem olmasıyla açıklanabileceği düşünülmüştür. Her ne kadar bazı örnekler görseller aracılığıyla eşit uzaklık ve diklik kavramlarını vurguluyor olsa da, yine de öğrencilerin yansıma dönüşümünü uygularken bu özellikleri kendilerinin kullanmaması, eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin kavramsal olarak anlaşılmasında önemli bir engel olacağı düşünülmektedir. Hollebrands (2003) çalışmasında yaptığı görüşmelerde, öğrencilerin simetri eksenini anlamada başlangıçta çoğunlukla hareket perspektifine sahip olduklarını, ancak süreç içinde yönelttiği farklı aktiviteler sayesinde öğrencilerin hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş yaptıklarını ortaya koymuştur. Yanık (2006), öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarının simetri ekseninin rolünü açıklamada zorluk yaşadıklarını ve genellikle hareket perspektifine sahip olduklarını belirtmiştir. Bu bulgular, Türkiye'de kullanılan ders kitaplarının simetri eksenini öğretirken eşleştirme perspektifine daha fazla vurgu yaptığını, Amerika Birleşik Devletleri'nde kullanılan ders kitaplarının ise her iki perspektifi de kapsayacak şekilde çeşitlilik gösterdiğini göstermektedir. Öğrencilerin simetri eksenini kavramsal olarak anlamaları, kullanılan öğretim materyallerinin ve öğretim yöntemlerinin çeşitliliği ile desteklenebilir. Hollebrands (2003) ve Yanık (2006) tarafından yapılan çalışmalar, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının hareket perspektifine yatkın olduklarını, ancak uygun öğretim stratejileri ile eşleştirme perspektifine geçiş yapabileceklerini göstermektedir. Bu nedenle, her iki perspektifi dengeli bir şekilde ele alan öğretim materyalleri ve etkinlikler, öğrencilerin simetri eksenini daha kapsamlı ve derinlemesine anlamalarına katkı sağlayabilir.

Ele alınan son parametre olan simetrisinin tanım kümesi açısından, Türkiye'de kullanılan ders kitaplarının hareket perspektifine yönelik olduğu, Amerika Birleşik Devletleri'nde kullanılan ders kitaplarından birinin hareket, diğerinin ise eşleştirme perspektifine yönelik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Hollebrands (2003) çalışmasında, öğrencilerin büyük çoğunluğunun şekilleri düzlemden bağımsız olarak ifade ettikleri ve bu nedenle şekilleri düzlemin bir alt kümesi olarak düşünmedikleri için hareket perspektifine sahip olduklarını ortaya koymuştur. Yanık (2006) ise, öğretmen adaylarının simetri görüntüsü oluştururken verilen şekilleri düzlemden bağımsız olarak ve düzlem üzerinde hareket ettiklerini ifade ettikleri için hareket perspektifine sahip olduklarını belirtmiştir. Akarsu ve İler (2022) öğretmenlerle yaptıkları çalışmada, öğretmenlerin hepsinin ilk görüşmelerde hareket perspektifine sahip olduğunu, çalışmanın sonunda ise yalnızca bir öğretmenin eşleştirme perspektifine geçiş sağladığını göstermiştir. Öğrencilerin ve öğretmen adaylarının simetri konusunu kavramsal olarak anlamaları, genellikle başlangıçta hareket perspektifine dayanmaktadır. Ancak, uygun öğretim stratejileri ve aktivitelerle, eşleştirme perspektifine geçiş yapılabilir. Hollebrands (2003), Yanık (2006) ve Akarsu ve İler (2022) tarafından yapılan çalışmalar, öğrencilerin ve öğretmenlerin hareket perspektifine yatkın olduklarını, ancak eğitim süreçleri boyunca eşleştirme perspektifini de benimseyebileceklerini göstermektedir.

Öğrencilerin ve öğretmenlerin simetrisinin tanım kümesini anlamakta çoğunlukla hareket perspektifine sahip olmasının nedeninin (Akarsu, 2018; Flanagan, 2001; Yanık, 2006), öğretim programlarında simetri konusunda düzlem kısmının yeterince vurgulanmaması, öğrencileri

düzlemi bütüncül biçimde düşündürmeye yönelik aktivitelerin azlığı veya sınıf içi tartışmaların ve soru-cevap sıklığının yetersiz olması olduğu düşünülmektedir. Bu durumu gidermeye yönelik olarak, örneğin, düzlem üzerinde simetri görüntüsü oluşturulması beklenen bir şeklin simetri görüntüsü oluşturulduktan sonra, öğrencilerin aslında sadece verilen şekli değil, düzlem üzerinde bulunan tüm noktaların simetri eksenine göre eşit uzaklık ve diklik özelliklerinin korunarak birebir ve örten olacak biçimde eşleştiğini ve böylece simetri görüntüsünün oluştuğunu ifade etmelerini sağlayacak yönlendirmeler ve ifadeler yer alabilir. Bu yönlendirme şu şekilde yapılabilir: Verilen şeklin simetri görüntüsü oluşturulduktan sonra öğrencilere “Burada neyin simetrisini oluşturdu?” ve “Verilen şekil dışında simetri eksenine göre yansıyan başka bir şey var mı?” şeklinde sorular sorulabilir. Bu sorular, öğrencilerin simetri kavramını daha derinlemesine düşünmelerini ve düzlemi bütüncül olarak anlamalarını teşvik edebilir. Böylece, öğrencilerin simetri konusunu sadece hareket perspektifiyle değil, aynı zamanda eşleştirme perspektifiyle de kavramaları sağlanabilir. Bu tür yönlendirmeler ve aktiviteler, öğrencilerin simetri konusundaki kavramsal anlayışlarını derinleştirecek ve simetri ekseninin rolünü daha iyi anlamalarına yardımcı olacaktır. Öğretmenlerin de bu tür sorular ve yönlendirmelerle sınıf içi tartışmaları zenginleştirmeleri, öğrencilerin farklı perspektifler kazanarak matematiksel düşünce becerilerini geliştirmelerini destekleyecektir. Bu bağlamda, simetri konusunun öğretiminde daha kapsamlı ve çeşitli yaklaşımlar benimsenmesi, öğrencilerin simetriyi daha geniş bir bağlamda anlamalarına katkı sağlayacaktır.

Kavramsal bakımdan iyi nitelikte hazırlanmış bir ders kitabı içeriği, donanımlı bir öğretmenin de aracılığıyla öğrencilere eğitim sürecinde en büyük kılavuzlardan biri olacaktır. Çalışmadan elde edilen sonuçlar, her iki ülkeye ait kitaplarda da simetri konusunun hareket ve eşleştirme perspektiflerine yönelik tanımlar ve aktiviteler içerdiğini ortaya koymuştur. Bu noktada, ders kitaplarında eşleştirme perspektifine yönelik hazırlanmış bir içeriğin olması, öğrencilerin simetri konusunu kavramsal şekilde öğrenmelerini sağlayacağından, kitapta yer alan tanım ve aktivitelerin eşleştirme perspektifine yönelik hazırlanması önemlidir. Simetrinin tanımı, simetri ekseninin rolü ve simetrinin tanım kümesi parametrelerinin hareket ve eşleştirme perspektifleri içeriklerine göre dengeli biçimde hazırlanması, öğrencilerin de eşleştirme perspektifine sahip olmalarını sağlayacaktır. Bu çalışmanın devamında, dönme ve öteleme dönüşümü konularının da ders kitaplarında hareket ve eşleştirme perspektifleri kapsamında incelenmesi ve bu perspektiflerin ortaya çıkarılması hem dönüşüm geometri konusuna hem de dönüşüm konularının öğretim programlarındaki yerine kavramsal bakımdan bütüncül bir bakış açısı kazandıracaktır. Bu sonuçlar, öğretim materyallerinin ve stratejilerinin, öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine ve çeşitli açılardan anlamalarına nasıl katkıda bulunabileceğini vurgulamaktadır. Öğretmenler, ders kitaplarının bu yönlerini dikkate alarak, öğrencilerin hem hareket hem de eşleştirme perspektiflerini anlamalarını sağlamak için sınıf içi aktiviteler ve tartışmalar düzenlemelidirler. Böylece, öğrenciler simetri ve diğer dönüşüm konularını daha kapsamlı bir şekilde kavrayacak ve matematiksel düşünme becerilerini geliştireceklerdir.

KAYNAKÇA

- Ada, T. ve Kurtuluş, A. (2010). Students' misconceptions and errors in transformation geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(7), 901-909.
- Akarsu, M. (2018). *Pre-service teachers' understanding of geometric reflections in terms of motion and mapping view* (Unpublished doctoral dissertation). Purdue University, Indiana, USA.
- Akarsu, M. (2022). Understanding of geometric reflection: John's learning path for geometric reflection. *Journal of Theoretical Educational Science*, 15(1), 64-89.

- Akarsu, M. ve İler, K. (2022). Matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünün tanım kümesini hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre anlamalarının incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(Özel Sayı), 561-611.
- Akarsu, M. ve Öçal, M. F. (2022). How pre-service teachers perceive geometric reflection in a dynamic environment: Motion view and mapping view. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 14(2), 1531-1560.
- Aktaş, G. S. ve Ünlü, M. (2017). Understanding of eight grade students about transformation geometry: Perspectives on students' mistakes. *Journal of Education and Training Studies*, 5(5), 103-119. doi: 10.11114/jets.v5i5.2254
- Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 239-261.
- Bahadır, E. ve Demir, İ. (2017). Dönüşüm geometrisi konusunun öğretimi için geliştirilen dönüşüm çarkı materyalinin kullanılabilirliğinin incelenmesi, *Uluslararası Sosyal ve Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 96-119.
- Bansilal, S. ve Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South African Journal of Education*, 32(1), 26-39.
- Bütüner, S. Ö. (2020). A comparison of the instructional content on division of fractions in Turkish and Singaporean textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 265-293.
- Bütüner, S. Ö. (2020). Türkiye'de okutulan ortaokul matematik ders kitaplarının aritmetik ortalama kavramına ilişkin öğrencilere sunduğu öğrenme fırsatları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 11(1), 157-187.
- Chen, S. (2024). Comparative analysis of contents on the Pythagorean Theorem in mathematics textbooks from America and China. *The Educational Review*, 8(1), 20-26.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 420-464.
- Common Core State Standards Initiative (2010). Common core state standards for mathematics. https://thcorestandards.b-cdn.net/Math_Standards1.pdf adresinden ulaşılmıştır.
- Coxford Jr, A. F. (1973). Geometry in the mathematics curriculum: A transformation approach to geometry. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*.
- Demir, Ö. ve Kurtuluş, A. (2019). Dönüşüm geometrisi öğretiminde 5E öğrenme modelinin 7. sınıf öğrencilerinin Van Hiele dönüşüm geometrisi düşünme düzeylerine etkisi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 20, 1279-1299.
- Edwards, L. (1997). Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 187-215.
- Emin, A., Gerboğa, A., Güneş, G., ve Kayacı, M. (2021). *Ortaöğretim matematik 12 ders kitabı*. Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Erbaş, A. K., Alacacı, C. ve Bulut, M. (2012). A comparison of mathematics textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(3), 2324-2329.

- Fan, L. ve Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies of Mathematics*, 66(1), 61–75.
- Fan, L., Trouche, L., Qi, C., Rezat, S. ve Visnovska, J. (Eds.). (2018). *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues*. Springer.
- Fan, L., Zhu, Y. ve Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM-Mathematics Education*, 45, 633-646.
- Flanagan, K. A. (2001). *High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment* (Unpublished doctoral dissertation). The Pennsylvania State University, Pennsylvania.
- Glass, B. J. (2001). *Students' reification of geometric transformations in the presence of multiple dynamically linked representations*. The University of Iowa, Iowa.
- Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166.
- Hirsch, C. R. ve Reys, B. J. (2009). Mathematics curriculum: A vehicle for school improvement. *ZDM-Mathematics Education*, 41, 749-761.
- Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 55–72.
- Hollebrands, K. F. (2004). Connecting research to teaching: High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *The Mathematics Teacher*, 97(3), 207-214.
- Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: Historical reflections from a personal perspective. *ZDM-Mathematics Education*, 45(5), 647–658. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0511-9>
- Jones, K. ve Fujita, T. (2013). Interpretations of national curricula: The case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM-Mathematics Education*, 45(5), 671-683.
- K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, and L. Fan (Eds.) (2014). *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)*. Southampton, UK: University of Southampton.
- Kar, T., Güler, G., Şen, C. ve Özdemir, E. (2018). Comparing the development of the multiplication of fractions in Turkish and American textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 200–226. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355993>
- Kemancı, B., Büyükokutan, A., Çelik, S. ve Kemancı, Z. (2021). *Ortaöğretim fen lisesi matematik 12 ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8.
- Korkmaz, E., Tutak, T. ve İlhan, A. (2020). Ortaokul matematik ders kitaplarının matematik öğretmenleri tarafından değerlendirilmesi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 18, 118-128.
- Larson, R. ve Battaglia, P. (2024). *Geometry: Concepts & connections*. <https://ngl.cengage.com/esamples/25856/96984/index.html> adresinden ulaşılmıştır.

- Larson, R. ve Boswell, L. (2019). *Big ideas math: A bridge to success geometry student edition*. Erie, PA: Big Ideas Learning, LLC.
- Lepik, M., Grevholm, B. ve Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 129–156.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234-241.
- Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. New York, NY: Springer-Verlag.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research. A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: John Wiley-Sons.
- Mersin, N. ve Karabörk, M. A. (2021). The comparison of math textbooks in turkey and singapore in terms of technology integration. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 13(1), 552–573.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Yayınları.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Newton, D. P. ve Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 64, 69-84.
- Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues* (pp. 69–88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4
- Reys, B. J., Reys, R. E. ve Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.
- Sherman, M. F., Walkington, C. ve Howell, E. (2016). Brief report: A comparison of symbol-precedence view in investigative and conventional textbooks used in algebra courses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 134-146.
- Shield, M. ve Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 183-199.
- Son, J. ve Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9229-6>
- Sünker, S. ve Zembat, İ. Ö. (2012). Teaching of translations through use of vectors in Wingeom-tr environment. *Elementary Education Online*, 11(1) 173-194.
- Takeuchi, H. ve Shinno, Y. (2020). Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(4), 791-810.

- Valverde, G. A. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Van Steenbrugge, H., Valcke, M. ve Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 322-353.
- Yanık, H. B. (2006). *Prospective elementary teachers' growth in knowledge and understanding of rigid geometric transformations* (Unpublished doctoral dissertation). Arizona State University, Arizona.
- Yanık, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, 78(2), 231-260.
- Yanık, H. B. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 33-50.
- Yanık, H. B. ve Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 41-57.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 195-213.
- Zorin, B. (2011). *Geometric transformations in middle school mathematics textbooks* (Unpublished doctoral dissertation). University of South Florida, Florida.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Educational materials play a significant role in enhancing the efficiency of teaching environments. In the 21st century, teachers are expected to use educational materials effectively to improve the quality of education. The use of these materials helps change students' negative attitudes toward lessons and fosters the development of critical thinking and creativity. One of the most commonly used materials in teaching is textbooks, which are essential resources for both teachers and students. In mathematics education, textbooks are crucial for helping students acquire daily life skills and increase their academic success. Textbooks guide teachers in lesson planning, instructional methods, and pedagogical development, while also assisting students in reinforcing their learning. Research highlights that textbooks should be conceptually strong, offering well-structured explanations, examples, and exercises to support students' conceptual understanding. Comparative studies of mathematics textbooks from different countries (e.g., the U.S., Singapore, Turkey) have explored various topics such as fractions, algebra, and problem-solving skills. The study aims to compare the treatment of reflection transformation in high school mathematics textbooks from Turkey and the U.S. through two perspectives: motion and mapping, given the limited research on this topic in the literature. The motion perspective involves reflecting points or shapes across a symmetry axis without considering properties like equal distance or perpendicularity, which often leads to misconceptions. In contrast, the mapping perspective emphasizes reflecting every point on the plane, maintaining equal distance and perpendicularity to the symmetry axis. Studies show that students, teacher candidates, and even teachers often approach reflection from the motion perspective, leading to conceptual difficulties. This is partly attributed to the content of mathematics textbooks, which may not sufficiently support the development of the mapping perspective. Consequently, this study aims to analyze the treatment of reflection transformation in mathematics textbooks from Turkey and the United States, focusing on how they address the motion and mapping perspectives.

Method

This study aims to compare the reflection transformation sections of two American and two Turkish textbooks in terms of motion and mapping perspectives. The textbooks follow the respective educational programs, CCSSI (2010) in the United States and MEB (2018) in Turkey, which guide how geometric transformations like reflection, translation, and rotation are taught. Turkish textbooks are centrally approved and used uniformly, while U.S. textbooks are more diverse, with states having flexibility in their curricula. The analysis focuses on the definitions, examples, and problems related to reflection transformation, examining whether they align with the motion or mapping perspectives. Researchers used a theoretical framework and established criteria to assess the content, analyzing how the textbooks present the key concepts of reflection, including the role of the symmetry axis and the scope of the transformation. The study highlights differences in the way these concepts are addressed across the two countries.

Results

Definition of Symmetry Transformation

This study aims to examine and compare the topic of symmetry transformation in mathematics textbooks used in Turkey and the United States from the perspectives of motion and mapping. The findings are categorized according to three main concepts that contribute to understanding symmetry transformation: the definition of symmetry transformation, the role of the axis of symmetry, and the domain of symmetry. Two textbooks from each country (TDK1, TDK2 from Turkey, and ADK1, ADK2 from the U.S.) were analyzed first within their respective countries, and then compared across countries. The results show that the symmetry transformation definitions in Turkish textbooks emphasize a motion perspective, focusing on the reflection of shapes. In contrast, the U.S. textbooks vary: ADK1 adopts a mapping perspective, applying symmetry to all points in the plane, while ADK2 aligns with the motion perspective, focusing on the reflection of a shape across a symmetry axis. Therefore, Turkish textbooks uniformly follow the motion perspective, while U.S. textbooks present a more diverse approach to symmetry transformation.

The Role of the Symmetry Axis

This section of the study focuses on the role of the symmetry axis in understanding symmetry transformations from both motion and mapping perspectives. The symmetry axis has two essential properties: equal distance and perpendicularity. In Turkish textbooks (TDK1 and TDK2), while these properties are not explicitly mentioned in written descriptions, they are demonstrated through visuals, indicating a mapping perspective. In U.S. textbooks, ADK1 explains both properties clearly in both text and visuals, aligning with the mapping perspective. However, ADK2 emphasizes equal distance but not perpendicularity, suggesting a motion perspective. Overall, the Turkish books focus more on mapping while the U.S. books show a split approach.

Symmetry Transformation Domain Set

The analysis compares the domain sets of symmetry transformations in mathematics textbooks from Turkey and the United States. Turkish textbooks (TDK1 and TDK2) primarily adopt a "motion perspective," emphasizing the symmetry transformation as a process where all points of a shape are reflected with respect to a line or a point (the symmetry axis). However, these definitions omit references to the reflection of all points in the plane or the comprehensive one-to-one correspondence of points. The activities in these textbooks also focus solely on specific shapes and points, reinforcing the motion perspective. In contrast, U.S. textbooks (ADK1 and ADK2) offer different perspectives. ADK1 emphasizes a "mapping perspective," highlighting the one-to-one correspondence of all points in the plane concerning the symmetry

axis. ADK2, however, aligns more with the motion perspective, focusing on the reflection of the shape as a whole, without specifying the need to reflect all points in the plane. Thus, Turkish textbooks encourage a motion-based perspective of symmetry, while U.S. textbooks offer a mix of motion and mapping perspectives across different examples and activities.

Discussion and Conclusion

This study compares mathematics textbooks frequently used in Turkey and the United States in terms of symmetry transformation, focusing on key parameters such as the definition of symmetry, the role of the symmetry axis, and the domain set of symmetry. Two textbooks from each country were examined. In Turkey, symmetry is typically defined similarly across textbooks, with a focus on the motion perspective. In contrast, U.S. textbooks offer varied definitions, emphasizing either the mapping or motion perspectives. Studies by Akarsu (2018) and Hollebrands (2003) suggest that textbooks heavily influence students' conceptual understanding, often leading them toward the motion perspective. This is further supported by research indicating that students in both countries tend to initially adopt a motion perspective when defining symmetry. However, with appropriate instructional strategies, students can transition to a mapping perspective, which offers a broader conceptual understanding of symmetry. In terms of the symmetry axis, Turkish textbooks prioritize the mapping perspective, while U.S. textbooks offer a more balanced approach between motion and mapping. This indicates the need for instructional materials that address both perspectives to enhance students' comprehensive understanding of symmetry. The final parameter, the domain set of symmetry, revealed that Turkish textbooks emphasize the motion perspective, while U.S. textbooks vary. Research suggests that students and teachers initially favor the motion perspective but can adopt the mapping perspective with targeted teaching strategies. This study underscores the importance of developing balanced instructional materials that incorporate both perspectives to improve students' conceptual grasp of symmetry and related mathematical transformations.