Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

Sayı 34, Haziran 2015 ISSN - 1302 - 3055

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİNİN ÜSTEL RASYONEL FONKSİYON METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Melike KAPLAN[1], Arzu AKBULUT[2], Mehmet Naci ÖZER[3]

[1]Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir, mkaplan@ogu.edu.tr

[2]Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir, ayakut1987@hotmail.com

[3]Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Eskişehir, mnozer@ogu.edu.tr

Geliş Tarihi: 05.08.2014 *Kabul Tarihi: 09.06.2015*

ÖZET

Bu çalışmada uygulamalı matematik ve matematiksel fizikte önemli yeri olan equal width wave (EW) ve regularized long wave (RLW) denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için üstel rasyonel fonksiyon metodu kullanılmıştır. Elde edilen çözümler, bu metodun uygulanması kolay ve etkili sonuçlar verdiğini gösterir. Ayrıca parametrelere özel değerler verildiğinde tam çözümlerden soliter dalga çözümleri elde edilebilir. Makaledeki hesaplamalar maple paket program yardımıyla yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Tam çözümler, üstel rasyonel fonksiyon metodu, equal width wave (EW) denklemi, regularized long wave (RLW) denklemi.*

ABSTRACT

In the study, exponential rational function method is used to construct exact solutions of the equal width wave (EW) and regularized long wave (RLW) equations in applied mathematics and mathematical physics. The exact solutions obtained by the proposed method indicate that the approach is easy to implement and computationally very challenging. Also we can see that when the parameters are assigned special values, solitary wave solutions can be obtained from the exact solutions. All calculations in this paper have been made with the aid of the Maple packet program.

Keywords : *Exact solutions, exponential rational function method, equal width wave (EW) equation, regularized long wave (RLW) equation.*

1. GİRİŞ

Doğadaki ve disiplinlerarası bilimlerdeki birçok olayın matematiksel modellenmesi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler yardımıyla yapılmaktadır. Genellikle kimyasal, biyolojik ve fiziksel olayların tarifinde kullanılan bu denklemlerin analitik veya kapalı form çözümlerinin bulunması son zamanlarda büyük önem kazanmıştır. Ayrıca bu tür denklemlerin farklı çözümleri olabileceğinden, çözümlerin sınıflandırılması oldukça önemlidir. Uygulamalı matematik, bu denklemlerin çözümleri ve yeni çözüm yöntemleri geliştirmekle ilgilenir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birçok metod bulunmuştur. Bu metodlardan bazıları ters saçılım metodu [1] , Hirota bilineer metodu [2] , Bäcklaund dönüşüm metodu [3], homojen denge metodu [4], tanh metodu [5], genişletilmiş tanh metodu [6], kompleks tanh metodu [7], sinüskosinüs metodu [8], F açılım metodu [9], Jakobi eliptik fonksiyon metodu [10], üstel rasyonel fonksiyon metodu [11], üstel fonksiyon metodu [12], (G'/G) açılım metodu [13], $(G'/G, 1/G)$ açılım metodu [14], $(1/G')$ açılım metodu [15,16], first integral metodu [17], trial denklem metodu [18] , ansatz (dark-bright) metodur [19].

Bu çalışmanın amacı EW ve RLW denklemlerinin yeni tam çözümlerini üstel rasyonel fonksiyon metoduyla elde etmektir. Bölüm 2 de üstel rasyonel fonksiyon metodu tanıtılmıştır. Bölüm 3 de EW ve RLW denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir. Son bölümde ise sonuçlara yer verilmiştir.

2. ÜSTEL RASYONEL FONKSİYON METODU

$$F(u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \tag{1}$$

formundaki kısmi diferensiyel denklemi ele alalım.

Adım 1.(1) denkleminin tam çözümünü bulmak için $\xi = \alpha(x - \beta t)$hareketli dalga dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün (1) denkleminde yerine yazılmasıyla, bu denklem (2) adi diferensiyel denklemine dönüşür:

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0. \tag{2}$$

Burada $'$, ξ ye göre türevi göstermektedir.

Adım 2. (2) denkleminin tam çözümünü

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{(1 + e^{\xi})^n}, \tag{3}$$

formunda arayalım. Burada $a_n (n = 0,1,2,3, \dots, m)$ daha sonra hesaplanacak olan sabitlerdir.

Adım 3. m dengelenme sayısı,(2) indirgenmiş adi diferensiyel denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle hesaplanır.

Adım 4.(3) çözümünün (1) de yerine yazılmasıyla elde edilen denklemde e^{ξ} nin aynı kuvvetten olan terimlerinin bir araya getirilip her birinin sıfıra eşitlenmesiyle bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden $a_n (n = 0,1,2,3, \dots)$katsayıları hesaplanır ve (2) denkleminde yerine yazılarak aranılan çözüm elde edilmiş olur.

3. UYGULAMALAR

RLW denklemi Peregrine tarafından, soliton teorisinde, Korteweg-de Vries (KdV) denklemine bir alternatif olarak, su yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgaları ifade etmek için formüle edilmiştir. RLW denkleminin diğer bir ilginç özelliği de;iki soliter dalganın çarpışması sonucunda ikincil bir dalga ya da sinüs eğrisi şeklinde çözümler oluşabilmektedir. EW ve RLW denklemlerinin beraber ele alınması ikincil dalgaların oluşumunu araştırmak ve/veya parçacıklar fiziğinde karşılık gelen süreçleri kavramak için avantaj sağlamaktadır. EW denkleminin uygun bir dönüşümle RLW denklemine dönüştürülebileceğini söylemekte fayda vardır [20].

Bu bölümde rasyonel üstel fonksiyon yöntemi sırasıyla EW ve RLW denklemlerine uygulanacaktır.

3.1. EW Denklemi

Bu bölümde EW denkleminin tam çözümünü bulmak için üstel rasyonel fonksiyon yöntemini kullanacağız.

$$u_t+uu_x-u_{xxt}=0. \tag{4}$$

Aşağıdaki dalga dönüşümü kullanılırsa;

$$\xi = x - ct,$$

(4) denklemi

$$-cu' + uu' + cu''' = 0 \tag{5}$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. Burada $'$, ξ ye göre türevi göstermektedir. Dengelenen terimlerden

$$m + 3 = m + m + 1 \tag{6}$$

olur ve böylece,

$$m = 2. \tag{7}$$

O halde çözüm

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1}{1+e^{\xi}} + \frac{a_2}{(1+e^{\xi})^2}, \tag{8}$$

formundadır ve burada a_0, a_1, a_2 sabitlerdir.

$$u' = -\frac{a_1 e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^2} - \frac{2a_2 e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^3}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u''' \quad = \quad & -\frac{6a_1 e^{3\xi}}{(1+e^{\xi})^4} + \frac{6a_1 e^{2\xi}}{(1+e^{\xi})^3} - \frac{a_1 e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^2} \\ & -\frac{24a_2 e^{3\xi}}{(1+e^{\xi})^5} + \frac{18a_2 e^{2\xi}}{(1+e^{\xi})^4} - \frac{2a_2 e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^3}, \end{aligned} \tag{10}$$

(9) ve (10) değerleri (5) denkleminde yerine yazılıp, $e^{\xi}, e^{2\xi}, e^{3\xi}, e^{4\xi}$ değerlerinin parantezinde ayrılırsa ve bu değerler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$e^{\xi}: -a_0a_1 - 3a_1a_2 - a_1^2 - 2a_0a_2 - 2a_2^2 = 0,$$

$$e^{2\xi}: -3a_0a_1 - 4a_0a_2 + 6ca_1 + 18ca_2 - 3a_1a_2 - 2a_1^2 = 0,$$

$$e^{3\xi}: -a_1^2 - 3a_0a_1 + 6ca_1 - 2a_0a_2 - 6ca_2 = 0,$$

$$e^{4\xi}: -a_0a_1 = 0.$$

Bu denklem sistemini çözdüğümüzde

$$a_0 = 0,$$
$$a_1 = 12c,$$
$$a_2 = -12c.$$

bulunur. Bulduğumuz bu sabitler (8) ifadesinde yerine yazılırsa

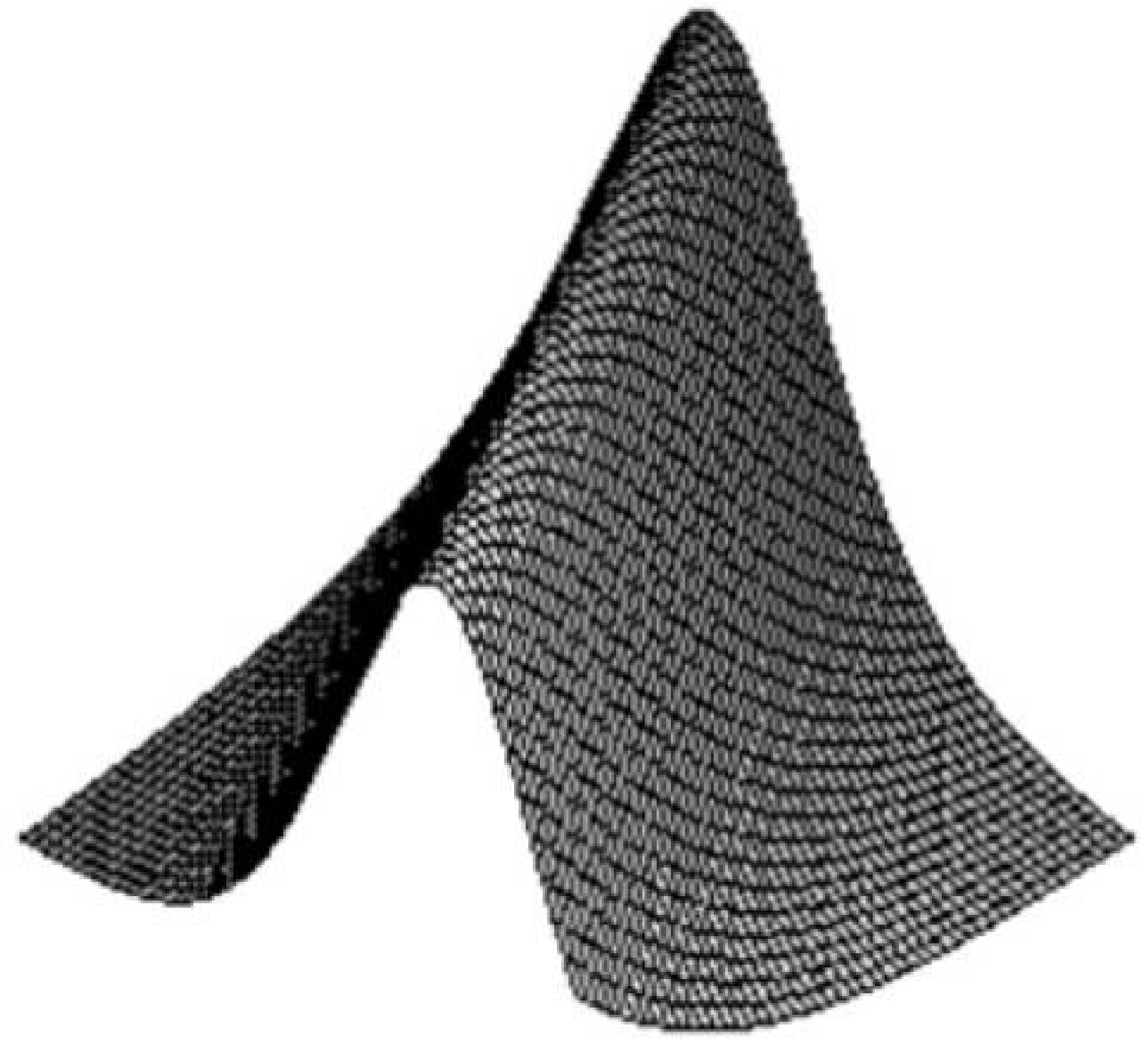
$$u(\xi) = \frac{12c}{(1+e^{\xi})} - \frac{12c}{(1+e^{\xi})^2}, \tag{11}$$

çözümü bulunur ve (11) çözümü cosh fonksiyonu şeklinde ifade edildikten sonra $\xi = x - ct$ dönüşümü yerine yazılırsa (4) denklemi için tam çözüm

$$u(x,t) = \frac{6c}{1+\cosh(x-ct)}$$

olur ve bu bir soliton çözümdür. Bulunan bu çözümler [21] ile karşılaştırılabilir.

c=2 olduğunda tam çözümün grafiğini çizelim.



3.2. RLW Denklemi

İkinci olarak

$$u_t + u_x + uu_x - au_{xxt} = 0, \tag{12}$$

şeklindeki RLW denklemini düşünelim.

$$\xi = x - ct,$$

dalga dönüşümü (12) denklemine uygulanırsa

$$-cu' + u' + uu' + cau' = 0, \tag{13}$$

şeklindeki adi diferensiyel denklemini buluruz. Buradá , ξ ye göre türevi göstermektedir.

(13) denkleminden dengelenme sayısı $m = 2$ olarak bulunur. Bu yüzden çözüm (8) şeklinde olur. Gerekli türevler hesaplanıp (13) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{gathered}(-a_0a_1 + ca_1 - a_1 - aca_1)e^{4\xi} \\ +(-a_1^2 - 3a_1 - 2a_2 - 2a_0a_2 + 3ca_1 + 2ca_2 - 3a_0a_1 + 3aca_1 - 8aca_2)e^{3\xi} \\ +(3aca_1 + 14aca_2 + 3ca_1 + 4ca_2 - 3a_0a_1 - 4a_0a_2 - 3a_1a_2 - 3a_1 - 4a_2 - 2a_1^2)e^{2\xi} \\ +(-a_0a_1 - 2aca_2 - aca_1 + 2ca_2 - 2a_0a_2 + ca_1 - 2a_2^2 - a1 - 3a_1a_2 - a_1^2 - 2a_2)e^{\xi} = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

elde edilir ve (14) ifadesinde $e^{\xi}, e^{2\xi}, e^{3\xi}, e^{4\xi}$ değerlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{gathered}e^{\xi}: -a_0a_1 - 2aca_2 - aca_1 + 2ca_2 - 2a_0a_2 + ca_1 - 2a_2^2 - a1 - 3a_1a_2 - a_1^2 - 2a_2 = 0, \\ e^{2\xi}: 3aca_1 + 14aca_2 + 3ca_1 + 4ca_2 - 3a_0a_1 - 4a_0a_2 - 3a_1a_2 - 3a_1 - 4a_2 - 2a_1^2 = 0, \\ e^{3\xi}: -a_1^2 - 3a_1 - 2a_2 - 2a_0a_2 + 3ca_1 + 2ca_2 - 3a_0a_1 + 3aca_1 - 8aca_2 = 0, \\ e^{4\xi}: -a_0a_1 + ca_1 - a_1 - aca_1 = 0.\end{gathered}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{gathered}a_0 = c - 1 - ac, \\ a_1 = 12ac, \\ a_2 = -12ac.\end{gathered}$$

bulunur. O halde (13) adi diferensiyel denklemi için çözüm

$$u(\xi) = (c - 1 - ac) + \frac{12ac}{1 + e^{\xi}} - \frac{12ac}{(1 + e^{\xi})^2}, \tag{15}$$

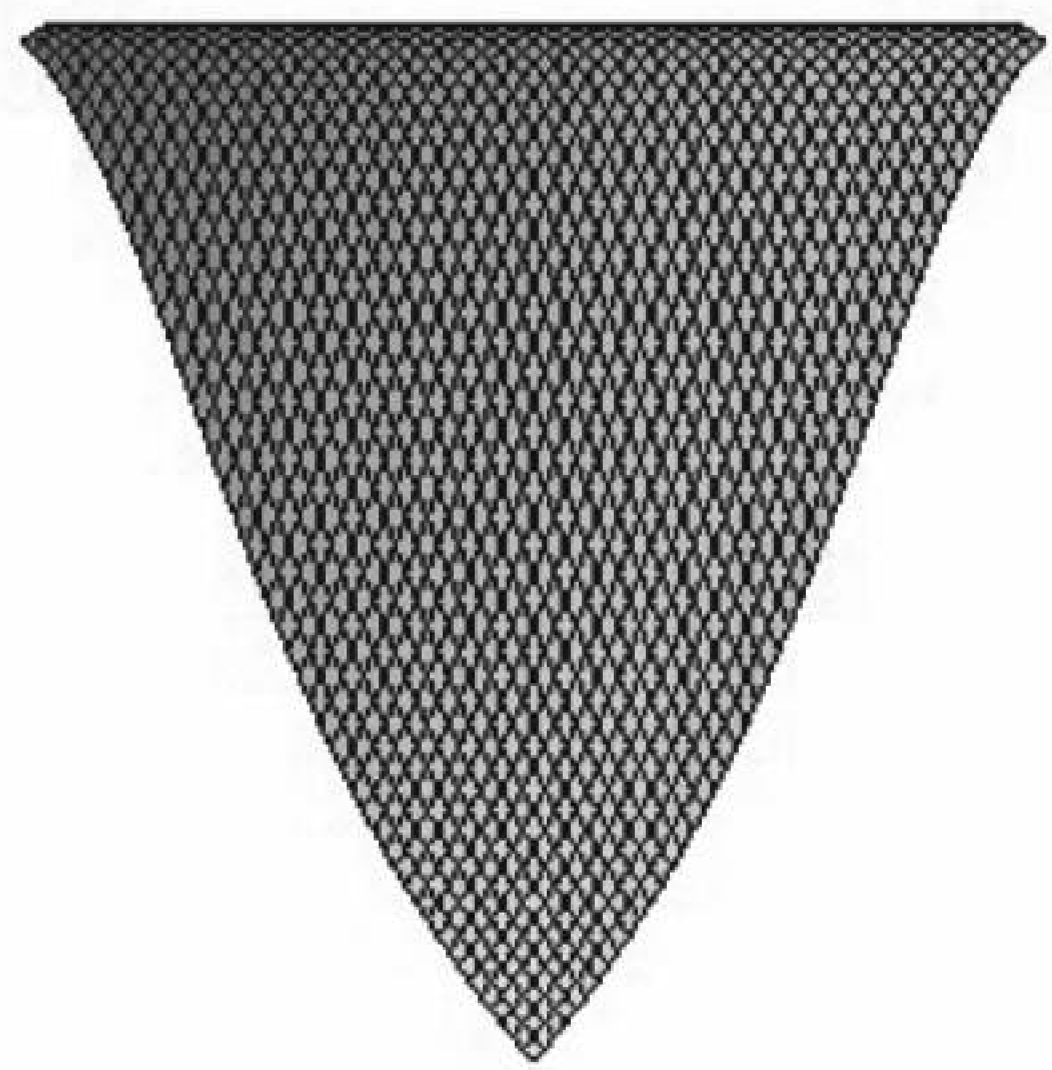
olur ve (15) çözümü cosh fonksiyonu cinsinden ifade edildikten sonra $\xi = x - ct$ dönüşümü yerine yazılırsa (12) denklemi için tam çözüm

$$u(x,t) = -\frac{-c\cosh(x - ct) + \cosh(x - ct) - c + 1 - 5ac + ac\cosh(x - ct)}{1 + \cosh(x - ct)}. \tag{16}$$

olarak soliton çözüm bulunur.

Bulunan bu çözümler [22] ile karşılaştırılabilir.

c=−1 ve a=−2 olduğunda (12) denkleminin tam çözümü için



grafiğini elde ederiz.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada her iki denklem için de elde edilen çözümler soliton çözümlerdir. Solitonlar akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanında kullanılmaktadır. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan, karşılıklı çarpışmaya karşı kararlı olan ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilen bu yerleşik dalgalar uzun mesafelerde yol alabilmektedirler.

Üstel rasyonel fonksiyon yöntemiyle lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin ve bu tip denklemlerin oluşturduğu denklem sistemlerinin çözümleri elde edilebilir. Bu yöntem dengelenme sayısı 1 den büyük olan denklemler için oldukça kullanışlıdır. Üstel fonksiyon ifadesi sinh ve tanh fonksiyonlarının ifadelerinden daha genel olduğundan, üstel rasyonel fonksiyon yöntemiyle daha genel çözümler elde edilebilir. Bu çalışmada Maple paket programı kullanılarak işlemler pratik bir şekilde yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] M. J. Ablowitz, P.A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[2] A.M. Wazwaz, Multiple-soliton solutions for the KP Equation by Hirota's bilinear method and by the tanh–coth method, Appl. Math. Comput. 190, 1, 633-640 (2007).

[3] V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes, A.J. Morrison, A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, Chaos Solitons Fractals, 174, 683-692 (2003)

[4] E. Fan, H. Zhang, A note on the homogeneous balance method, Physics Letters A, 246 , 403-406 (1998).

[5] E. Yusufoglu, A. Bekir, Exact Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations, Chaos, Solitons and Fractals, 37, 3, 842-848 (2008).

[6] A. M Wazwaz, The extended tanh method for new soliton solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 184, 1002-1014 (2007).

[7] S. A. Khuri, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type, Chaos, Solitons and Fractals, 20, 5, 1037-1040 (2004).

[8] A. Bekir, New solitons and periodic wave solutions for some nonlinear physical models by using the sine–cosine method, Physica Scripta, 77, 4, 501-504 (2008).

[9] S. Zhang, The periodic wave solutions for the (2 + 1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equations, Chaos Solitons Fractals 30, 1213–1220 (2006).

[10] M. Inc, M. Ergut, Periodic wave solutions for the generalized shallow water wave equation by the improved Jacobi elliptic function method, Appl. Math. E-Notes 5 (2005) 89–96.

[11] E. Yusufoglu, A. Bekir, A travelling wave solution to the Ostrovsky equation, Applied Mathematics and Computation, 186, 1, 256–260 (2007).

[12] A. Boz, A. Bekir, Application of Exp-function method for (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations, Computers & Mathematics with Applications 56, 5, 1451-1456 (2008).

[13] A. Bekir, Application of the (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equations, Physics Letters A, 372, 19, 3400-3406 (2008).

[14] X. L. Li, E. Q. Li, M. L. Wang, The $(G'/G, 1/G)$-expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, Appl. Math. J. Chinese Univ. 25 454-462 (2010).

[15] A. Yokus, Bazı Özel Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Elde Edilmesi ve Bu Çözümlerin Karşılaştırılması, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2011).

[16] M. Kaplan, Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2013).

[17] F. Tascan, A. Bekir, M. Koparan, Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 1810-1815 (2009).

[18] Y. Gurefe, A. Sonmezoglu, E. Misirli, Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics, Journal of Physics: Indian Academy of Sciences, 77, 6, 1023–1029 (2011).

[19] O. Guner, A. Bekir, Topological (dark) soliton solutions for the Camassa–Holm type equations, Ocean Engineering, 74, 276-279 (2013).

[20] J. I. Ramos, Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations, Applied Mathematics and Computation, 179, 622–638 (2006).

[21] A. Bekir, E. Yusufoglu, Numerical simulation of equal-width wave equation, Computers & Mathematics with Applications, 54, 7-8, 1147–1153 (2007).

[22] A. Bekir, E. Yusufoglu, Application of the variational iteration method to the regularized long wave equation, Computers & Mathematics with Applications, 54, 7-8, 1154–1161 (2007).