



## SKALER ALAN KOZMOLOJİLERDE MANYETİK ALAN KAYNAKLI BAZI KOZMOLOJİK MODELLER

\*Kezban KANMAZ<sup>1</sup>, İsmail TARHAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Çan Meslek Yüksekokulu, Elektrik ve Enerji Bölümü, Çanakkale, [kkanmaz@comu.edu.tr](mailto:kkanmaz@comu.edu.tr)

<sup>2</sup> Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Çanakkale, [ismailtarhan@comu.edu.tr](mailto:ismailtarhan@comu.edu.tr)

*Geliş Tarihi: 12.05.2014*

*Kabul Tarihi: 15.04.2015*

### ÖZET

Bu çalışmada, Evrenin ilk çağlarında etkin olduğuna inanılan manyetize olmuş skaler alan ve ideal akışkanlı bazı kozmolojik modeller elde edip çözümlerin araştırılması, elde edilen çözümlerin fiziksel ve matematiksel özelliklerinin tartışılması hedeflenmiştir. Bu amaçla; manyetik alan içeren skaler alan ile dolu, homojen fakat anizotrop bir uzay zamanı temsil eden Marder metriği için Einstein alan denklemleri elde edilerek çözümler aranmaktadır. Elde edilen çözümlerin asimptotik davranışları ve fiziksel özellikleri incelenmiş ve sonuçların evrenin evrimine ve evrim işlemleri sırasında karşılaşılan kozmolojik olayları açıklamadaki rolü güncel bilgiler çerçevesinde tartışılmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** *Skaler alan, ideal akışkan, elektromanyetik alan, Marder metriği, Bianchi tipi uzay-zamanlar.*

### SOME COSMOLOGICAL MODELS WITH MAGNETIC FIELD IN SCALAR FIELD COSMOLOGIES

#### ABSTRACT

In this study, obtaining some cosmological models with perfect fluid and the magnetized scalar field which is believed to be effective in the early time of the universe, investigation of their solutions and discussion of the physical and the mathematical properties for the obtained solutions were aimed. For this purpose, the Einstein field equations of the Marder metric which represents homogeneous and anisotropic space-time and filled with scalar field containing magnetic field were obtained and their solutions were investigated. Asymptotic behaviors and physical properties of the obtained solutions were examined and the role of the results to the evolution of the universe and explanation of cosmological events were discussed in the framework of current knowledge.

**Keywords:** *Scalar field, perfect fluid, electromagnetic field, Marder's metric, Bianchi type space-times.*

## 1. GİRİŞ

Evrenin ilk çağlarındaki başlangıç (primordial) manyetik alan varlığı, kökeni, büyük-patlamadaki rolü, ani genişleme ile ilgisi, belirlenmesi ve ölçülmesi ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır [1-2-3]. Bu çalışmalarda; başlangıçta var olan manyetik alan ölçümü ile ilgili olarak, Ay'ın manyetik alan ölçümlerine dayalı çalışmalarını sunmuşlardır. Bu çalışmalarda; Güneş sisteminin manyetik alan ölçümlerinden yola çıkarak evrenin kozmik manyetik alanı hakkında fikir edinilmesi ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar çeşitli grafiklerle özetlenmiştir.

Elektromanyetik alanlı uzay-zaman yapıları ve özellikleri ile ilgili çalışmaların geniş bir özeti literatürde verilmiştir [3-4-5]. Tüm bu çalışmalarda, elektromanyetik alan varlığının genel relativite teorisine genişletilmesine dayandığı vurgulanmaktadır [6-7]. Ayrıca son yıllarda, birçok araştırmacı kütleli skaler alanların kozmolojik evrendeki rolüne ait çalışmalar yapmışlardır [8-9-10-11-12-13-14-15-16-17]. Sahu ve

Mohanty [18], kütleli skaler alan içeren kozmolojik modellerin özellikle mezonik akışkan davranışını ve kozmolojik etkilerini oldukça iyi açıklamışlardır. Genel relativite teorisi çerçevesinde ideal akışkanlı skaler alan modellerin astrofiziksel, kozmolojik ve bazı yüksek enerji fiziği olaylarını açıklamada ele alınmıştır [19-20-21-22]. Rotasyon yapan ve statik olmayan Gödel tipi uzay zamanlarda viskoz akışkanlı skaler alan modellerin kozmolojik etkileri araştırılmıştır [16]. Bianchi tipi I uzay-zamanlarda manyetize sicim modeli genel relativite teorisi çerçevesinde incelenmiştir [23]. Bu çalışmada Latelier ve Stachel tarafından kullanılan tekniklerden yararlanılmıştır [24-25-26].

Kozmik mikrodalga fon anizotropisinden yararlanarak başlangıç manyetik alan oluşumu ve büyük patlama nükleosentez işlemleri öncesi ve sonrası evrimi ele alınmıştır [27]. Erken evrende kozmolojik sabite bağlı olarak başlangıç elektrik ve manyetik alanların kökeni ve evrimi ayrıntılı olarak incelenmiştir [28].

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1. Einstein Alan Denklemleri

Bu çalışmada, evrenin evrim işlemlerinde baskın olan gravitasyonel etkileşimlerin ve evrenin global yapısının izahında en tutarlı teori konumunu koruyan ve,

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \chi T_{ik} \quad , \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1)$$

denklemleriyle tanımlanan genel relativite teorisi'nin Einstein alan denklemlerinden yararlanılmaktadır ve bu denklemlere çeşitli çözümler aranmaktadır. Burada  $G$  gravitasyon sabiti,  $g_{ik}$  metrik tensör,  $\Lambda$  kozmolojik sabit,  $R_{ik}$  Ricci tensörü (simetrik),  $c$  ışık hızı,  $R = g^{ik} R_{ik}$  eğrilik skaleri ve  $T_{ik}$  enerji-momentum tensörüdür ve simetriktir. Alan denklemlerinin sol tarafı uzay-zamanın geometrisini ve sağ tarafı uzaya eğrilik kazandıran maddenin enerji-momentum dağılımını göstermektedir [29-30-31-32]. Alan denklemleri, simetri ( $G_{ik} = G_{ki}$ ) nedeniyle 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemi oluşturur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü oldukça zordur. Bu çözümlerin bulunmasında uzay-zaman simetrilerinin büyük önemi vardır. Bu nedenle; birçok durumda, alan denklemlerinin sol tarafına homojenlik, izotropi, düzlemsel simetri, küresel simetri, silindirik simetri gibi bazı matematiksel ve fiziksel kabullerden en az biri, sağ tarafa ise ideal akışkan, viskoz akışkan, elektromanyetik alan, kozmik string gibi madde formları alınarak denklemlerin çözümleri elde edilmeye çalışılır.

Uzay-zamanı tanımlayan bir  $ds^2$  yay elemanı,

$$ds^2 = g_{ik}(x^j) dx^i dx^k \quad (2)$$

verildiğinde buna ait Einstein alan denklemlerini bulmak için öncelikle verilen yay elemanını oluşturan  $g_{ik}$  metrik potansiyel tensörlerinden yararlanarak,

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (3)$$

bağıntısı ile ifade edilen ve 40 bileşeni bulunan Christoffel sembolleri ( $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$ ) hesaplanır [32-33]. Literatürde de iyi bilinen bağlantı (connection) katsayıları olarak da anılan bu sembolleri kullanarak Einstein alan denklemlerinde yer alan Ricci tensörü,

$$R_{ik} = R_{ki} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \quad (4)$$

bağıntısından elde edilir. Bu hesaplamalar sonucunda 10 Ricci tensör bileşeni elde edilir. Ricci tensöründen yararlanarak  $R = g_{ik} R^{ik}$  eğrilik skaleri hesaplanır. Ricci tensörü uzay-zamanın eğriliğini gösteren

$$R_{iklm} = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n \quad (5)$$

Rieman tensörünün indisler üzerinden gençleştirme (contraction) halidir [32]. Riemann tensörünü hesaplamak oldukça zor ve zahmetlidir. Hesaplamalarda Riemann tensörünün  $R_{iklm} = R_{kiml} = R_{lmik}$  gibi simetri ve  $R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$  bağıntılarından dolayı 20 bağımsız bileşeni vardır [30-32]. Tüm bu hesaplanan nicelikler (1) denklemi ile verilen Einstein alan denklemlerinde kullanılarak  $T_{ik}$  enerji momentum tensörü ile karakterize edilen madde dağılımının uzay-zamana nasıl bir geometri kazandıracağı hakkında bilgi edinilir. Elde edilen Einstein alan denklemlerinde  $T_{ik} \neq 0$  ve  $T_{ik} = 0$  durumları alınır sırasıyla  $T_{ik}$  madde dağılımı içindeki (iç çözüm) ve dışındaki (dış çözüm) gravitasyonel alanları elde edilir. Gravitasyonel alanda bir parçacığın hareket (geodezik) denklemi,

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{km}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds} = 0 \quad (6)$$

ile verilir [30]. Böylece elde edilen alan denklemlerinin çözümünde ilave olarak metrik katsayıları veya maddenin fiziksel nicelikleri arasında bağıntılar kuran durum denklemleri [ $p = p(\rho)$ ] gibi ek koşullarda kullanılmaktadır. Önerildiği günden bugüne kadar Einstein alan denklemlerine birçok çözümler bulunmuş ve çalışmalar devam etmektedir. Son zamanlarda gerek astrofiziksel ve gerekse kozmolojik önemi nedeniyle bu denklemlerin yeni çözümlerinin elde edilmesinde uzay-zaman simetrileri ve yeni madde formları kullanılmaktadır.

### 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

#### 3.1. Alan Denklemleri ve Bazı Temel Bağlantıları

Burada homojen ve anizotropik uzay-zamanı temsil eden ve Bianchi tipi I metriği olan Marder metriği alınmıştır [34-35].

$$ds^2 = A^2(dt^2 - dx^2) - B^2dy^2 - C^2dz^2 \quad (7)$$

Burada A, B ve C; uzay-zamanın geometrisini tanımlayan ve Einstein alan denklemlerinin çözümlerinden belirlenecek olan metrik potansiyeller olup, sadece  $t$  kozmik zamanın bir fonksiyonudur. Bu çalışmada; uzay-zamanın geometrisinin kaynağı olarak ideal akışkan, skaler alan ve manyetik alan alınmış olup enerji-momentum tensörü,

$$T_{ik} = (\rho + p)u_i u_k - pg_{ik} + \frac{1}{4\pi} \left( F_{il} F_k^l - \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right) + \frac{1}{4\pi} \left( V_i V_k - \frac{1}{2} g_{ik} V^2 \right) \quad (8)$$

olarak alınmaktadır. Burada  $p$  kozmik madde dağılımının basıncını ve  $\rho$  kozmik madde dağılımının yoğunluğunu tanımlamaktadır.  $F_{ik}$  ise aşağıda verilen Maxwell denklemlerini sağlayan elektromanyetik alan tensörüdür [30-32-36-37]:

$$F_{[ik;l]} = 0 \quad , \quad \left( \frac{1}{\mu} F^{ik} \right)_{;k} = J^i \quad (9)$$

$u^i$  zamansal vektörü kozmik madde dağılımının 4-lü hız vektörünü tanımlar ve komoving koordinatlarda (1) metriği için aşağıdaki bağlantıları sağlar;

$$u^i = (0, 0, 0, A^{-1}) \quad ; \quad u_i = (0, 0, 0, A) \quad ; \quad u^i u_i = 1 \quad (10)$$

(1) metriği ile tanımlanan bir uzay-zaman için modeli karakterize eden kinematik nicelikler;

ivme vektörü ( $\dot{u}^i = u^i_{;k} u^k$ ), uzaysal hacim ( $U^3 = \sqrt{-g}$ ), genişleme skaleri ( $\theta = u^i_{;i}$ ), rotasyon tensörü ( $w_{ik} = u_{[i;k]} + \dot{u}_{[i} u_{k]}$ ), shear skaleri ( $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma^{ik}$ ) ve Klein-Gordon denklemi ( $V_{;i}^i = 0$ ) ise aşağıdaki gibidir [30-32]:

$$\dot{u}_i = u_{i;k} u^k = 0 = \dot{u}^i \quad (11)$$

$$U^3 \equiv \sqrt{-g} = A^2 BC \quad (12)$$

$$\theta = u^i_{;i} = \frac{1}{A} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) \quad (13)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ik} \omega^{ik} = 0 \quad (14)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \sigma^{ik} = \frac{\dot{A}^2}{3A^4} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{3A^3 B} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{3A^3 C} + \frac{\dot{B}^2}{3A^2 B^2} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{3A^2 BC} + \frac{\dot{C}^2}{3A^2 C^2} = \frac{1}{3} \theta^2 - \frac{1}{A^2} \left( \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right) \quad (15)$$

$$KG: -BC \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

Burada  $V$ , skaler alanı karakterize eden skaler alan potansiyeli olup, Klein-Gordon denkleminin çözümünden belirlenir [30-32-38]:

$$\left(\sqrt{-g} V^i\right)_{,i} = 0 \quad , \quad V_i = \frac{\partial V}{\partial x^i} \quad , \quad V^2 = g^{ik} V_i V_k \quad (17)$$

Buradaki ve diğer yerlerdeki denklemlerde “;” sembolü kovaryant türevi, ve “,” sembolü de kısmi türevi ifade eder. Bu çalışmada  $V$  skaler alanın sadece uzaysal koordinat  $x$ ' in fonksiyonu olduğu göz önüne alınmıştır. Bu durumda (17) denkleminde,  $V_1$  ve  $V_0$  keyfi sabitler olmak üzere,

$$V(x) = V_1 x + V_0 \quad (18)$$

elde edilir. Buna göre;  $V_i$ 'nin mevcut bileşeni  $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$  dır. Kozmik madde dağılımında akımın,  $F_{ik}$ 'nin sıfırdan farklı bileşeni  $F_{23}$  olacak şekilde  $x$  eksenini boyunca akmakta olduğunu göz önüne alıyoruz. Bu durumda, (9) denklem sistemi ile tanımlanan Maxwell denklemleri aşağıdaki sonuçları verir:

1. Grup Maxwell Denklemlerinden;

$$2 \frac{\partial F_{23}}{\partial t} = 0 \Rightarrow F_{23} \quad , \quad t \text{ ' den bağımsız}$$

$$-2 \frac{\partial F_{23}}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_{23} \quad , \quad x \text{ ' den bağımsız}$$

2. Grup Maxwell Denklemlerinden;

$$\frac{1}{B^2 C^2} \frac{\partial F_{23}}{\partial z} = 0 \Rightarrow F_{23} \quad , \quad z \text{ ' den bağımsız}$$

$$-\frac{1}{B^2 C^2} \frac{\partial F_{23}}{\partial y} = 0 \Rightarrow F_{23} \quad , \quad y \text{ ' den bağımsız}$$

dolayısı ile,

$$F_{23} = \text{sabit} = K \quad (19)$$

elde edilir. Bu sonuç; manyetik alanı karakterize eden  $F_{23}$  bileşeninin sabit olması gerektiğini göstermektedir. Komoving koordinatlarda (8) eşitliği ile tanımlı enerji momentum tensörüne sahip (7) metriği için

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\chi T_{ik} \quad (20)$$

ile verilen Einstein alan denklemlerinin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir ( $\Lambda = 0$ ):

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = -\chi A^2 p - \frac{\chi V_1^2}{2} - \frac{\chi A^2 K^2}{8\pi B^2 C^2} \quad (21)$$

$$\left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^{\bullet} + \frac{\ddot{C}}{C} = -\chi A^2 p + \frac{\chi V_1^2}{2} + \frac{\chi A^2 K^2}{8\pi B^2 C^2} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^{\bullet} + \frac{\ddot{B}}{B} = -\chi A^2 p + \frac{\chi V_1^2}{2} + \frac{\chi A^2 K^2}{8\pi B^2 C^2} \quad (23)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = \chi A^2 \rho + \frac{\chi V_1^2}{2} - \frac{\chi A^2 K^2}{8\pi B^2 C^2} \quad (24)$$

Burada nokta “·” kozmik zaman t’ ye göre türevi ifade eder. (22) ve (23) denklemlerinden,

$$\frac{\ddot{B}}{B} = \frac{\ddot{C}}{C} \quad (25)$$

olduğu hemen görülmektedir. (21) - (24) alan denklemlerinden; (1) metriği ile karakterize edilen bir uzay-zamanı dolduran ve eğrilik kazandıran kozmik madde dağılımının basıncı ve yoğunluğu sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$p = -\frac{1}{\chi A^2} \left[ \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^{\bullet} + \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\chi V_1^2}{2} - \frac{\chi K^2 A^2}{8\pi B^2 C^2} \right] \quad (26)$$

$$\rho = \frac{1}{\chi A^2} \left[ \frac{\dot{A}}{A} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} - \frac{\chi V_1^2}{2} + \frac{\chi K^2 A^2}{8\pi B^2 C^2} \right] \quad (27)$$

Bu fiziksel ve kinematik nicelikler yardımı ile elde edilen modelin fiziksel ve geometrik özellikleri ile evrenin evriminin başlangıç evresi hakkında bilgiler edinilerek genişleme süresince evrim işlemleri sırasında modelin davranışı irdelenir.

### 3.2. Alan Denklemlerinin Çözümü

(25) denkleminde,

$$\dot{B}C - B\dot{C} = \text{Sabit} = L \quad (28)$$

ifadesi elde edilir. Burada,  $\alpha = \alpha(t)$  ve  $\beta = \beta(t)$ , metrik potansiyeller ile ilgili yeni nicelikler olmak üzere,

$$\frac{B}{C} = \alpha(t) \quad \text{ve} \quad B.C = \beta(t) \quad (29)$$

dönüşümlerini uygularsak,

$$B^2 = \alpha.\beta \quad \text{ve} \quad C^2 = \frac{\beta}{\alpha} \quad (30)$$

olur. Bu dönüşümleri (28) denkleminde kullandığımızda,

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.\beta = \text{Sabit} = L \quad (31)$$

denklemini elde edilir. (21) ve (22) alan denklemlerinden de,

$$\frac{\ddot{B}}{B} - \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^{\bullet} - \frac{\dot{A}}{A} \left( \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right) + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = -\chi V_1^2 - \chi \frac{A^2 K^2}{4\pi B^2 C^2} \quad (32)$$

denklemini yazabiliriz. (21) - (24) alan denklemleri A, B, C,  $\rho$  ve p olmak üzere beş bilinmeyenli dört diferansiyel denklem sistemi oluşturmaktadır. Bu denklem sisteminin tam çözümü için ilave bir koşula ihtiyaç vardır. Biz bu çalışmada,

$$A = B.C = \beta(t) \quad (33)$$

koşulunu ele alıyoruz. Böylece (32) denklemini,

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} = \chi \left( V_1^2 + \frac{K^2}{4\pi} \right) = \text{Sabit} = M^2 \quad (34)$$

haline gelir. Burada M, skaler alan ve manyetik alanı karakterize eden pozitif bir sabittir. Ve elde edilen bu denklemde (30) ile verilen dönüşümler kullanılırsa, (34) denklemini,

$$\ddot{\beta} - 2M^2 \beta = 0 \quad (35)$$

olur. Bu denklemin çözümünden de,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ve M pozitif sabitler olmak üzere,

$$\beta(t) = \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \quad (36)$$

elde edilir. Bu sonuç (31) denkleminde kullanılıp integral alınır,

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{\frac{L}{M\sqrt{2\beta_1\beta_2}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{\sqrt{2}Mt} \right]} \quad (37)$$

sonucu elde edilir. Elde edilen bu sonuçlar (30) ifadelerinde kullanılırsa, sırasıyla metrik potansiyeller aşağıdaki gibi bulunur:

$$B^2 = \alpha.\beta = \alpha_0 \left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right) e^{\frac{L}{M\sqrt{2\beta_1\beta_2}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{\sqrt{2}Mt} \right]} \quad (38)$$

$$C^2 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt}}{\alpha_0 e^{\frac{L}{M\sqrt{2\beta_1\beta_2}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{\sqrt{2}Mt} \right]}} \quad (39)$$

$$A = B.C = \beta(t) = \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \quad (40)$$

Elde edilen bu metrik potansiyellerden yararlanarak (8) enerji-momentum tensörü ile tanımlanan kozmik madde dağılımının basınç ve yoğunluğu, (26) ve (27) denklemlerinden,

$$p = - \frac{40M^2 \beta_1 \beta_2 + L^2}{4\chi \left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^4} \quad (41)$$

$$\rho = -\frac{L^2 \left( \beta_1 e^{2\sqrt{2}Mt} + \beta_2 \right)^2 + \beta_1^2 \left( 4\beta_2^2 + \beta_1 \beta_2 e^{2\sqrt{2}Mt} - \beta_1^2 e^{3\sqrt{2}Mt} \right) + \beta_2^3 \left( \beta_1 - \beta_2 e^{-2\sqrt{2}Mt} \right)}{4\chi \left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^4 \left( \beta_1 e^{2\sqrt{2}Mt} + \beta_2 \right)^2} \quad (42)$$

elde edilir. Modeli karakterize eden kinematiksel nicelikler ise,

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}M \left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} - \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)}{\left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^2} \quad (43)$$

$$U^3 \equiv \sqrt{-g} = A^3 = \beta^3 = \left( \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^3 \quad (44)$$

$$\frac{\sigma^2}{\theta^2} = -\frac{3L \left[ 4 \left( \beta_2^3 - \beta_1^2 \beta_2 e^{3\sqrt{2}Mt} - \beta_1^3 e^{5\sqrt{2}Mt} \right) - L \left( \beta_1 e^{2\sqrt{2}Mt} + \beta_2 \right)^2 \right] - 38M^2 \left( \beta_1^2 e^{3\sqrt{2}Mt} - \beta_2^2 e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^2}{96M^2 \left( \beta_2^2 e^{-\sqrt{2}Mt} - \beta_1^2 e^{3\sqrt{2}Mt} \right)^2} \quad (45)$$

olarak bulunur. (41) ve (42) denklemlerinden  $p < 0$  ve  $\rho > 0$  olduğu görülmektedir. Buda modelin, karanlık enerjinin (dark energy) hakim olduğu bir dönemi temsil ettiğini düşündürmektedir.

#### 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Öncelikle; (11) ve (14) denklemlerinden, modelimizi karakterize eden sabit skaler alan ve sabit manyetik alan içeren ideal akışkanla dolu Marder metriği ile tanımlı uzay-zaman geodezik ( $u^i = 0$ ) ve irrotasyoneldir ( $\omega^2 = 0$ ). Elde edilen modelde metrik potansiyeller ve modeli karakterize eden fiziksel ve kinematik nicelikler

skaler alan ve manyetik alan ile yakından ilişkilidir:  $M^2 = \left( V_1^2 + \frac{K^2}{4\pi} \right)$ ,  $\chi = 1$ .

$M = K$  durumunda;  $\frac{V_1}{K} = \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi}} \cong 0,959$  olmaktadır ve buda bize  $K > V_1$  olduğunu gösterir.  $M = V_1$

olduğunda  $K = 0$  olur. Yani manyetik alan etkisi ortadan kalkmaktadır ve sadece sabit skaler alan varlığını

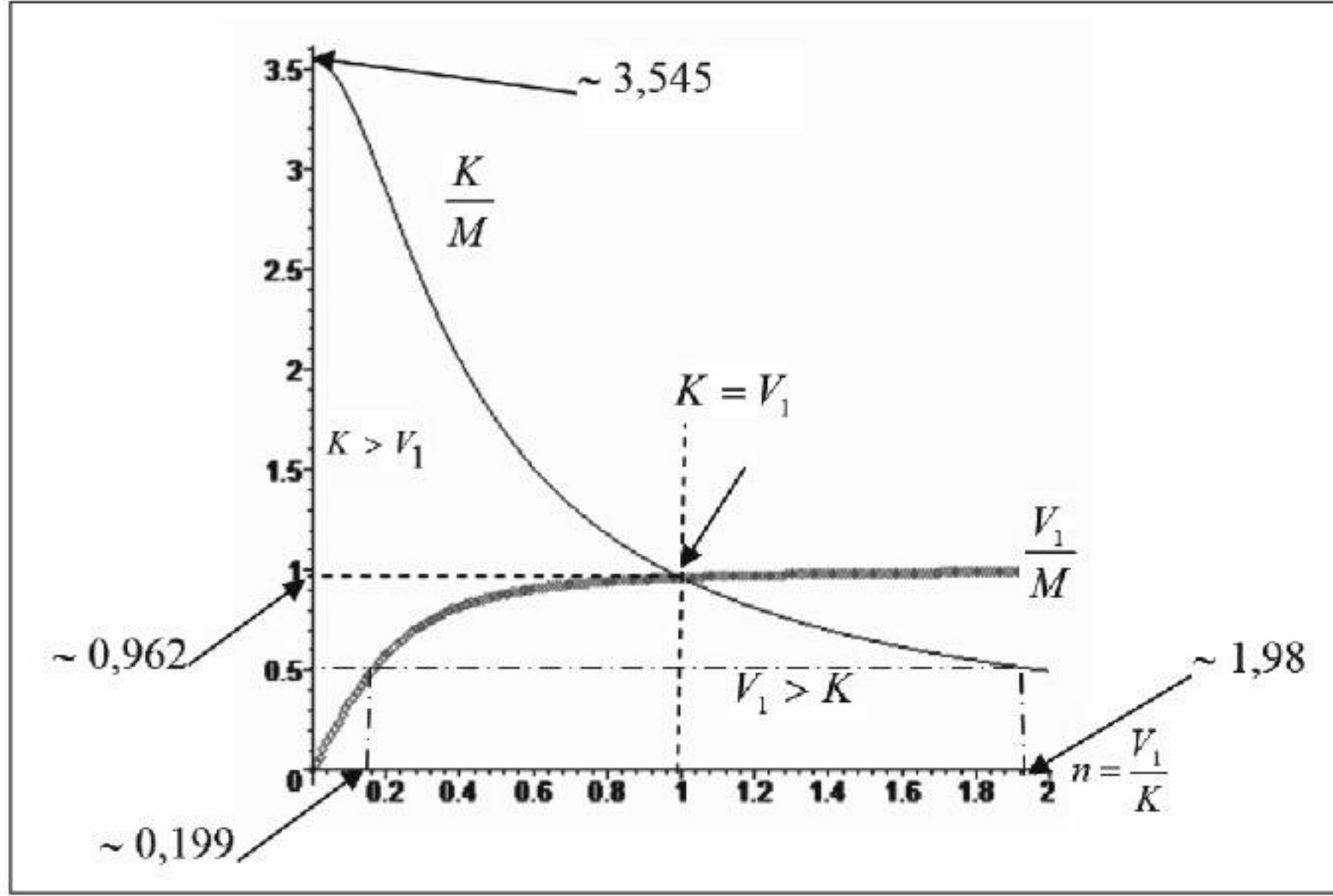
hissettirmektedir.  $K = V_1$  ise,  $\frac{V_1}{M} = \sqrt{\frac{4\pi}{4\pi + 1}} \cong 0,962$  olmaktadır.  $M = \frac{K}{2\sqrt{\pi}}$  olması halinde  $V_1 = 0$  olur. Bu

durumda  $V(x) = V_0 = \text{Sabit}$  'tir, yani manyetize olmuş sabit skaler alanlı ideal akışkan dolu bir evren modeli

elde edilir.  $V_1 = nK$  durumunda ise,  $\frac{V_1}{M} = n \sqrt{\frac{4\pi}{4\pi n^2 + 1}} = n \frac{K}{M}$  olmaktadır. Bu durumları tanımlayan değişim

grafiği Şekil -1' de verilmiştir:





Şekil 1.  $V_1$  ve  $K$ 'nin değişimi.

Şekil-1 den de görüleceği gibi  $n = 1$  için  $V_1 = K$  olmakta, yani sabit skaler alan ile sabit manyetik alan bir birine eşit olmaktadır.  $n < 1$  için sabit manyetik alan skaler alana nazaran daha baskın ( $K > V_1$ ) iken  $n > 1$  için ise skaler alan manyetik alana nazaran daha baskın olmaktadır ( $V_1 > K$ ). Benzer şekilde  $n = 0$ , yani sadece sabit manyetik alan söz konusu ( $V_1 = 0$ ,  $K \neq 0$ ) olduğunda  $K \cong 3,545 M$  olmaktadır.

Modeli tanımlayan temel niceliklerin asimptotik davranışları aşağıdaki gibidir:

i)  $t \rightarrow 0$  Genişleme Başlangıcında:

$$A \rightarrow \beta_1 + \beta_2 = a_0 = \text{Sabit} , B \rightarrow \alpha_0 a_0 \gamma_0 = b_0 = \text{Sabit} , C \rightarrow \frac{a_0}{\alpha_0 \gamma_0} = c_0 = \text{Sabit} \quad (46)$$

$$p \rightarrow \frac{40 M^2 \beta_1 \beta_2 + L^2}{4 \chi (\beta_1 + \beta_2)^4} = p_0 = \text{Sabit} \quad (47)$$

$$\rho \rightarrow \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 3 \beta_1 \beta_2 - L^2}{4 \chi (\beta_1 + \beta_2)^4} = \rho_0 = \text{Sabit} \quad (48)$$

$$\theta \rightarrow \frac{2M(\beta_1 - \beta_2)}{(\beta_1 + \beta_2)^2} = \theta_0 = \text{Sabit} \quad (49)$$

$$U^3 \rightarrow (\beta_1 + \beta_2)^3 = U_0 = \text{Sabit} \quad (50)$$

$$\frac{\sigma^2}{\theta^2} \rightarrow \frac{3L[4(\beta_2^3 - \beta_1^2 \beta_2 - \beta_1^3) - L(\beta_1 + \beta_2)] - 38M^2(\beta_1^2 - \beta_2^2)^2}{96M^2(\beta_2^2 - \beta_1^2)^2} = \text{Sabit} \quad (51)$$

ii)  $t \rightarrow \infty$  Genişlemenin Sonlarına Doğru:

$$A \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty, C \rightarrow \infty \quad (52)$$

$$p \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, U^3 \rightarrow \infty, \frac{\sigma^2}{\theta^2} \rightarrow \frac{38}{96 \beta_1^2} = \text{Sabit} \quad (53)$$

Elde edilen bu sonuçlara göre; modelimizin tanımladığı uzay-zaman belirli bir  $U_0$  hacim değerinden  $\theta_0$  sabit hızla genişlemeye başlamaktadır. Dolayısı ile modelimiz; uzay-zamanın kinematik ve fiziksel niceliklerinin sabit olduğu bir dönemi karakterize etmektedir. Genişleme başlangıcında; uzay-zamanı dolduran kozmik madde dağılımının basıncı, manyetize olmuş skaler alanın etkisinde kalmıştır. Bu etki genişleme süresince kendini hissettirmektedir. Ayrıca; bu manyetize skaler alan etkisi, uzay-zamanın anizotropisini azaltıcı şekilde rol oynamaktadır. Genişlemenin sonlarına doğru anizotropinin varlığı hala hissedilebilmektedir:

$$\left(\frac{\sigma}{\theta}\right)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{0,63}{\beta_1} \gg 10^{-3} \quad [39-40]. \quad \beta_1 \text{ teriminin çok büyük } (\beta_1 \gg 1) \text{ olması durumunda, genişlemenin}$$

sonlarına doğru anizotropi izotropiye yaklaşmaktadır  $\left(\frac{\sigma}{\theta}\right)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

$\beta_1 = -\beta_2$  olması halinde; yani  $a_0 = 0$  durumunda, genişleme başlangıcında  $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0, C \rightarrow 0, p \rightarrow \infty, \rho \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \infty, U^3 \rightarrow 0, \frac{\sigma}{\theta} \rightarrow \infty$  olmaktadır, yani bu durumda modelimiz büyük-patlama tekilliğinden önlenemez bir hızla ve anizotropik olarak genişlemeye başlamaktadır.

$\beta_1 = 0$  ve  $\beta_2 \neq 0$  için  $A^2 = \beta_2 e^{-\sqrt{2}Mt}$ ,  $B^2 = \alpha_0 A^2$  ve  $C^2 = \alpha_0^{-1} A^2$  olmaktadır. Bu durumda; modelimizin tanımladığı uzay-zamanı dolduran manyetize olmuş skaler alan içeren ideal akışkandan oluşan kozmik madde dağılımının kinematik ve fiziksel nicelikleri aşağıdaki gibidir:

$$p = -\frac{L^2}{4\chi\beta_2^4} e^{4\sqrt{2}Mt}, \quad \rho = \frac{\beta_2^2 - L^2 e^{2\sqrt{2}Mt}}{4\chi\beta_2^4} e^{2\sqrt{2}Mt}, \quad \theta = -\frac{2M\sqrt{2}}{\beta_2} \quad (54)$$

$$U^3 = \frac{\beta_2^3}{e^{3\sqrt{2}Mt}}, \quad \frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{3L(L - \beta_2)e^{2\sqrt{2}Mt} + 38M^2\beta_2^2}{96M^2\beta_2^2} \quad (55)$$

Bu durumda;  $L = \beta_2$  ise, tüm evrim işlemleri süresince anizotropi korunmaktadır  $\left(\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{38}{96} \approx 0,4\right)$ .

$\beta_1 = \beta_2 \neq 0$  için modelimizi karakterize eden temel nicelikler aşağıdaki gibidir:

$$A^2 = \beta_1 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right), \quad B^2 = \alpha_0 \beta_1 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right) e^{\frac{L \arctan \left( e^{\sqrt{2}Mt} \right)}{\sqrt{2}M\beta_1}} \quad (56)$$

$$C^2 = \frac{\beta_1 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right)}{\alpha_0 e \frac{L \arctan(e^{\sqrt{2}Mt})}{\sqrt{2}M\beta_1}}, \quad p = -\frac{40M^2\beta_1^2 + L^2}{4\chi\beta_1^4 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^4} \quad (57)$$

$$\rho = \frac{\beta_1^2 \left( e^{5\sqrt{2}Mt} - e^{4\sqrt{2}Mt} - 4e^{2\sqrt{2}Mt} + e^{-2\sqrt{2}Mt} - 1 \right) - L^2 \left( 1 + e^{2\sqrt{2}Mt} \right)^2}{4\chi\beta_1^4 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^4 \left( 1 + e^{2\sqrt{2}Mt} \right)^2} \quad (58)$$

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}M \left( e^{\sqrt{2}Mt} - e^{-\sqrt{2}Mt} \right)}{\beta_1 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^2}, \quad U^3 = \beta_1^3 \left( e^{\sqrt{2}Mt} + e^{-\sqrt{2}Mt} \right)^3 \quad (59)$$

$$\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{38M^2\beta_1^2 \left( e^{3\sqrt{2}Mt} + e^{2\sqrt{2}Mt} \right)^2 - 3L \left[ 4\beta_1 \left( 1 - e^{3\sqrt{2}Mt} - e^{5\sqrt{2}Mt} \right) - \left( e^{2\sqrt{2}Mt} + 1 \right)^2 \right]}{96M^2\beta_1^2 \left( e^{-\sqrt{2}Mt} - e^{3\sqrt{2}Mt} \right)^2} \quad (60)$$

Bu durumda;  $M^2 = -\frac{L^2}{40\beta_1^2}$  için  $p=0$  olur. Buda evreni dolduran kozmik madde dağılımının, manyetize skaler alan içeren kozmik toz olduğu dönemi tanımlar.

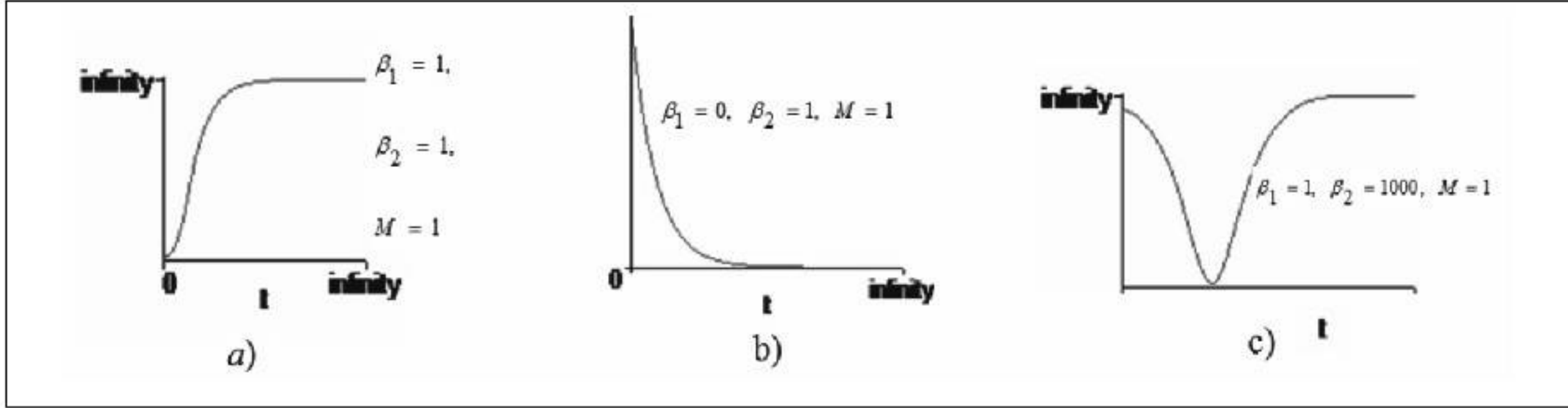
$\beta_1 \neq 0$  ve  $\beta_2 = 0$  için metrik potansiyellerden  $C^2 = 0$  olurken  $A^2 = \beta_1 e^{\sqrt{2}Mt}$  ve  $B^2 = \infty$  olmaktadır. Bu durumda uzay-zaman metriği, bir hiperyüzey tanımlamaktadır. Bu hiperyüzeyde,  $dy^2$  'ye ait metrik potansiyel genişleme süresince daima baskın olmaktadır. Bu uzay-zamanı dolduran kozmik madde dağılımını karakterize eden nicelikler aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$p = -\frac{L^2}{4\chi\beta_1^4 e^{4\sqrt{2}Mt}}, \quad \rho = \frac{\beta_1^2 e^{\sqrt{2}Mt} - L^2}{4\chi\beta_1^4 e^{4\sqrt{2}Mt}}, \quad \theta = \frac{2\sqrt{2}M}{\beta_1 e^{\sqrt{2}Mt}}, \quad U^3 = \beta_1^3 e^{3\sqrt{2}Mt} \quad (61)$$

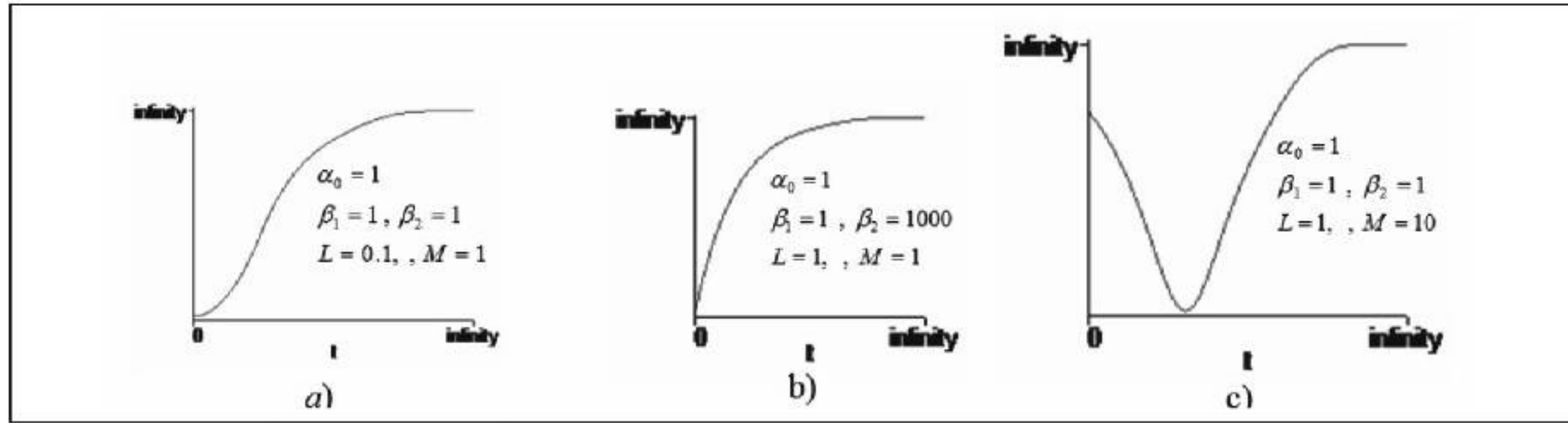
$$\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{38\beta_1^2 e^{2\sqrt{2}Mt} + 12L\beta_1 e^{\sqrt{2}Mt} + 3L^2}{96M^2\beta_1^2 e^{2\sqrt{2}Mt}} \quad (62)$$

$$\frac{p}{\rho} = (\gamma - 1) = \frac{L^2}{L^2 - \beta_1^2 e^{\sqrt{2}Mt}} \begin{cases} L \gg \beta_1 \Rightarrow p = \rho, \gamma = 2 \\ L \ll \beta_1 \Rightarrow p = 0, \gamma = 1 \end{cases} \quad (63)$$

Bu durumda;  $L \gg \beta_1$  için uzay-zamanı dolduran kozmik madde dağılımı, manyetize skaler alanlı katı madde (*stiff matter*,  $p = \rho$ ,  $\gamma = 2$ ) karakterinde olurken  $L \ll \beta_1$  için ise skaler alanlı kozmik toz ( $p = 0$ ,  $\gamma = 1$ ) yapıda olmaktadır. Bu son durum; evrenin madde oluşum öncesi ve manyetik alanın ve skaler alanın etkin olduğu dönemi tanımlamaktadır.

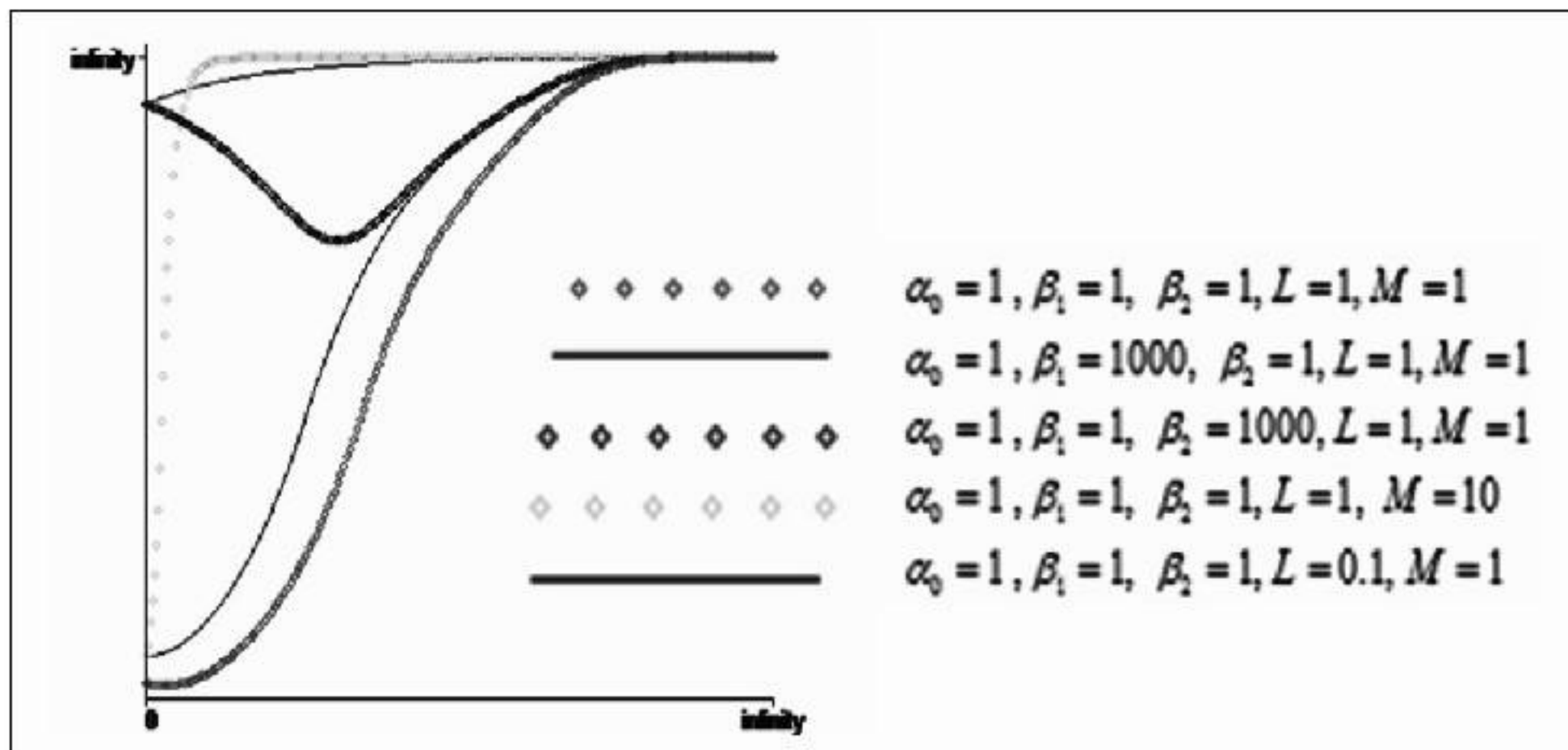


(41) denklemlerinde  $M \leq \mp \frac{L}{2\sqrt{-10\beta_1\beta_2}}$  için  $p \geq 0$  olmaktadır. Burada  $\beta_3 > 0$  olmak üzere,  $\beta_1 = -\beta_3 < 0$  ve



$\beta_2 > 0$  için  $V_1 = \sqrt{\frac{L^2}{40\beta_2\beta_3} - \frac{K^2}{4\pi}}$  olmaktadır.

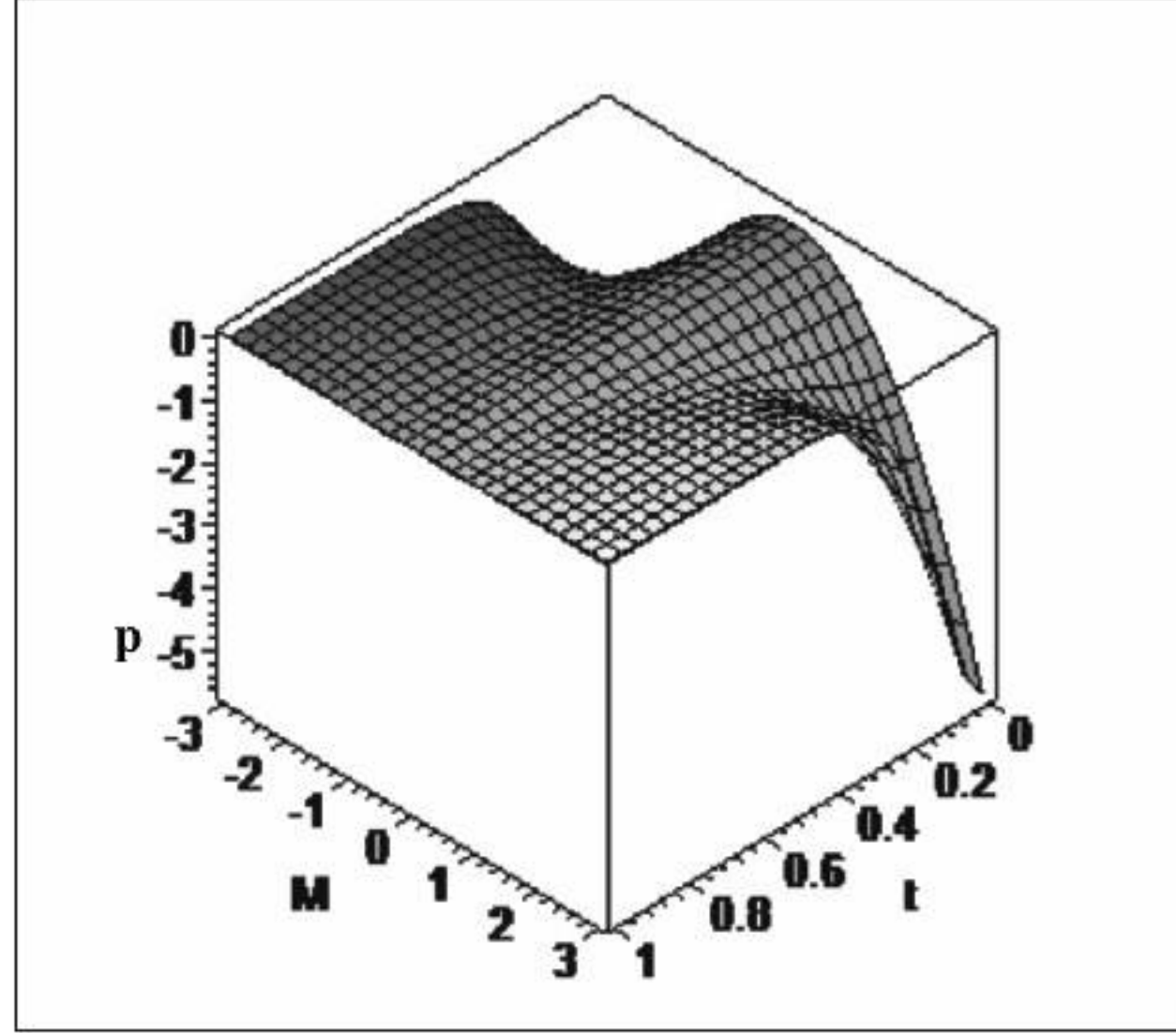
Uzay-zamanın geometrisini tanımlayan metrik potansiyellerin parametrelere bağlı olarak değişimlerini veren grafikler sırasıyla Şekil-2, Şekil-3 ve Şekil-4'te sunulmuştur.



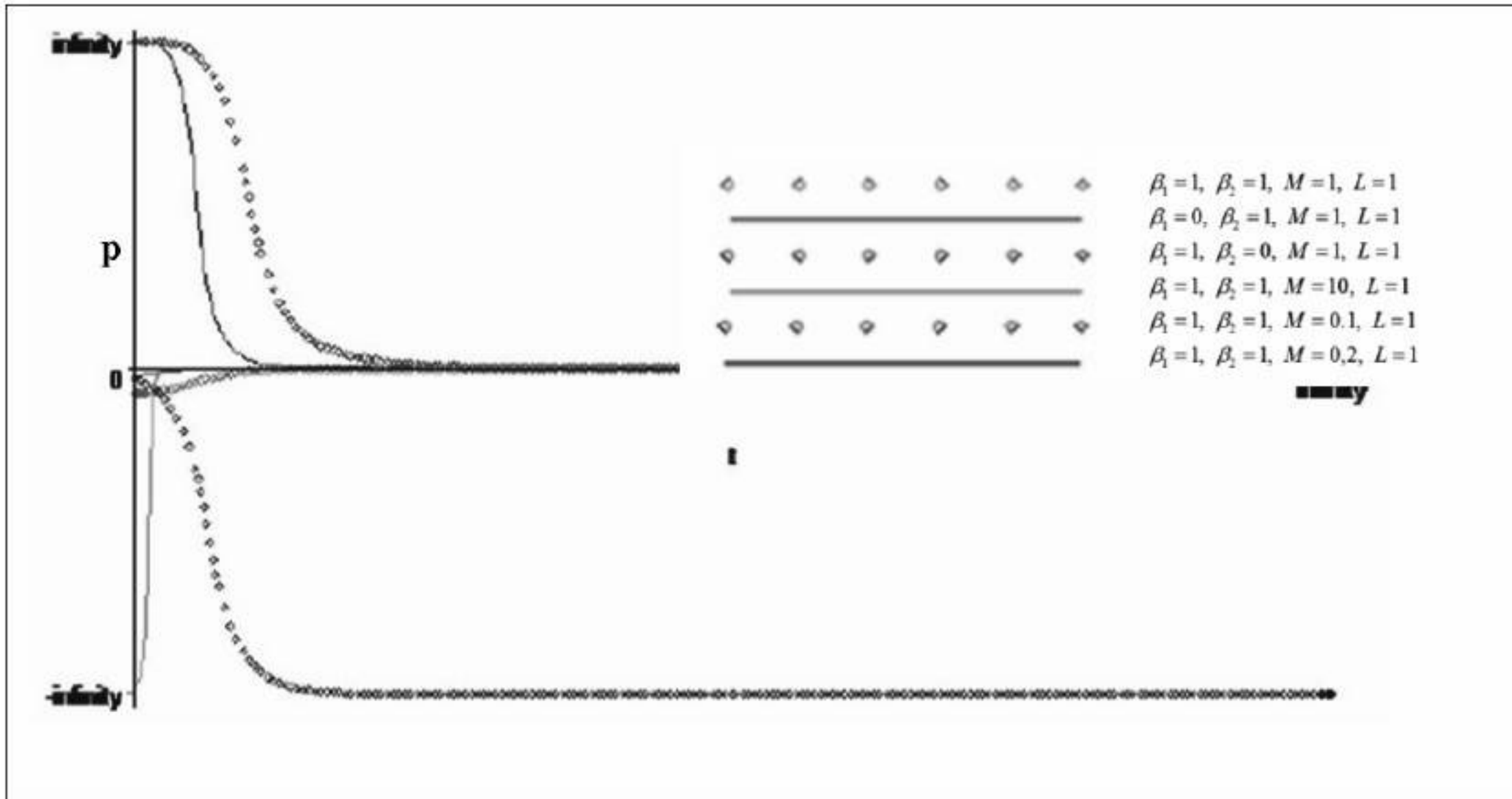
Şekil-4.  $C(t)$  metrik potansiyelinin parametrelere bağlı olarak zamana göre değişimi.

Uzay-zamana eğrilik kazandıran ideal akışkan ve manyetize skaler alandan oluşan kozmik madde dağılımının parametrelere göre değişimi Şekil-5 ve Şekil-6 'da verilmiştir.

Şekil-6' dan görüleceği gibi  $\beta_1$  veya  $\beta_2$  niceliklerinden biri negatif olduğunda uzay-zamanı dolduran kozmik madde dağılımının basıncı pozitif ( $p > 0$ ) iken, diğer durumlarda genişleme süresince kozmik basınç negatif ( $p < 0$ ) olmaktadır.

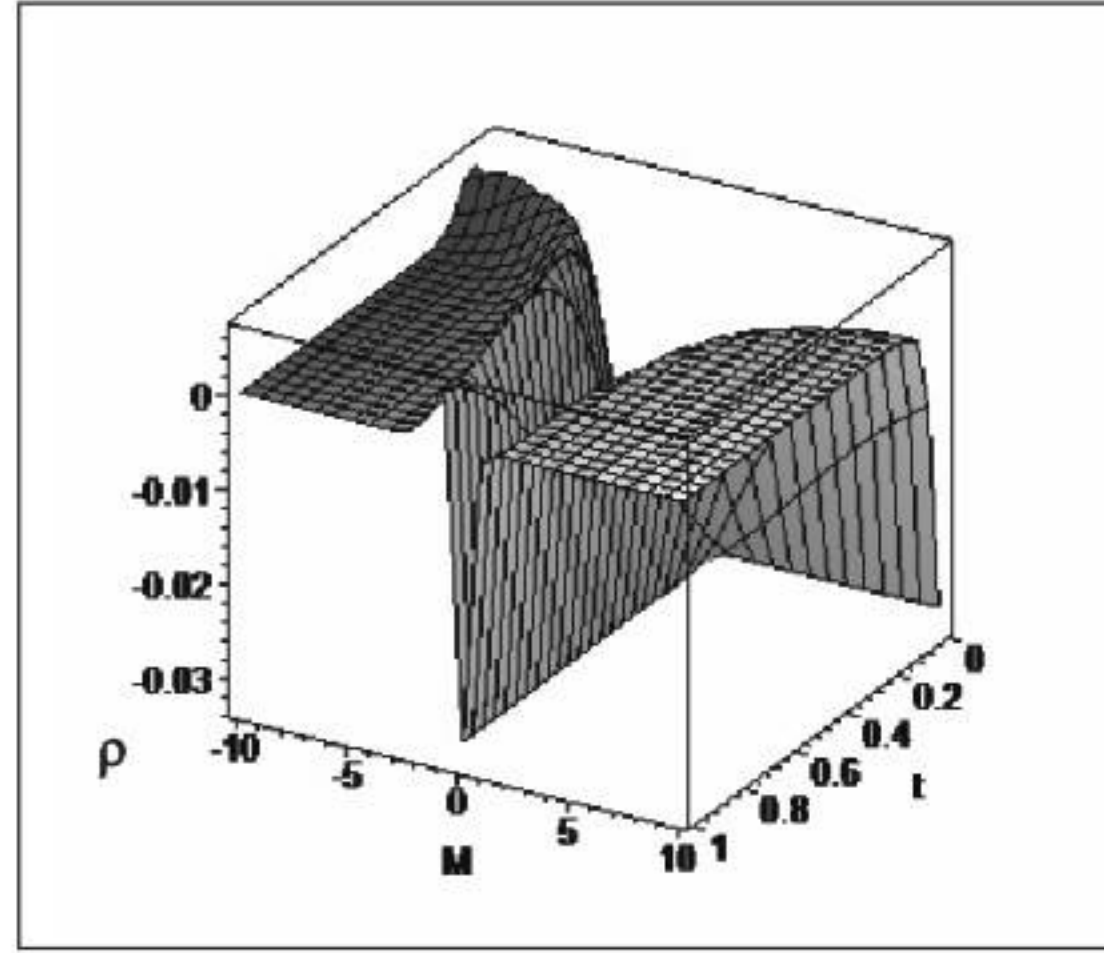


Şekil-5. Kozmik basıncın M ve t parametrelerine göre değişimi.

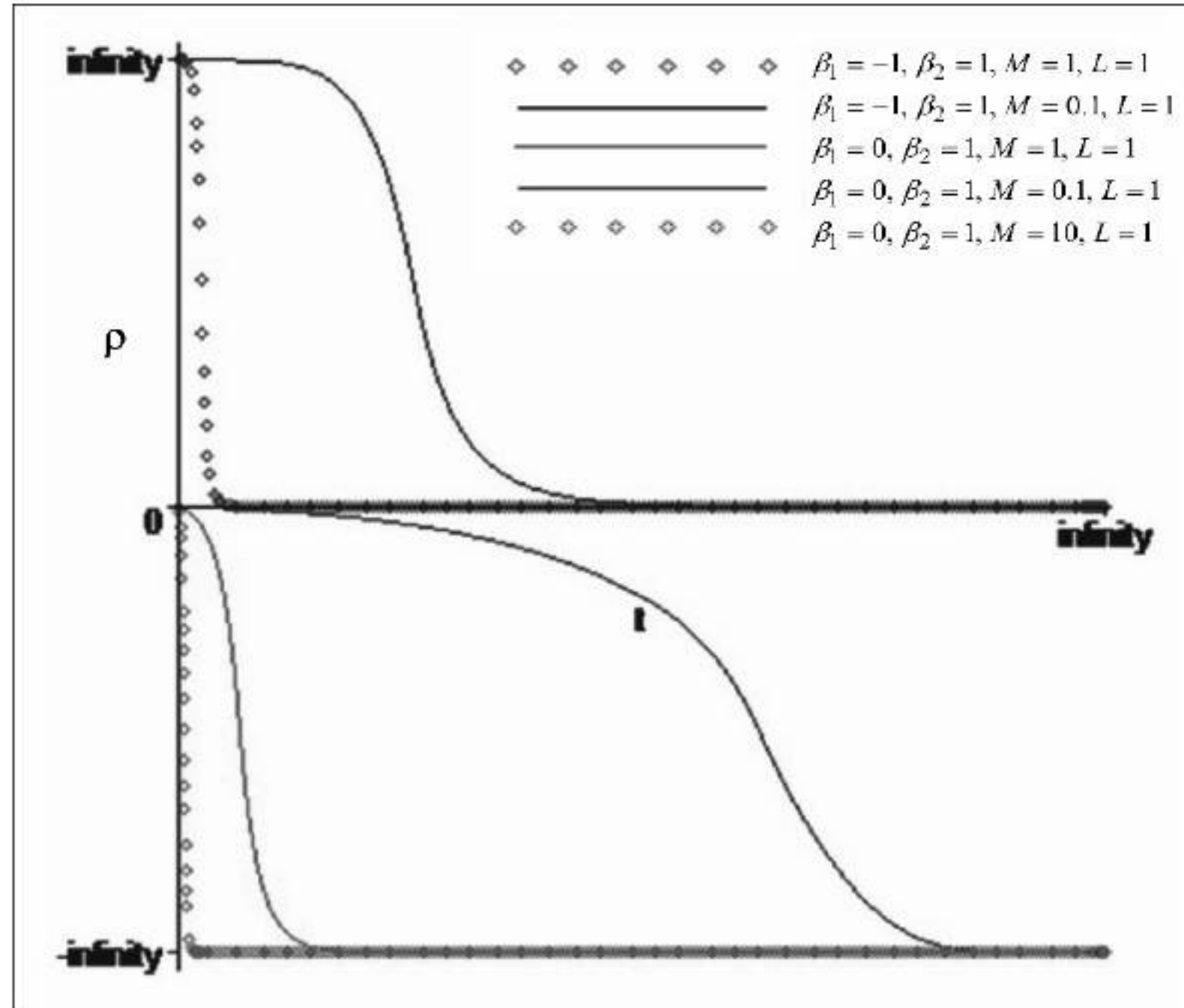


Şekil-6. Kozmik basıncın çeşitli parametrelere bağlı olarak kozmik zamana göre değişimi.

Kozmik madde dağılımının enerji yoğunluğunun parametrelere bağlı olarak zamanla değişimi Şekil-7 ve Şekil-8'de verilmiştir.



Şekil-7. Kozmik madde dağılımının enerji yoğunluğunun M ve t parametrelerine göre değişimi.



Şekil-8. Kozmik madde dağılımının enerji yoğunluğunun çeşitli parametrelere göre kozmik zamanla değişimi. Şekil-8 'den de görüleceği gibi  $\beta_1 < 0$  durumları için kozmik madde dağılımının enerji yoğunluğu evrim işlemleri süresince pozitif ( $\rho > 0$ ) iken diğer durumlarda negatif olmaktadır. Bu durum bize modelin tanımlanmasında parametrelerin oldukça önemli olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak; manyetik alan içeren skaler alanlı kozmolojik modellerin evrimini ve kozmolojik özelliklerini daha iyi tartışabilmek için kozmik sicim, ısı akısı ve viskoz madde gibi farklı madde formlarını da içerecek manyetik alanlı kozmolojik modeller oluşturmak oldukça önemli olacaktır. Böylece; skaler alan kozmolojilerde manyetik alanın oluşumu, etkisi ve evrimi daha iyi irdelenebilecektir.

#### KAYNAKLAR

- [1] H. J. Blome, T. L. Wilson, "Primordial Magnetic Field Measurements From The Moon", 28<sup>th</sup> Annual Lunar and Planetary Science Conference, Houston-Texas, 123 (1997).
- [2] A. Pradhan, K. Jotania, A. Singh, "Magnetized String Cosmological Model in Cylindrically Symmetric Inhomogeneous Universe with Time Dependent Cosmological-Term Lambda", Brazilian Journal of Physics, 38, 167-177 (2008).
- [3] R. Beck, "Cosmic Magnetic Fields: Observations and Prospects", ed. F.M. Rieger, AIP Conf. Proc. (astro-ph/arXiv:1104.3749v1), Texas Symposium (2010).
- [4] P.P. Kronberg, "Cosmic magnetic fields, and implications for HE particle anisotropies", The XVI International Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions (ISVHECRI 2010), Batavia, IL, USA (28 June - 2 July 2010).
- [5] F. Miniati, A.R. Bell, "The 6th Annual International Conference on Numerical Modeling of Space Plasma Flows in Valencia", Spain, (ASTRONUM-2011), 459, 125-130 (2011).
- [6] H. Weyl, "Gravitation and Electromagnetism", Akad and Wiss Pres., Berlin. 2, 465-468 (1918).
- [7] H. Weyl, "Space, Time and Matter", Dover Publication Inc., London (1922).
- [8] J. A. Belinchon, T. Harko, M. K. Mak, "Full Causal Bulk Viscous Cosmological Models with Variable G and Lambda", gr-qc/0112020 (2001).
- [9] M. K. Mak, T. Harko, "Bianchi Type I Universes with Causal Bulk Viscous Cosmological Fluid", gr-qc/010069 (2001).
- [10] G. Mendell, "Magnetic effect on the viscous boundary layer damping of the r-modes in neutron stars", gr-qc/0102042 (2001).
- [11] B.C. Paul, "Viscous Cosmologies with Extra Dimensions", gr-qc/0106031 (2001).
- [12] İ. Tarhan, "Astr. Nachr." 313, 3 (2002).
- [13] G. Mohanty, B. Mishra, R. Das, "Bull. Inst. Math.", 28, 43-51 (2000).
- [14] G. Mohanty, U. K. Panigrahy, R. C. Sahu, "Astrophysics and Space Science", 281, 633-640 (2002).
- [15] G. Mohanty, R. C. Sahu, U. K. Panigrahy, "Astrophysics and Space Science", 284, 1055-1062 (2003).
- [16] S. Aygün, İ. Tarhan, "The Decay of Massive Scalar Field in Non-Static Gödel Type Universe with Viscous Fluid and Heat Flow". International Journal of Theoretical Physics, Int. J. Theor. Phys., 47, 3257-3266 (2008).
- [17] S. Aygün, İ. Tarhan, H. Baysal, "Scalar field theory and energy-momentum problem of Yilmaz-Rosen metric in general relativity and teleparallel gravity", Astrophysics and Space Science, Astrophys. Space Sci.,

314, 323 (2008).

[18] R.C. Sahu, G. Mohanty, "Astrophysics and Space Science", 306, 179-183 (December 29, 2006).

[19] L. O. Pimentel, "Astrophysics and Space Science", 116, 395-399 (1985).

[20] G. Mohanty, B. Mishra, R. Das, "Theo. Ve Appl. Mech.", 26, 71 (2001).

[21] R.C. Sahu, U. K. Panigrahi, "Astrophysics and Space Science", 288, 601-610 (2003).

[22] U. K. Panigrahi, R. C. Sahu, "Czech. J. Physc.", 54, 543 (2004).

[23] N.P. Gaikwad, M.S. Borkar, S.S. Charjan, "Bianchi Type I-Massive String Magnetized Barotropic Perfect Fluid Cosmological Model in the Bimetric Theory of Gravitation", Chinese Physics Letters, 28, 089803 (2011).

[24] P. S. Letelier, "Phys. Rev.", D20, 1294-1302 (1979).

[25] P. S. Letelier, "Phys. Rev.", D28, 2414-2419 (1983).

[26] J. Stachel, "Phys. Rev.", D21, 2171-2181 (1980).

[27] D. G. Yamazaki, K. Ichiki, T. Kajino, G.J. Mathews, astro-ph/0610234v1. (2006).

[28] F. A. Membrilla, M. Bellini, "Primordial Large-Scale Electromagnetic Fields From Gravitoelectromagnetic Inflation", gr-qc/0811.0993v1. (2008).

[29] S. W. Hawking, W. Israel, "General Relativity: An Einstein Centenary Survey", Cambridge University Press, Cambridge. 277 - 291 (1979).

[30] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", Bergamon Pres. 239 – 254 (1987).

[31] L. P. Hungston, K. P. Tod, "An Introduction to General Relativity", Cambridge University Press, Cambridge. 136 – 143 (1990).

[32] H. Stephani, Relativity: "An Introduction to Special and General Relativity", Cambridge University Press. 233 – 248 (2004).

[33] M. Demianski, "Physics of the Expanding Universe", Springer-Verlag, Berlin. p. 374 (1979).

[34] L. Marder, "Proc. Roy. Soc. Lond", A244, 524-537 (1958a.).

[35] L. Marder, "Proc. Roy. Soc. Lond.", A246, 133-143 (1958b.).

[36] M.A.H. MacCallum, "In General Relativity and Einstein Centenary Survey", Cambridge University Press, Cambridge. 194 – 221 (1979).

[37] Ya. B. Zel'dovich, Sov. Sci. Rev. E Astrophys. Space Phys., 5, 1-37 (1986).

[38] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M.A.H. MacCallum, E. Schmutzer, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", Cambridge Univ. Pres. Cambridge. 356 – 384 (1980).

[39] C.B. Collins, E.N. Class, D.A. Wilkinson, "Exact Spatially Homogeneous Cosmologies", General Relativity and Gravity, 12, 805 (1980).

[40] S. Selak, "Astrophysics and Space Science", 109, 123-130 (1985).