HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
İKTİSADİ VE İDARİ BİLİMLER FAKÜLTESİ DERGİSİ

CİLT 11/1993

PROBLEM ÇÖZMEDE ŞEBEKE ANALİZİ YAKLAŞIMI

Araş. Gör.Aydın Ulucan(*)

1. Giriş

Şebeke optimizasyonu, matematiksel programlamanın önemli ve uygulamaya yönelik dallarından birisidir. Son 20-30 yıl içinde bu alanda elde edilen gelişmeler, endüstri ve hükümetleri de içine alan geniş bir yelpazedeki problemlerin çözümünde, şebeke analizini temel planlama ve çözümleme araçlarından biri haline getirmiştir.

Şebeke analizinin bu derece önem kazanması, gerek problemin planlanması gerekse çözümlenmesi aşamasında sağladığı avantajlardan dolayıdır. Bu avantajlar şu şekilde maddelenebilir;

1) Şebekeler ile pekçok uygulama hassas olarak modellenebilir.

2) Şebeke modelleri diğer Yöneylem Araştırması modellerine göre, yönetim tarafından daha kolay kabul edilebilir yapıdadır. Çünkü bu modeller fiziksel şebekeler ile doğrudan ilişkilendirilebilir. Bu yüzden sayısal bilgisi kuvvetli olmayan kişilere de açıklaması kolaydır.

3) Şebeke modelleri büyük ölçekli optimizasyonun sınırlarını çok genişletmiştir. Günümüzde onbinlerce kayıtlama ve milyonlarca değişkeni içeren modeller rutin olarak çözülebilmektedir.

4) Bu modeller "ne ise-ne olur(What-if)" analizine çok uygun yapıdadırlar. Bu özellik, modelin değişik senaryolar üretebilmesi özelliğini, diğer bir ifadeyle de değişken koşullara modelin kolayca uyum sağlayabilmesi özelliğini beraberinde getirmektedir.

5) Şebeke modellerine yönelik olarak geliştirilmiş algoritmalar, genel amaçlı doğrusal programlama algoritmalarına göre çok daha hızlı çözüme ulaşabilmektedir.

(*) Hacettepe Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü Araştırma Görevlisi

Şebeke modellerinin literatürdeki uygulama alanları ise aşağıdaki şekilde gruplanabilir;

1) Üretim-stok-dağıtım sistemleri,
2) Askeri lojistik sistemler,
3) Şehir trafik sistemleri,
4) Demiryolu sistemleri,
5) İletişim sistemleri,
6) Boru hattı şebeke sistemleri,
7) Faaliyetleri yerleştirme sistemleri,
8) Rota belirleme ve programlama sistemleri,
9) Elektrik şebekeleri,
10) Finansal analiz sistemleri,
11) Proje teklifi değerlendirme sistemleri,
12) Tahsis sistemleri,
13) Nakit akışını içeren şebeke sistemleri,
14) Fabrika yerleşimi problemi.

Uygulama alanlarının değişik özelliklerine yönelik farklı temel şebeke modelleri geliştirilmiştir. Bu modelleri şu şekilde sıralamak mümkündür;

1) Minimal maliyetli şebeke akış modeli,
2) Genelleştirilmiş şebeke akış modeli,
3) Çok ürünlü şebeke akış modeli,
4) Yan kayıtlamalı şebeke akış modeli,
5) Konveks maliyetli şebeke akış modeli,

Bu modellerin yapısal özelliklerine ileride değinilecektir. Şebeke analizinde yukarıda sayılan temel modellerin yanısıra, özelleşmiş modellerde vardır. Bunların başlıcaları; taşıma problemi modeli, maksimal akış problemi modeli, tahsis problemi modeli ve en kısa yol problemi modeli olarak sayılabilir.

Şebekeler üzerinde modern anlamda çalışmaların başlaması Hitchcock (1941) ve Koopmans(1947) ile ortaya çıkmıştır. Bu iki bilim adamı taşıma problemini ilk ortaya atan kişiler olmuştur. 1956'da Alex Orden(1956) taşıma problemini genelleştirmiştir. Aynı yıllarda Ford ve Fulkerson(1962), maksimal akış problemi ve minimum maliyetli şebeke akış problemini formülize etmişlerdir.

1950-1970 yılları arasında daha çok, doğrusal şebeke akış modelleri üzerinde çalışılmıştır. Bu yıllarda geliştirilmiş olan algoritmalar iki ana grupta toplanmaktadır: (1) primal-simpleks methodunun özelleşmiş hali ve (2) primal-dual metodları. Primal-simpleks metodunun özelleşmiş hali üzerinde Dantzig(1963) ve Johnson(1957)'un çalışmaları olmuştur. Primal-dual metodu ilk olarak Harold Kuhn(1955) tarafından tahsis problemine yönelik olarak geliştirilmiştir (Macar Algoritması). Daha sonra Fulkerson(1962) çok etkin bir algoritma olan Out-of-Kilter algoritmasını geliştirmiştir.

Bu klasik çalışmaların ardından yayınlanan çalışmalar, bu temel tekniklerin uygulaması ya da bu tekniklerden yola çıkarak, kazanç, birden fazla ürün, ilave genel kayıtlamalar, doğrusal olmayan konveks maliyet fonksiyonları gibi kavramları içeren geliştirilmiş modeller olmuştur. Günümüze kadar yapılan temel uygulamalara ise ileride değinilecektir.

2. Şebekenin Tanımı ve Yapısı:

2.1. Tanım:

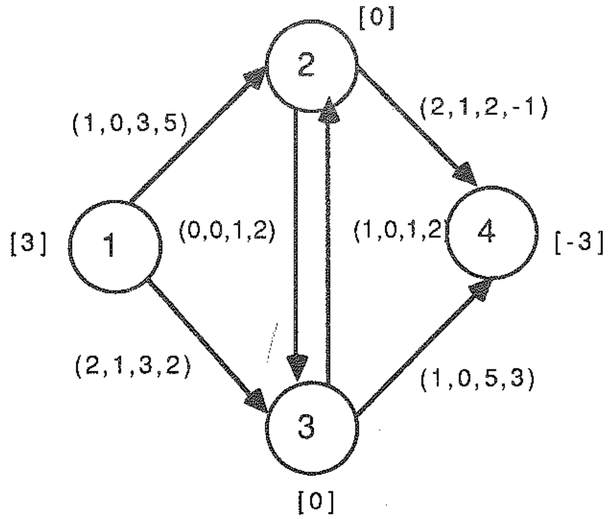
Şebeke problemleri temelde, şebekedeki bir akış fonksiyonunun minimize edilmesini belli kayıtlamalar dahilinde içeren problemlerdir. Kayıtlamalar ise başlıca şu gruplardan oluşur; (a) akışın korunumu kayıtlamaları (gelen akış giden akışa eşittir.), (b) yay üzerindeki akışın üst ve alt sınır kayıtlamaları, (c) farklı yaylardaki farklı akışlarla ilgili olası ek kayıtlamalar.

2.2. Yapı:

Şebeke modelinin yapısı düğümler(nodes) ve yaylarla(arcs) tanımlanır. Bir şebekedeki düğümlerin kümesi N ile gösterilebilir (N = [1, ...,n]). Şebekedeki yayların kümesini ise M ile gösterebiliriz (M = [1, ...,m]). Herhangi bir yay aynı zamanda sıralı düğüm çifti olarak ta gösterilebilir. Örneğin; k(i,j) ifadesi i düğümünde başlayıp j düğümünde biten k yayının gösterimidir. Bu gösterimde i'yi orjin düğümü, j'yide terminal düğümü olarak adlandırabiliriz. Dolayasıyla orjin düğümleri kümesini O = [o1, ..., om] ve terminal düğümleri kümesini T = [t1,....,tm] şeklinde gösremek mümkündür. Yönlü bir şebekede düğümlerin ve yayların kümesi D = [N,M] şeklinde gösterilir. Bu durumda n ve m değerleri ile O ve T kümelerini bilmek şebekedeki bağlantıları tanımlamak için yeterlidir. Faydalı bir diğer gösterimde, i. düğümde başlayan yayların kümesi

(M_{Oi} = [k | o_k = i]) ve i. düğümde biten yayların kümesi (M_{Ti} = [k | tk = i]) dir.

Şebeke görsel olarak şu şekilde çizilir. Düğümler, düğüm indeksini içeren bir daire ile sembolize edilir. Düğüm değişken ve parametreleri, düğüm yanında köşeli parantez içinde gösterilir. Yaylar, başlangıç ve bitiş düğümlerini bağlayan yönlü doğru parçaları olarak gösterilir. Bu doğruların yanında yay indeksi vardır. Yay parametre ve değişkenleri ise yayın yanında parantez içinde gösterilir. Örnek bir şebeke gösterimi Şekil 1.de verilmiştir.



Şekil 1. Örnek Şebeke Gösterimi

Şebeke gösteriminde kullanılan temel değişken ve terimler aşağıda açıklanmıştır.

2.2.1. Akış:

Çoğu problemi karakterize eden değişken değeri yay akışıdır. f_k ya da f(i,j) şeklinde gösterilebilir. Şebeke problemlerinde bu değişken fiziksel olarak bir akışı sembolize edebileceği gibi insan akışı, nakit akışı gibi farklı akışlarıda gösterebilir. Yay akışının temel karakteristiği, düğümlerde korunmasıdır (düğüme gelen akış giden akışaa eşittir). Akış vektörüde $\boldsymbol{f} = [f1, ..., fm]$ .eklinde gösterilebilir.

2.2.2. Maliyet:

Maliyet yay üzerindeki akışla birlikte düşünülebilir. k yayı üzerindeki maliyet hk(fk) sadece bu yay üzerindeki akışın bir fonksiyonudur ve diğer yaylardan bağımsızdır. Toplam şebeke maliyeti ise $H(f) = \sum_{k=1}^{m} h_k(f_k)$ olarak gösterilir. Maliyet fonksiyonları üç grupta toplanır: doğrusal, konveks ve konkav. Doğrusal maliyet fonksiyonu $h_k(f_k) = h_k f_k$ olarak açılır. h_k yay parametresidir ve her birim akış için yay üzerindeki maliyeti belirtmektedir. Yay maliyeti vektörü ise **h** = [h1, ..., hm] dir. Dolayısıyla toplam şebeke maliyeti $H(f) = h_k f_k = \mathbf{h}f$ dir.

2.2.3. Kapasite:

Her bir yay üzerindeki akışın üst sınırını belirleyen parametre yay kapasitesi (c_k) dır. Yay üzerindeki akış kapasiteyi aşamaz ($f_k <= c_k$). Yay kapasite vektörü

c = [c1, ..., cm] dir. Yay kapasite kayıtlamaları kümesi için f <= **c** olarak gösterilir.

2.2.4. Alt Sınırlar:

Çoğu modellerde yay üzerindeki akış belirli bir alt sınıra eşit ya da fazla olmak zorundadır. Dolayısıyla bir alt sınır parametresi (ck) tanımlanmalıdır. Yay üzerindeki akış bu parametreye eşit ya da üstündedir ($f_k >= \underline{c}_k$). yay alt sınır vektörü ise $\underline{c}$ = [$\underline{c}$1, ..., $\underline{c}$m] dir. Dolayısıyla vektörel gösterimde $f >= \mathbf{c}$ dir.

2.2.5. Harici Akışlar:

Harici akışlar şebekeye düğümlerden girer ya da çıkarlar. Çoğu şebeke modelinde, modellenen sistem ile çevresi arasındaki bağlantıyı gösterdiğinden hassas gösterilmesi önemlidir. Bir düğümde iki çeşit harici akış olabilir: sabit akış ve aylak akış. i düğümündeki sabit akış (b_i), eğer $b_i > 0$ ise şebekeye girer, $b_i < 0$ ise şebekeden çıkar. İ düğümündeki aylak harici akış (f_{si}), optimizasyon sürecinin bir aşaması olarak belirlenir. Bu akışın yönü ve sınırladığı değeri düğüm parametresi bsi (aylak akış kapasitesi) ile gösterilir. Eğer b_{si} pozitif ise f_{si} şebekeye girer ve $0 <= f_{si} <= |b_{si}|$ olacak şekilde sınırlanır, eğer bsi negatif ise f_{si} şebekeden çıkar ve $0 <= f_{si} <= |b_{si}|$ olacak şekilde sınırlanır. Toplam yay maliyeti ve aylak harici akış maliyeti ise

$$H(f) = \sum_{k=1}^{m} h_k f_k + \sum_{k=1}^{m} h_{si} f_{si} \quad \text{olarak değişir.}$$

2.2.6. Akışın Korunumu:

Bir şebekedeki aylak düğümlerin dışındaki tüm düğümlerde akış korunmaktadır. Düğümden ayrılan toplam yay akışları - düğüme gelen toplam yay akışları = Düğümdeki sabit harici akış.

$$\sum_{k \in M_{oi}} f_k - \sum_{k \in M_{Ii}} f_k = b_i$$

2.3. Şebeke Modelinin Cebirsel Gösterimi:

Grafiksel gösterime ek olarak düğüm artı yay parametreleri, şebeke akım modelini tanımlamak için yeterlidir. Modelin cebirsel gösterimi, modeldeki tüm varsayımları gözönüne serdiğinden daha etkilidir. Teorik gelişme cebirsel gösterim üzerinde yoğunlaşmıştır. Tanımlanmış değişkenler ve parametreler cinsinden, genel - tek ürünlü- doğrusal - minimum maliyetli akış problemi, doğrusal programlama modeli olarak şu şekilde ifade edilir;

$$\text{Min.} \quad \sum_{k=1}^{m} h_k f_k$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in M_{oi}} f_k - \sum_{k \in M_{Ii}} f_k = b_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$f_k <= c_k \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$f_k >= 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

Bu model matris notasyonu ile şu şekile dönüşür;

$$\text{Min.}\, \boldsymbol{hf} \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Af} = b \quad \text{(Akışın korunumu eşitlikleri)} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{f} <= \mathbf{c} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{f} >= \mathbf{0} \qquad (4)$$

Bu noktada çözüm algoritması üzerindeki etkisinden dolayı, doğrusal programlama yaklaşımının kimi önemli sonuçlarına değinmekte fayda vardır:

A'nın A = [B, R] olacak şekilde ikiye ayrıldığını varsayalım. A'nın doğrusal olarak bağımsız kolonlarından oluşmuş herhangi bir B matrisi temel matris, bu matrisin kolonlarına karşılık gelen değişkenler de temel değişkenler olarak adlandırılır. B'nin kolonlarıyla aynı sırada yazılmış temel değişkenler vektörüde f_b'dir.

Aynı yaklaşımla, R'deki temel olmayan değişkenler de f_r'dir. Bu ayrıştırmanın ardından doğrusal programlama modelindeki kayıtlamalar şu şekle döner:

$$[\mathbf{B}, \mathbf{R}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_b} \\ \boldsymbol{f_r} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad (5)$$

Bu eşitlikler, f_b için çözüldüğünde,

$f_B = B^{-1} [b - R f_R]$ elde edilir. (6)

Temel olan bir çözüm tanımlamak için, öncelikle temel olmayan her değişkenin değeri 0 ya da c_k'ya eşitlenmelidir. Bu aşamadan sonra (6) numaralı eşitlik, temel çözümü (f_b) verir.

Bu sonuçların yanısıra, modelin duali gerekli çevirimler yapıldıktan sonra aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_i b_i + \sum_{k=1}^{m} \partial_k c_k$$

s.t. $\Pi_i - a_k \Pi_j + \partial_k \geq - h_k$ $\quad k=1,\ldots\ldots.m \quad i=o(k) \quad j=t(k)$

Π_i kayıtlanmamış $\quad 1= 1,\ldots.,n-1$

$\partial_k >= 0$

Bu formun matris notasyonu ise şöyledir;

Min. $\Pi b + \partial c$ (7)

$\Pi A + \partial I >= -h$ (8)

Π sınırlanmış (9)

$\partial >= 0$ (10)

Minimal maliyetli şebeke akış problemi için doğrusal programlama modelinin optimal çözümünün, primal ve dual şartları aşağıdaki üç teoremle özelleştirilmiştir (Jensen 1980).

Teorem1:

Primal problemin $f = [\, f_b \,,\, f_r \,]^T$ çözümü ve dual problemin $[\Pi, \partial]$çözümü sadece ve sadece aşağıdaki şartlar dahilinde optimaldir;

1) f - (2), (3) ve (4)'ü sağlayacak şekilde uygundur.

2) $[\,\Pi, \partial]$- (8) ve (10)'u sağlayacak şekilde uygundur.

3) Bütünleyici aylaklık şu şekilde sağlanır.

a) Eğer $f_k(i,j) > 0$ ve $\Pi i - a_k \Pi_j + \partial_k = -hk$.

b) Eğer $fk < ck$ ve $\partial_k = 0$.

c) Eğer $\Pi i - a_k \Pi_j + \partial_k > -hk$, $f_k(i,j) = 0$

d) Eğer $\partial k > 0$, $f_k = ck$

Teorem 2:

Eğer $[\Pi, \partial]$ dual problemin optimal çözümü ise, $\partial_k = \max [0, -hk -i +akj]$

Teorem 3:

Primal probleme verilen f çözümünün ve dual problemine verilen kısmi Π çözümünün optimal olması sadece ve sadece aşağıdaki şartların gerçekleşmesine bağlıdır.

a) Primal uygunluk.

b) $\partial_k = \max [0, -hk -\Pi_i +a_k\Pi_j]$

c) Bütünleyici aylaklık şartları;

ca) $0< fk < ck$ için	$\Pi i -a_k\Pi_j = -hk$
cb) $fk = 0$ için	$\Pi i -a_k\Pi_j > -hk$
cc) $fk = ck$ için	$\Pi i -a_k\Pi_j < -hk$

3. Minimal Maliyetli Akış Problemleri ve Çözüm Algoritmaları:

Değişik tiplerdeki şebeke problemlerini çözmek için çok çeşitli çözüm algoritmaları geliştirilmiştir. Genelde, bu algoritmalar yukarıda belirtilen teoremler ışığında modeli çözen sonlu iteratif süreçlerdir. Açıklanacak algoritmalar arasındaki temel fark, teoremlerdeki şartların sağlanmasının sırasıdır. Algoritmaları, primal fizibil, dual-düğüm infizibil, dual-yay infizibil ve primal-dual olmak üzere dört grupta inceleyeceğiz. Her bir algoritma değişik problem tiplerine göre farklı formlar alabilir. Ancak aşağıda verilecek aşamalar sabit olarak izlenir.

3.1. Primal Yaklaşım:

Bu yaklaşım, bütünleyici aylaklık şartlarına ulaşmaya çalışırken fi primal fizibil yapacak şekilde, f ve Π'yi iteratif olarak türetmeye çalışır. Bu noktada k yayı için bütünleyici aylaklık şartlarının ihlalinin ölçüsü olan e_{ck}'yi şu şekilde tanımlayabiliriz;

$e_{ck} = \max [d_k f_k, (f_k - c_k)d_k]$ ve toplam e_{ck};

$$Eck = \sum_{k=1}^{m} e_{ck} \quad \text{dır.}$$

Algoritma;

i. Primal fizibiletiyi sağlayan f ve Π 'yi bul.
ii. $e_{ck} > 0$ olacak bir yay bul. Eğer yoksa dur, varsa aşama iii'ye git.
iii. Yayın e_{ck}'sını azaltırken, primal fizibiliteyi de sağlayacak yeni f ve Π bul. Aşama ii'ye git.

3.2. Dual-Düğüm İnfizibilite Yaklaşımı:

Bu algoritma, bütünleyici aylaklık şartlarını gerçeklerken, akışın korunumu dışında tüm primal fizibilite şartlarınıda sağlar. Belli bir anda yay üzerindeki akış için, harici akış gereksinimini bi' olarak tanımlayalım.

$e_{Ni} = |bi - bi'|$ ve $E_N = \sum_{i=1}^{N-1}$ olacak şekilde i düğümünün infizibilite ölçümünüde tanımlayalım. Bu yaklaşımdaki amaç, E_N'i sıfır yaklaştıracak şekilde f ve Π'yi iteratif olarak değiştirerek optimaliteye ulaşmaktadır.

Algoritma;

i. Yay kapasite kısıtlamaları ve bütünleyici aylaklığı sağlayacak şekilde Π ve $f>=0$'ıbul.
ii. $e_{Ni} > 0$ olacak şekilde bir düğüm bul. Yoksa dur. Varsa aşama iii'ye git.
iii. Bütünleyici aylaklık ve yay fizibilitesini sağlarken, düğümün infizibilitesini azaltacak şekilde yeni f ve Π bul.

3.3. Dual-Yay İnfizibil Yaklaşımı:

Bu algoritmanın her aşamasında, bütünleyici aylaklık ve akışın korunumu şartları sağlanır. Bununla birlikte, kapasitelerin üstünde ya da sıfırın altında akışa maruz kalır. $e_{Ak} = \max[-fk, 0, fk - ck]$ yay üzerinde ölçülen infizibilite olsun. Şebeke infizibilitesi de

$E_A = \sum_{k=1}^{m} e_{Ak}$dır. Bu algoritma $E_A = 0$ yapacak şekilde f ve Π'yi iteratif

olarak modifiye eder.

Algoritma:

i. Bütünleyici aylaklık ve akışın korunumu şartlarını sağlayan $f\Pi$ bul.
ii. $e_{Ak} >= 0$ olan bir k yayı bul. Yoksa dur.
iii. Akışın korunumunu ve bütünleyici aylaklık şartlarını sağlarken, e_{Ak}'yi azaltacak şekilde f ve Π'yi modifiye et. Aşama ii'ye dön.

3.4. Primal-Dual Yaklaşımı:

3.4.1. Genel Yaklaşım:

Bu algoritma hiçbir şartı gözönünde bulundurmadan, f ve Π'yi modifiye ederek çözümü ulaşır.

Algoritma;

i. Herhangi bir f ve Π seç.
ii. $e_{Ni} > 0$ olacak şekilde bir düğüm ya da $e_{Ak} > 0$ ya da $e_{Ck} > 0$ olacak şekilde bir yay bul.
iii. e_{Ni}'yi (ya da e_{Ak} ya da e_{Ck}'yi) azaltacak şekilde yeni f ve Π bul.

3.4.2. Out-of-Kilter Algoritması:

Minimal maliyetli şebeke akış problemlerini çözmek için kullanılan ilk özelleşmiş algoritma Out-of-Kilter(OKA) algoritmasıdır. 1960'larda Fulkerson (1962) tarafından ortaya atılan bu algoritma bazı avantajları nedeniyle günümüzde de popülerdir. Bu avantajlar şöyle sıralanabilir;

i. Algoritma kolay anlaşılabilir yapıdadır.
ii. Şebeke gösteriminde özel hafıza gereksinimleri yoktur. Yay parametreleri herhangi bir sırada girilip saklanabilir.
iii. Algoritma harici düğüm akış parametreleri kullanmaz. Tüm bilgiler yay parametreleri ile tanımlanabilir.
iv. Algoritma, akışın korunumunu sağlayan herhangi bir akış kümesi ile başlatılabilir.

Yaklaşımın dezavantajları şunlardır;

i. Çözümler temel olmak zorunda değildir. Bu da optimuma yavaş bir yaklaşımı beraberinde getirir.
ii. Çok büyük problemler için, hesaplamalarda verimli değildir.

OKA ne primal ne de dual olan bir çözümle başlayan özelleşmiş bir primal-dual yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, diğer algoritmalara nazaran ölçülebilir bir esneklik sağlamaktadır.

4. Minimal Maliyetli Şebeke Akış Problemine Bağlı Diğer Modeller:

4.1. Giriş:

Minimal maliyetli şebeke akış probleminin uzantıları olarak değişik modeller geliştirilmiştir. Bu modeller şu şekilde gruplanabilir; Genelleştirilmiş şebeke akış modeli, çok ürünlü şebeke akış modeli ve konveks maliyetli şebeke akış modeli.

4.2. Genelleştirilmiş Şebeke Akış Modelleri:

Yay üzerindeki akışın, yayın başından sonuna geçerken doğrusal olarak artması ya da azalması durumunu içeren modellerdir. Bu modelde akışın yay üzerindeki artış veya azalışını gösteren, kazanç parametresi ek olarak modele girmektedir. Bir k yayı üzerinde i düğümünden çıkan akış fk olarak adlandırıldığında, j'ye k yayından gelen akış f_k' dır ve f_k - f_k' ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$f_k' = a_k * f_k$$

$0 < a_k < 1$ olduğunda, yay üzerindeki akışın azalarak geçtiği, $a_k > 1$ durumunda ise akışın yay üzerinde arttığı anlaşılmalıdır. Dolayısıyla "genelleştirilmiş şebeke" tanımlaması 1'den farklı yay kazanç parametreleri olan yay(lar)a sahip şebekeler için kullanılmaktadır.

Bu modelin klasik modelden farklı birtakım karakteristikleri vardır. Öncelikle, yay üzerindeki akışlar artık tamsayı olmak zorunda değildir. Ayrıca, şebekeye giren akışın çıkana eşit olması da gerekmemektedir. Bununla birlikte, her düğüm için akışın korunumu şartları halen gereklidir.

Kazanç parametresinin modele sokulması ile, şebeke programlaması yaklaşımı ile modellenebilecek problemlerin sayısı oldukça artar. Bir projeye yatırılan paranın değer artışı, bir depodaki suyun buharlaşması, bir akış miktarının diğerine çevrimi gibi problemler, kazanç parametresi yardımıyla modellenebilecek problemlere örnek teşkil eder.

Modelin genel gösterimi aşağıdaki gibidir ve çözümü için geliştirilmiş özel algoritmalar mevcuttur.

Min. $\sum_{k=1}^{m} h_k f_k$

s.t. $-\sum_{k \in M_{Ti}} a_k f_k + \sum_{k \in M_{oi}} f_k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots i \in N,\ i \neq s,t$

$-\sum_{k \in M_{Ti}} a_k f_k + \sum_{k \in M_{oi}} f_k = -b_t$

$0 <= f_k <= c_k \qquad k \in M$

4.3. Çok Ürünlü Şebeke Akış Modelleri:

Yaylar üzerinde birden fazla ürünün hareketine karşılık gelen, farklı tip akışların olduğu modellerdir. Çözümleri için ileri düzeyde algoritmlar geliştirilmiştir.

4.4. Konveks Maliyetli Şebeke Akış Modeli:

Bu ana kadar sunulan modellerde, maliyetlerin doğrusal fonksiyonlar olduğu varsayılmıştır. Ancak doğrusal yapıda olmayan maliyetlerle (konveks ya da konkav fonksiyonlar), gerçek hayat problemlerinde sık sık karşılaşılır. Şebeke modellerinin önemli ve kaçınılmaz genelleştirmelerinden biriside, çeşitli risk durumlarının modele entegre edilmesidir. Çalışmalar, risk içeren kimi durumların konveks maliyet eğrileri ile modellenebileceğini göstermiştir.

5. Faaliyet Şebekeleri:

5.1. Giriş (CPM ve PERT tekniklerine genel bakış):

Projeler, birbiriyle ilişkili pekçok faaliyetten oluşur. Bu faaliyetler arasında öncelik ilişkisi mevcuttur. Aynı zamanda herbir faaliyetin de gerçekleştirilme süresi vardır. Bu iki özellikten dolayı, proje yöneticisi, projeyi zamanında tamamlama ve tüm faaliyetleri olası en iyi yolla gerçekleştirme ikilemi ile karşı karşıyadır. Diğer bir deyişle, yönetici, projenin zamanında tamamlanması için hangi faaliyetlerin kritik olduğunu belirlemelidir.

Faaliyet şebekeleri olarak ifade edilen projelerde aşağıdaki özellikler bulunur;

i. Projedeki her faaliyet listelenir.
ii. Her bir faaliyeti tamamlamak için gerekli süreler listelenir.
iii. Her bir faaliyet için öncelikli faaliyet(ler) listelenir.
iv. Her bir faaliyet şebekede yönlü yay olarak gösterilir. Yaylar, öncelikli faaliyetlerinden hemen sonra gelecek şekilde çizilir. Gerekirse kukla faaliyetleri ifade eden yaylar kullanılır.

Faaliyet şebekelerindeki düğümler, olaylar olarak adlandırılır. Bir olay, ancak ona doğru yönü olan tüm faaliyetlerin gerçekleştirilmesinden sonra tamamlanmış sayılır.

Şebeke kapalı döngü şeklinde bir yapıya sahip olamaz. Böyle bir durumda proje hiçbir zaman tamamlananmaz bir yapıya bürünür.

Faaliyet şebekesini G = (X, A) ile gösterelim. Burada X olaylar kümesini, A' da faaliyetler kümesini simgeler. Şebeke yapısını basitleştirmek için, G şebekesinin, hiçbir faaliyetin ona doğru yönlendirilmemiş olduğu sadece bir olayı ve yine hiç bir faaliyetin ondan çıkmadığı sadece bir olayı olduğunu varsayacağız. Bu iki olay akıştaki kaynak ve terminale denk olan, başlangıç ve bitiş olaylarıdır. Başlangıç olayı 1, daha sonra gelenler de sırasıyla artacak şekilde numaralanır.

Bu aşamadan sonra şebekenin analizine bağlanabilir. Analizde amaç, projenin ne kadar erken bitirilebileceği ve hangi faaliyetlerin kritik olduğudur. x ε X olacak şekilde tüm olaylar için, E(x), x olayının en erken tamamlanabileceği olası süre olsun. Ayrıca L(x) de, projenin zamanında bitirilme şartını bozmadan, x faaliyetinin en son ne zaman tamamlanabileceğini göstersin.

E(1) = 0 olacak şekilde süreler hesaplanmaya başlar.
E(j) = max {E(i) + t(i,j)}   j = 2,....,n
Benzer şekilde, L(i) = min {L(j) - t(i,j)}
Burada L(n) = E(n) olduğunu görmek lazımdır.

(x,y) faaliyeti için, tolerans tanınabilecek maksimum süre; L(y) - E(x) - t(x, y) dir. Bu ifade toplam süre olarak adlandırılır. Açıktır ki; eğer toplam süre 0 ise, (x, y) faaliyetindeki herhangi bir gecikme tüm projeyi aynı oranda geciktirecektir.

(x,y) faaliyeti için; E(y) - E(x) - t(x,y) değeri serbest süre olarak adlandırılır. (x,y) faaliyetinin serbest süre değeri, bu faaliyeti izleyen faaliyetleri etkilemeden, (x,y)'de ne kadar gecikme yapılabileceğini verir.

Son olarak, E(y) - L(x) - t(x,y) değeride (x,y) faaliyetinin bağımsız süresi olarak adlandırılır.Bu süre projedeki diğer faaliyetler üzerinde herhangi bir zaman kısıtlaması yapmadan, (x, y) faaliyetinin ne kadar geciktirilebileceğini verir.

Toplam süre >= Serbest süre >= Bağımsız süredir. Bir faaliyetin toplam süresi 0'a eşitse, o faaliyet kritik faaliyettir. Kritik faaliyetlerden oluşan ve faaliyet şebekesini baştan sona geçen patika, kritik patikadır.

Eğer t(x, y) faaliyet süresi kesin olarak bilinmiyorsa, PERT (Program Evaluation Review Technique) kullanılır. Bu tekniğin CPM'den tek farkı, faaliyet sürelerinin belirsizlik içermesidir. Faaliyetler üzerinde, A(iyimser faaliyet süresi), B(gerçekçi faaliyet süresi), C(kötümser faaliyet süresi) olmak üzere üç süre vardır. Beklenen faaliyet süresi $\frac{A}{6} + \frac{4}{6}B + \frac{C}{6}$ dır,

dır.

Herbir faaliyetin varyansı ise $\left(\frac{C-A}{6}\right)^2$ dır.

5.2.Minimum Maliyetli Faaliyet Süreleri:

Şebeke üzerindeki kritik yol ve şebekenin olası en erken tamamlanma süresi bulunduktan sonra, ikinci bir problemle karşı karşıya kalınmaktadır. Bilindiği gibi kritik faaliyetlerin herhangi bir gecikmeye toleransı yoktur, ancak kritik olmayan faaliyetler, toplam şebeke akış maliyetini minimum kılacak şekilde, gecikme süreleri dahilinde optimal olarak yerleştirilebilir. Bu amacı gerçekleştirmek için Fulkerson'un (1962) geliştirdiği teknik sunulacaktır.

Faaliyet (x, y)'nin gerçekleşmesi için gerekli zaman olan t(x, y)'nin, 0 <= r(x, y) <= t(x, y) <= s(x, y) olacak şekilde alt ve üst sınır kısıtlamalarını içermesi gerektiğini varsayalım.

Aynı zamanda faaliyet (x, y)'nin gerçekleşmesinden doğan toplam maliyet te; K(x, y) - k(x, y)t(x, y) olsun. Burada K(x, y) herhangi, k(x, y) ise pozitif iki sabittir. Pek çok durum için, bu çeşit doğrusal faaliyet süre fonksiyonları gerçekçidir.

Minimum maliyetli faaliyet süreleri probleminin çözümü;

$$p(1) = 0 \qquad p(n) = T$$
$$p(y) - p(x) >= r(x, y)$$

şartlarını sağlayacak şekilde, her x olayı için p(x) optimum tamamlanma sürelerini bulmakla mümkündür. Problem, doğrusal programlama modeli olarak aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$\text{Min.} \quad \sum_{x,y} K(x,y)-k(x,y)t(x,y)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} p(x) + t(x,y) &<= p(y) \\ r(x,y) &<= t(x,y) \\ t(x,y) &<= s(x,y) \\ p(n) - p(1) &<= T \end{aligned}$$

Model daha sonra out-of-kilter algoritması ile çözülerek sonuca ulaşılabilir. (Moder ve Phillips: Project Management with CPM and PERT).

5.3. Genelleştirilmiş Faaliyet Şebekeleri:

Bu aşamaya kadar, (1) bir düğümden önceki tüm faaliyetlerin o düğümden sonraki faaliyet başlamadan biteceğine, (2) projedeki tüm faaliyetlerin gerçekleştirileceği, (3) faaliyet zamanlarının dağılımı PERT için beta dağılımına, CPM için ise sabit değer alacağı şeklinde kısıtlanmıştır ve (4) proje bitimini gösteren tek bir bitiş olayı olduğu varsayılmıştır. Oysa bu varsayımlarla çözülemeyecek pek çok gerçek problem mevcuttur.

Olay olarak adlandırılan ve tek bir çeşit düğüm içeren faaliyet şebekelerinin tersine, genelleştirilmiş faaliyet şebekelerinde birden fazla düğüm tipi vardır ve bunlar karar kutuları olarak adlandırılırlar.

Karar kutusuna gelen faaliyetler için üç farklı durum söz konusudur;

i. "ve girdisi": Karar kutusunun tamamlanmış olarak düşünülebilmesi için ona giren tüm faaliyetlerin gerçekleştirilmesi lazımdır.

ii. "dahili girdi": Karar kutusunun tamamlanmış olarak düşünülebilmesi için ona gelen faaliyetlerden en az birisinin gerçekleştirilmesi lazımdır.

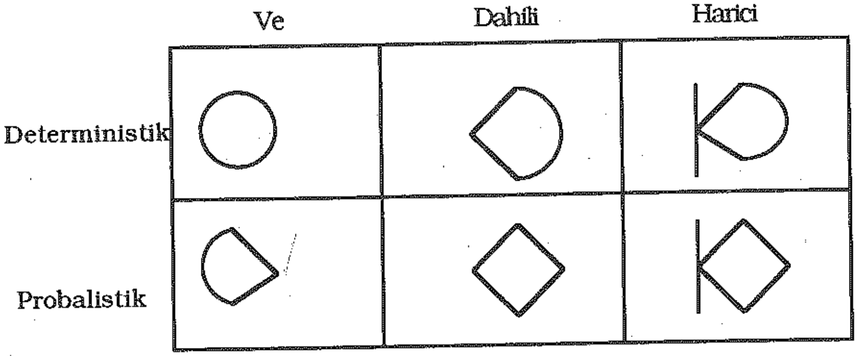
iii. "harici girdi": Karar kutusunun tamamlanmış olarak düşünülebilmesi için ona gelen faaliyetlerden sadece birisinin gerçekleştirilmesi lazımdır.

Karar kutularından çıkan faaliyetler için de iki farklı durum sözkonusudur;

i. "deterministik çıktı": Karar kutusundan çıkan tüm faaliyetler, karar kutusunun tamamlanmasından sonra gerçekleşir.

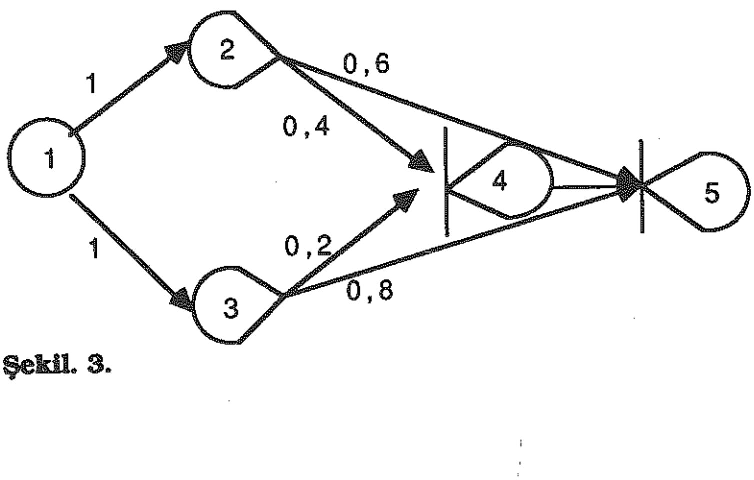
ii. "probabilistik çıktı": Karar kutusundan çıkan sadece bir faaliyet, karar kutusunun tamamlanmasından sonra gerçekleşir.

Sonuç olarak toplam 3*2=6 farklı karar kutusu tipi mevcuttur. Bunların şekille gösterimi aşağıdadır;



Şekil 2.

Faaliyet şebekesinde, her (x,y) faaliyeti için, t(x,y) zamanı belirtilmelidir. Genelleştirilmiş faaliyet şebekelerinde ise, hem zaman t(x,y), hem de olasılık p(x,y), her (x,y) faaliyeti için belirtilmelidir. Burada p(x,y) olasılığı, x düğümünden sonra (x,y) faaliyetinin gerçekleşme şansını gösterir. Eğer x karar kutusunun deterministik çıktısı varsa, p(x,y) olasılığı 1'dir ve (x,y) faaliyeti gerçekleşmiştir. Ayrıca, probabilistik bir karar kutusunun çıktıları olan faaliyetleri olasılıkları toplamı 1'i geçemez. Aşağıda örnek bir genelleştirilmiş faaliyet şebekesi görülmektedir.



Şekil. 3.

6. Şebeke Analizinde Gerçekleştirilmiş Uygulamalara Genel Bir Bakış:

6.1. Giriş:

Literatürde şebeke uygulamalarını, pekçok farklı alanda görmek mümkündür. Bu yaklaşım, modelleme avantajları yüzünden, özellikle üretim programlama, iş programlama, taşıma, depolama, projelerde nakit akışları gibi problemlerde sık kullanılmıştır. Aşağıda bazı uygulama alanları verilmiştir;

6.2. Üretim Programlaması:

Bu gruptaki problemler, üretme ya da satın alma programının bir ya da daha fazla ürün için belirlendiği çok dönemli problemlerdir. Problem genelde, zamana bağlı maliyet, satış fiyatı, üretim kapasitesi gibi parametreleri içerir. Çözüm, dönem bazında stok ve üretim miktarını verir. Örnekler (Jensen 1980);

- Çok faaliyet, çok ürün: Dorsey (1974), Dorsey (1975), Ratliff (1976), Zahorik (1984)
- Çok dönem, tek ürün: Zangwill (1969)
- Çok dönemli satın alma: Ford ve Fulkerson (1962)
- Büyük ölçekli problem: Glover ve Klingman (1975)
- Çok periyot, tek ürün: Charnes ve Cooper (1961)

6.3. İş Programlaması:

İş programlamasında şebeke akış tekniklerinin uygulanması çoğu zaman oldukça karmaşık bir yapıyı beraberinde getirmekte ve verimli sonuç alınamamaktadır. Dolayısıyla; bu grupta genellikle şebeke akış teknikleri, branch and bound ya da dinamik programlama modellerinde alt model olarak kullanılmaktadır. Örnekler(Jensen 1980);

- Çok araçlı tanker programlama: Bellmore (1971)
- Paralel programlama: Bartholdi (1976)
- İşlerin makinalara göre programlanması: Veinott (1962), Lawler (1964)

6.4. Taşıma:

Bu grup, şebeke uyumlu yapısı nedeniyle, üzerinde çok çalışılan problem tipidir. Örnekler(Jensen 1980);

- Literatür taraması: Potts (1972)

- Trafik tahsisi: Hershdorfer (1966), Jewell (1967)
- Yerleştirme, dağıtma: Cooper (1972)

6.5. Projelerde Nakit Akışları:

Faaliyet şebekelerinde nakit akışlarının belirlenmesi, bunun yanısıra paranın zaman değerininde dikkate alınması, ilgi çeken bir konu olmuş ve bu konuda literatürde oldukça fazla çalışma bulunmaktadır.
Örnekler;

- Teklif hazırlama: Elmaghraby (1990)
- Nakit Akışı: Russel (1970), Grinold (1972), Charnes ve Cooper (1961)
- Paranın zaman değeri: Bey (1981), Elmaghraby (1990)

6.6. Diğer Uygulamalar:

Örnekler (Jensen1980);

- Teklif değerlendirme: Stanley (1954), Waggener (1967)
- Malzeme değiştirme: Dreyfus (1960), Bennington (1974)
- Combinatorial Uygulamalar: Fulkerson (1966)
- Fiziksel şebeke akış: Birkhoff (1956), Minty (1960), Hu (1966), Hu (1967)
- İnsangücü planlaması: Wijngaard (1983)
- Sigorta sektörü: (1981)

7. Sonuç:

Bu çalışmada, optimizasyon tekniklerinin en ilgi çekicilerinden birisi olan, şebeke analizi modelleri ile ilgili bir araştırma yapılmıştır. Şebeke modelleri özel yapıları itibarıyla, problem çözümünde pekçok avantajı da beraberinde getirmektedir. Bunun yanısıra, şebeke analizi teknikleri, geniş bir yelpazedeki problemlere uygulanabilir yapıdadır.

Çalışmada, şebekelerin tanım ve yapısı verildikten sonra, temel modeller sunulmuştur. Ayrıca yapılan uygulamalarada genelde değinilmiştir. Bu noktadan sonra yapılması amaçlanan, şebekelerde nakit akışlarını içeren bir uygulama geliştirmektir.

REFERANSLAR:

Bazaraa, M.S., J.J.Jarvis. Linear Programming and Network Flows. 1977.

Bellmore,M., G.Benninglon,ve S.Lubore, "A Multivehicle Tanker Scheduling Problem", Transportation Science, 5 , 1971

Bey,R.B., R.H.Doersch, J.H.Patterson, "The Net Present Value Criterion: Its Impact on Project Scheduling", Project Management Quartely, June1981

Bradley,G.H., "Survey of Deterministic Networks", AIIE Transactions,V7,No3,1975.

Charnes,A., ve W.W.Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, 2 Vols,John Wiley and Sons,New York 1961.

Dantzig, G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N.J.1963.

Dorsey,R.C., T.J.Hodgson, ve D.H.Ratliff,"A Network Approach to a Multi Facility Production Scheduling Problem without Backordering", Management Science,21,1975.

Dorsey,R.C., T.J.Hodgson, ve D.H.Ratliff,"A Production Scheduling Problem with Batch Processing", Operations Research,22,1974.

Elmaghraby, S.E. "The Theory of Networks and Management Science Parts I and II". Management Science. Vol17.1970.

Elmaghraby, S.E. "Project Bidding Under Deterministic and Probabilistic Activity Durations", European Journal of Operational Research, 49,1990.

Elmaghraby, S.E., W.S.Herroelen, "The Scheduling of Activities to Maximize the Net Present Value of Projects", European Journal of Operational Research, 49,1990.

Ford,L.R., ve D.R.Fulkerson, Flows in Network, Princeton University Press, Princeton, N.J.,1962.

Glover, F. ve D.Klingman, "New Advances in Solution of Large Scale Network and Network-Related Problems", Colloquid Mathematica Societatis Janos Bolyai12, North Holland Publishing Co. 1975.

Grinold,R.C., "The Payment Scheduling Problem", Naval Research Logistics Quarterly, 19,1972.

Guim,L., ve D,J,Nye, "A Network Model for Insurance Company Cash Flow Management".Mathematical Programming Study. 15,1981.

Hitchcock,F.L., "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", Journal of Mathematics and Physics, 20, 1941.

Jensen, P.A., J.W. Barnes. Network Flow Programming. 1980

Kennington, J.L., R.V. Helgason. Algorithms for Network Programming. 1980.

Koopmans,T.C., "Optimum Utilization of the Transportation System", Econometric, XVII, (1949).

Kuhn, H.W., "The Hungarian Method for Assignment Problems", Naval Research Logistics Quarterly, 2,1955

Minieka, E. Optimization Algorithms for Networks and Graphs. 1978.

Orden,A., "The Transshipment Problem", Management Science. 2, 1956.

Ratliff,H.D., "Network Models for Production Scheduling Problems with Convex Cost and Batch Processing", Ind.and Sys.Dept.,U. of Florida, Research Report, 76-18, 1976.

Russell,A.H., "Cash Flows in Networks", Management Science, 16,1970.

Wijngaard, J., "Aggregation in Manpower Planning", Management Science. 29. 1983

Zahorik, A., L.J.Thomas ve V.Trigeirro, "Network Programming Models for Production Scheduling in Multi-Stage, Multi-Item Capacitated Systems", Management Science, 30,3,(1984).

Zangwill,W.,"A Backlogging Model And a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System-A Network Approach", Management Science, 15, 1969