



# Üç Boyutlu Öklid Uzayında Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyin Bazı Karakterizasyonları

Hakan AYDIN<sup>1</sup> , Günay ÖZTÜRK<sup>2,\*</sup> 

<sup>1</sup> İzmir Demokrasi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, Türkiye

<sup>2</sup> İzmir Demokrasi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İzmir, Türkiye

## MAKALE BİLGİSİ

Makale Gönderim 04/11/2024  
Revizyon 20/11/2024  
Kabul 21/11/2024

### Anahtar Sözcükler:

Çarpanlara ayrılabilir yüzey  
Fokal yüzey  
Gauss eğriliği  
Ortalama eğrilik

## Ö Z E T

Bu çalışmada Öklid 3-uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyler ve bu yüzeylerin fokal yüzeyleri ele alınmıştır. Öncelikle çarpanlara ayrılabilir yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla asli eğrilikleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu yüzeyin asli eğrilikleri kullanılarak fokal yüzeyleri için parametrizasyonlar oluşturulmuştur ve çarpanlara ayrılabilir yüzeyin fokal yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca incelenen özel durum yardımıyla çarpanlara ayrılabilir yüzey örnekleri verilmiş ve bu yüzeylerin fokal yüzeyleri oluşturularak şekilleri görselleştirilmiştir.

## 1. GİRİŞ

Van de Woestyne, 1993 yılında çarpanlara ayrılabilir yüzeyleri tanımlayarak bu yüzeyleri helikoid yüzeyinin bir karakterizasyonu şeklinde incelemiştir (Van de Woestyne, 1993a; Van de Woestyne, 1993b). Bu yüzeyler homotetik yüzeyler şeklinde de isimlendirilmiştir ve birçok çalışmaya konu olmuştur (Yu ve Liu, 2007; Meng ve Liu, 2009; Lopez ve Moruz, 2015; Aydın ve Oğrenmiş, 2017; Büyükkütük, 2018; Büyükkütük ve Öztürk, 2018; Büyükkütük ve Öztürk, 2019).

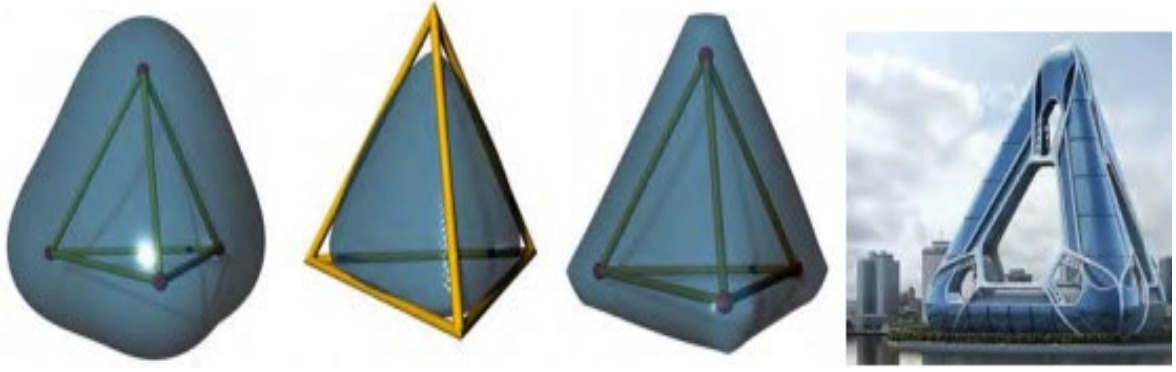
Çarpanlara ayrılabilir yüzeyler, benzersiz yapıları ve yapısal özellikleri nedeniyle mimari tasarım ve inşaatta önemli bir rol oynar. Bu yüzeyler, özellikle çeşitli kabuk yapıların mühendisliğinde faydalıdır. Bu yüzeylerin uygulamaları, kubbeler, kablo ızgaraları, tonozlar ve katlanabilir yapılar gibi elemanların tasarımına kadar uzanır. Bu uygulamalar, çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin geometrik ve yapısal verimliliğinden yararlanarak hem estetik açıdan hoş hem de yapısal olarak sağlam tasarımlar oluşturmak

için modern mimari ve mühendislikte tercih edilen bir seçim haline getirir.

Bir yüzeyin bir noktadaki dik kesit eğrisinin eğrilik merkezi, bu yüzeyin normal vektörünün belli bir kısmı ile örtüşür. Bu yapının minimum ve maksimum değerleri, iki ana eğrinin eğrilik merkezleridir. Bu iki noktaya yüzeyin normalinin odak noktaları denir. Buna göre, bu noktalar yardımıyla bir yüzeyin fokal yüzeyi tanımlanmıştır (Hagen vd., 1991).

Yapıları ve özellikleri nedeniyle, bir yüzeyin odak noktası ve fokal yüzeyleri, geometrik tasarıma ve mimariye uygulamaları olması göz önüne alındığında önemli yapılardır. (Petruşevski vd., 2017) çalışmasında bir yüzeyin odak noktası ve onun doğrultmanı ile çalışmışlardır. Bu yapıları kullanarak, fokal-doğrultu yüzeyini tanımlamışlar ve mimariye uygulamalarını vermişlerdir.

Ayrıca Petrovic tezinde (Petrovic, 2016) fokal-doğrultu yüzeylerini ve bazı farklı yüzeyleri ele alarak mimari uygulamalarını vermiştir (Şekil 1).



Şekil 1. Mega yapının focal yüzeyi ve tasarımı

Diferansiyel geometrideki focal yüzeyleri de doğru kongüransları yardımıyla tanımlanır. Doğru kongüransı tanımı ilk olarak (Hagen vd., 1991) tarafından modellenme yardımıyla açıklanmıştır. Bir doğru kongüransı, 3-boyutlu uzayda iki parametre ile verilen bir doğru ailesidir.  $S: F(u, v)$  bir yüzey olsun ve birim normal vektörü  $N(u, v)$  ile gösterilsin. Buna göre doğru kongüransı,

$$R(u, v, \lambda) = F(u, v) + \lambda \xi(u, v) \quad (1)$$

şeklinde parametrelendirilir. Burada  $\xi(u, v)$  yüzeyin her noktasındaki birim vektördür ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  dir. Eğer  $\xi(u, v) = N(u, v)$  alınırsa, bu kongürans dik kongürans olarak adlandırılır ve bu gösterim focal yüzey parametrisasyonuna karşılık gelir.

Böylece focal yüzeyi parametrisasyonu

$$F_i^*(u, v) = F(u, v) + k_i^{-1}(u, v)N(u, v), \quad (2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $k_1$  ve  $k_2$ ,  $S$  yüzeyinin asli eğrilikleridir (Hagen and Hahmann, 1992). Son yıllarda bazı özel yüzeylerin focal yüzeylerini ele alan ve bu çalışmamıza ışık tutan çalışmalar yapılmıştır (Özdemir ve Arslan, 2008; Büyükkütük vd., 2024a, b).

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümde çalışma konusu ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. 2. Bölümde bazı temel kavramlar ele alınmıştır. 3. Bölümde ise çarpanlara ayrılabilir yüzeyin focal yüzeyleri tanımlanmış ve özel durumlar altında bu yüzeylerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir. Elde edilen karakterizasyonlar için yüzey örnekleri oluşturularak şekilleri oluşturulmuştur. Son bölümde ise sonuçlar derlenmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 1.**  $S$ , Öklid 3-uzayının bir alt kümesi olmak üzere  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  türevlenebilir dönüşümü  $\mathbb{R}^3$  Öklid uzayında bir yama şeklinde isimlendirilir.

$F(U)$  yaması regüler ise  $S$  kümesine  $\mathbb{R}^3$  Öklid uzayında bir yüzey denir (O'Neill, 1966).

$S \subset \mathbb{R}^3$ ,  $F(u, v)$  regüler yaması ile verilsin.  $S$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki  $T_p S$  teğet uzayı  $\{F_u, F_v\}$  bazı ile gerilir. Buna göre  $S$  yüzeyinin birinci temel form dönüşümü;

$$I = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece  $S$  yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$e = \langle F_u, F_u \rangle, \quad f = \langle F_u, F_v \rangle, \quad g = \langle F_v, F_v \rangle \quad (4)$$

şeklinde verilir. Burada  $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$ ,  $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$  dir.

Ayrıca  $F(u, v)$  parametrisasyonu ile verilen  $S$  yüzeyinin regüler olması için gerek ve yeter şart  $W^2 = eg - f^2 \neq 0$  olmasıdır.

$S$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki birim normal vektör alanı ise

$$N = \frac{F_u \times F_v}{\|F_u \times F_v\|} \quad (5)$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca  $S$  yüzeyinin ikinci temel form dönüşümü;

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

şeklinde verilir.

Buna göre  $S$  yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$l = \langle F_{uu}, N \rangle, \quad m = \langle F_{uv}, N \rangle, \quad n = \langle F_{vv}, N \rangle \quad (6)$$

ifadeleri yardımıyla hesaplanır. Burada  $F_{uu} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ ,

$$F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, \quad F_{vv} = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \text{ dir.}$$

$S$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$K = \frac{ln - m^2}{eg - f^2} \quad (7)$$

$$H = \frac{en + gl - 2fm}{2(eg - f^2)} \quad (8)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer  $S$  yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır ise yüzeye düz (flat) yüzey, ortalama eğriliği sıfır ise yüzeye minimal yüzey denir.

Ayrıca  $S$  yüzeyinin  $k_1$  ve  $k_2$  asli eğrilikleri Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, k_2 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (9)$$

şeklinde hesaplanır.

### 3. ÖKLİD 3-UZAYINDA ÇARPANLARA AYRILABİLİR YÜZEYİN FOKAL YÜZEYİ

**Tanım 2.**  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olmak üzere,

$$F(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (10)$$

parametrizasyonu ile verilen yamaya, 3-boyutlu Öklid uzayında bir Monge yaması denir. Burada  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferansiyellenebilir bir fonksiyondur (Gray, 1998).

**Tanım 3.**  $S$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun.  $u, v, z \in \mathbb{R}^3$  uzayındaki kartezyen koordinatlar ve  $g_1, g_2$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$z = g_1(u)g_2(v) \quad (11)$$

eşitliği ile tanımlanan yüzeye çarpanlara ayrılabilir yüzey denir. Buna göre bu yüzey Monge yaması olarak

$$F(u, v) = (u, v, g_1(u)g_2(v)) \quad (12)$$

şeklinde bir parametrizasyona sahiptir (Meng and Liu, 2009).

Bir çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi, Öklid 3-uzayında (12) parametrizasyonu ile verilsin. Bu yüzeyin teğet uzayı;

$$\begin{aligned} F_u &= (1, 0, g_1'(u)g_2(v)) \\ F_v &= (0, 1, g_1(u)g_2'(v)) \end{aligned} \quad (13)$$

vektörleri ile gerilir (Meng ve Liu, 2009). Dolayısıyla (4) ve (13) eşitlikleri yardımıyla bu yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{g_1g_2''(1+(g_1'g_2)^2) + g_1''g_2(1+(g_1g_2')^2) - 2g_1g_2(g_1'g_2')^2}{2W^3} \\ &\mp \sqrt{\left[ \frac{g_1g_2''(1+(g_1'g_2)^2) + g_1''g_2(1+(g_1g_2')^2) - 2g_1g_2(g_1'g_2')^2}{2W^3} \right]^2 - \frac{g_1g_1''g_2g_2'' - (g_1'g_2')^2}{W^4}} \end{aligned} \quad (20)$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned} e &= 1 + (g_1'g_2')^2 \\ f &= g_1g_2g_1'g_2' \\ g &= 1 + (g_1g_2')^2 \end{aligned} \quad (14)$$

şeklinde (Meng ve Liu, 2009).

Ayrıca  $S$  yüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+(g_1'g_2')^2+(g_1g_2')^2}}(-g_1'g_2', -g_1g_2', 1) \quad (15)$$

olarak bulunur (Meng and Liu, 2009).

$F(u, v)$  yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} F_{uu} &= (0, 0, g_1''(u)g_2(v)), \\ F_{uv} &= (0, 0, g_1'(u)g_2'(v)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$F_{vv} = (0, 0, g_1(u)g_2''(v))$$

dir (Meng ve Liu, 2009). (6), (15) ve (16) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} l &= \frac{g_1''g_2}{W} \\ m &= \frac{g_1'g_2'}{W} \\ n &= \frac{g_1g_2''}{W} \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde hesaplanır (Meng ve Liu, 2009). Burada

$$W = \sqrt{1 + (g_1'g_2')^2 + (g_1g_2')^2} \text{ dir.}$$

**Teorem 1.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi, (12) parametrizasyonu ile verilsin. Buna göre bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri;

$$K = \frac{g_1g_1''g_2g_2'' - (g_1'g_2')^2}{W^4} \quad (18)$$

$$H = \frac{g_1g_2''(1+(g_1'g_2)^2) + g_1''g_2(1+(g_1g_2')^2) - 2g_1g_2(g_1'g_2')^2}{2W^3} \quad (19)$$

şeklinde ifade edilir (Meng ve Liu, 2009).

**Teorem 2.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi, (12) parametrizasyonu ile verilsin. Buna göre bu yüzeyin  $k_1$  ve  $k_2$  asli eğrilikleri

**İspat.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi, (12) parametrizasyonu ile verilsin. (18) ve (19) eşitliklerindeki  $S$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri (9) eşitliklerinde yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Tanım 4.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi, (12) parametrizasyonu ile verilsin. Bu yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyleri

$$F_{1,2}^*(u, v) = (u, v, g_1(u)g_2(v)) + \frac{k_{1,2}^{-1}(u,v)}{\sqrt{(g_1'g_2')^2 + (g_1g_2')^2 + 1}} (-g_1'g_2, -g_1g_2', 1) \quad (21)$$

parametrizasyonu ile verilir.

Böylece aşağıdaki durum incelenebilir.

**Durum:**  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon olsun. Bu durumda  $S$  yüzeyinin asli eğrilikleri,

$$k_1 = \frac{cg_2''}{[(cg_2')^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \text{ ve } k_2 = 0 \quad (22)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca  $S$  yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N(u,v) = \frac{(0, -cg_2', 1)}{[(cg_2')^2 + 1]^{\frac{1}{2}}} \quad (23)$$

bulunacağından  $S$  yüzeyinin  $k_1$  asli eğriliği yardımıyla üretilen  $S^*$  fokal yüzeyi (21) eşitliğinden

$$F_1^*(u, v) = \left( u, v - \frac{g_2'[(cg_2')^2 + 1]}{g_2''}, cg_2 + \frac{[(cg_2')^2 + 1]}{cg_2''} \right) \quad (24)$$

parametrizasyonu ile verilebilir. Böylece fokal yüzeyin teğet vektörleri (24) eşitliği yardımıyla

$$F_{1u}^* = (1, 0, 0) \quad (25)$$

$$F_{1v}^* = \left( 0, \frac{-3c^2(g_2')^2(g_2'')^2 + g_2'g_2''''[(cg_2')^2 + 1]}{(g_2'')^2}, \frac{3c^2g_2'(g_2'')^2 - g_2''''[(cg_2')^2 + 1]}{c(g_2'')^2} \right)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\lambda_1 = \frac{-3c^2(g_2')^2(g_2'')^2 + g_2'g_2''''[(cg_2')^2 + 1]}{(g_2'')^2} \quad (26)$$

$$\lambda_2 = \frac{3c^2g_2'(g_2'')^2 - g_2''''[(cg_2')^2 + 1]}{c(g_2'')^2}$$

kısaltmaları yapılırsa  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyinin birinci temel form katsayıları (4), (25) ve (26) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} e^* &= 1, \\ f^* &= 0, \\ g^* &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{aligned} \quad (27)$$

şeklinde hesaplanır.  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N^* = \frac{(0, -\lambda_2, \lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \quad (28)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $F_1^*(u, v)$  yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} F_{1uu}^* &= (0, 0, 0) \\ F_{1uv}^* &= (0, 0, 0) \\ F_{1vv}^* &= (0, (\lambda_1)_v, (\lambda_2)_v) \end{aligned} \quad (29)$$

bulunur. Böylece  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} l^* &= 0 \\ m^* &= 0 \\ n^* &= \frac{-(\lambda_1)_v\lambda_2 + (\lambda_2)_v\lambda_1}{W^*} \end{aligned} \quad (30)$$

şeklinde hesaplanır. Buna göre (7) ve (8) eşitlikleri yardımıyla  $S^*$  fokal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K^* = 0$$

ve

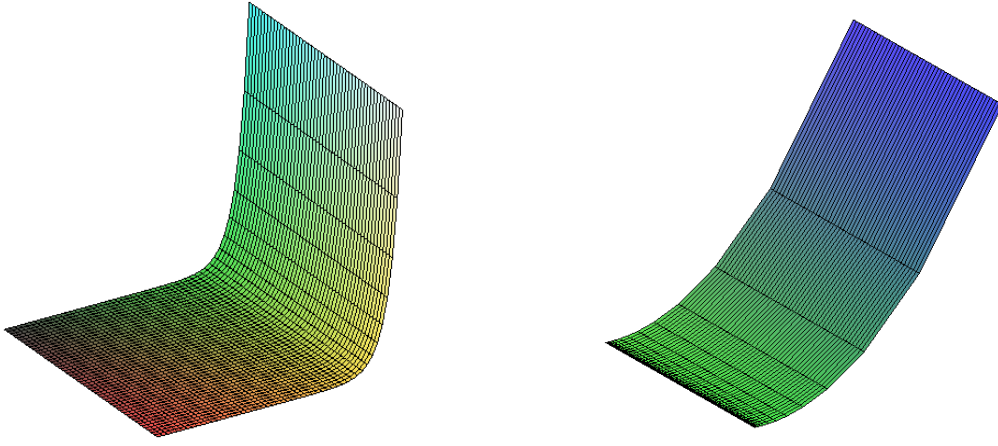
$$H^* = \frac{-(\lambda_1)_v\lambda_2 + (\lambda_2)_v\lambda_1}{2W^*(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 3.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $S^*$  fokal yüzeyi sırasıyla (12) ve (24) parametrizasyonları ile verilsin. Eğer  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon ise her iki yüzey de düz (flat) yüzeylerdir.

**İspat:** Eğer (12) parametrizasyonunda  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon olarak alınırsa (18) eşitliğinden  $S$  yüzeyinin Gauss eğriliği  $K = 0$  bulunur. Ayrıca (27) ve (30) eşitlikleri (7) eşitliğinde göz önüne alınırsa  $S$  yüzeyinin fokal yüzeyinin Gauss eğriliği  $K^* = 0$  bulunur. Bu da istenilen sonuçtur.

**Teorem 4.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi (24) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon ise  $S^*$  fokal yüzeyinin ortalama eğriliği



Şekil 2. Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $S^*$  fokal yüzeyi

$$H^* = \frac{-(\lambda_1)_v \lambda_2 + (\lambda_2)_v \lambda_1}{2W^*(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \quad (31)$$

şeklinde elde edilir.

**İspat.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi (24) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon ise (27) ve (30) eşitlikleri (8) eşitliğinde ele alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 1.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi (24) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon olmak üzere  $S^*$  fokal yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul  $\lambda_1$  fonksiyonu  $\lambda_2$  fonksiyonunun katı olmasıdır.

**İspat.** Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi (24) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer  $g_1'(u) = 0$ , yani  $g_1(u) = c$  sabit fonksiyon alınırsın.  $S^*$  fokal yüzeyi minimal ise (31) eşitliğinden

$$-(\lambda_1)_v \lambda_2 + (\lambda_2)_v \lambda_1 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden  $\lambda_1 = c\lambda_2$  bulunur. Burada  $c$  sayısı integral sabitidir. Tersine  $\lambda_1 = c\lambda_2$  alınırsa bu denklem yardımıyla  $-(\lambda_1)_v \lambda_2 + (\lambda_2)_v \lambda_1 = 0$  bulunur. Yani  $S^*$  fokal yüzeyi minimaldir.

**Örnek 1:**  $g_1(u) = 2$  ve  $g_2(v) = e^v$  fonksiyonlarını ele alalım. Buna göre (12) eşitliği yardımıyla

çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin parametrizasyonu

$$F(u, v) = (u, v, 2e^v)$$

şeklinde elde edilir. (22) eşitliği yardımıyla  $S$  yüzeyinin 1. asli eğriliği  $k_1 = \frac{2e^v}{(4e^{2v}+1)^{\frac{3}{2}}}$  olarak yazılabilir. Böylece  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi

$$F_1^*(u, v) = \left( u, v - 4e^{2v} - 1, \frac{8e^{2v}+1}{2e^v} \right)$$

parametrizasyonu ile verilir. Bu yüzeylerin grafikleri Şekil 2'de verilmiştir.

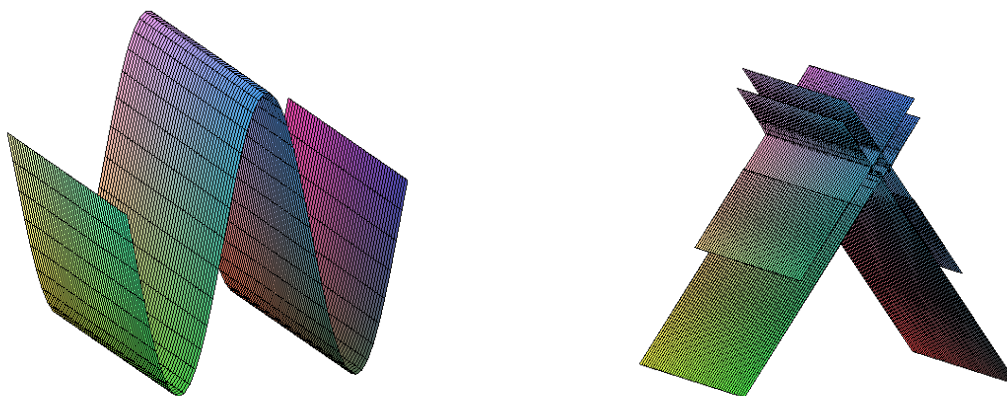
**Örnek 2:**  $g_1(u) = 1$  ve  $g_2(v) = \cos v$  fonksiyonlarını ele alalım. Buna göre (12) eşitliği yardımıyla çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyinin parametrizasyonu

$$F(u, v) = (u, v, \cos v)$$

şeklinde elde edilir. (22) eşitliği yardımıyla  $S$  yüzeyinin 1. asli eğriliği  $k_1 = -\frac{\cos v}{(\sin^2 v + 1)^{\frac{3}{2}}}$  olarak yazılabilir. Böylece  $S$  yüzeyinin  $S^*$  fokal yüzeyi

$$F_1^*(u, v) = \left( u, v - \frac{\sin^3 v + \sin v}{\cos v}, \frac{\cos^2 v - \sin^2 v - 1}{\cos v} \right)$$

parametrizasyonu ile verilir. Bu yüzeylerin grafikleri Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3. Çarpanlara ayrılabilir  $S$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $S^*$  fokal yüzeyi

#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeyin fokal yüzeyi ele alınmıştır. Fokal yüzeyin asli eğrilikleri elde edilerek fokal yüzey parametrisasyonu oluşturulmuştur. Bazı özel durumlar için bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Fokal yüzeyin düz (flat) olduğu gösterilmiştir ve minimal olma koşulu verilmiştir. Örnekler yardımıyla yüzeylerin yapıları görselleştirilmiştir.

#### Teşekkür ve Bilgilendirme

Bu çalışma Hakan Aydın'ın Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir ve İzmir Demokrasi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından ID:HIZDEP-FEF/2402 numaralı proje kapsamında desteklenmiştir.

#### KAYNAKÇA

- Alfred, G. (1998) *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Dover Publications.
- Aydın, M. E., Ogrenmiş, A. O. (2017). Linear Weingarten Factorable Surfaces in Isotropic Spaces, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Mathematica*, 62(2), 261-268.
- Büyükkütük, S. (2018). *Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu*, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi.
- Büyükkütük, S., Öztürk, G. (2018). A Characterization of Factorable Surfaces in Euclidean 4-Space  $E^4$ , *Kocaeli Journal of Science and Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 15–20.

Büyükkütük, S., Öztürk, G. (2019). An Application of Factorable Surface in Euclidean 4-space  $E^4$ , *TWMS J. of Apl. Eng. Math*, vol. 9, no. 1, pp. 121–127.

Büyükkütük, S., Kişi, İ., Öztürk, G. (2024) *A Classification of Focal Surfaces of a Tube Surface in  $E^3$* , *Mathematical Analysis for Engineering and Applied Sciences*, Taylor & Francis Book.

Büyükkütük, S., Kişi, İ., Öztürk, G. (2024) Focal Surfaces of the Translation Surface in Euclidean Space  $E^3$ . *Authorea*. August 26.

Hagen, H., Pottmann, H. and Divivier, A. (1991). Visualization functions on a surface, *Journal of Visualization and Animation*, 2, 52-58.

Hagen, H., Hahmann, S. (1992). Generalized focal surfaces, A New method for surface interrogation, *Proceedings Visualization'92*, Boston, 70-76.

Lopez, R., Moruz, M. (2015). Translation and Homothetical Surfaces in Euclidean Surfaces with Constant Curvature, *J. Korean Math. Soc.*, 52(3), 523-535.

Meng, H., Liu, H. (2009). Factorable Surfaces In 3-Minkowski Space, *Bull Korean Math. Soc.*, 46(1), 155-169.

O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*, Academic Press.

Özdemir, B., Arslan, K. (2008) On generalized focal surfaces in  $IE^3$ , *Rev. Bull. Calcutta Math. Soc.* 16, 23-32.

- Petrusevski, L., Petrovic, M., Devetakovic, M. and Ivanovic, J. (2017). Modelling of focal-directional surfaces for application in architecture, *FME Transactions*, 45, 294-300.
- Petrovic, M. (2016). *Generating the focal directorial geometric forms as a designing pattern of the architectural-urban space* (in Serbian), Doctoral dissertation, University of Belgrade, Faculty of Architecture.
- Van de Woestyne, I. (1993a). A New Characterization of Helicoids, *Geometry and Topology of Submanifolds V*, World Sci. Publ. River Edge, NJ.
- Van de Woestyne, I. (1993b). Minimal homothetical hypersurfaces of a Semi-Euclidean space, *Results in Mathematics*, 27(3), 333-342.
- Yu, Y., Liu, H. (2007). The factorable minimal surfaces, *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry*, 11, 33-39.

