



Routinization in the Context of Equation and Inequality Concepts: A Case Study¹

ARTICLE TYPE	Received Date	Accepted Date	Published Date
Research Article	11.16.2024	05.20.2025	08.16.2025

Tuba Akçakoca ²
Ministry of National Education

Gönül Yazgan Sağ ³
Gazi University

Ziya Argün ⁴
Gazi University

Abstract

This study aims to reveal the structure of learning as routinization by providing empirical examples. The participation of a high school student in discourse in task situations involving systems of equations and inequalities was examined in terms of objectification of the discourse, flexibility, bondedness, substantiability, performer's agentivity, and applicability. The study was designed as a case study, one of the qualitative research methods. Elif, the study participant, is an 11th-grade student studying courses focused on mathematics and science-oriented fields in a public high school. The data were collected through semi-structured individual and focus group interviews. Findings showed that Elif exhibited ritualistic participation by imitating others in the individual interview. In contrast, she exhibited more explorative participation in the focus group interviews as the participants became aware of the structure of the concepts. It was found that students' participation in discourses was more explorative when they reflected on the routines of those they considered more experienced. It was also determined that for learning to occur as routinization, individuals should participate in discourse and make an effort to develop their routines from process-oriented to result-oriented.

Keywords: Mathematical discourse, routine, ritualistic participation, explorative participation, equations and inequalities, high school students

Citation: Akçakoca, T., Yazgan Sağ, G. & Saklan, E. (2025). Routinization in the Context of Equation and Inequality Concepts: A Case Study. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 58(2), 491-548. <https://doi.org/10.30964/aubfd.1586576>

¹This study was derived from the doctoral thesis of Tuba Akçakoca, which was carried out under the supervision of Prof. Dr. Ziya Argün and Assoc. Prof. Dr. Gönül Yazgan Sağ at the Department of Mathematics Education, Institute of Educational Sciences, Gazi University.

²Corresponding Author: Teacher, Ministry of National Education, Türkiye, E-mail: erturktuba06@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1346-0060>, <https://ror.org/00jga9g46>

³Assoc. Prof. Dr., Gazi University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Division of Mathematics Education, Ankara/Türkiye, E-mail: gonulyazgan@gazi.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-7237-5683>, <https://ror.org/054xkpr46>

⁴Prof. Dr., Gazi University, Faculty of Education, Department of Mathematics and Science Education, Division of Mathematics Education, Ankara/Türkiye, E-mail: ziya@gazi.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-8101-7215>, <https://ror.org/054xkpr46>

Research defining learning in mathematics education as a fundamentally social activity considers meaning and thinking as products of this social activity (Ben-Zvi & Sfard, 2007; Kieran et al., 2001; Lerman, 2006; Moschkovich, 2010; Sfard, 2008). According to this sociocultural perspective, mathematics learning occurs through participation in these social activities (Wenger, 1998). Like other sociocultural approaches, Sfard's (2008) theory of commognitive defines learning as participating in a particular community's discourse. (Weingarden et al., 2019). Thinking is defined as the individualized version of interpersonal communication (Sfard, 2008, 2012). Sfard (2012) argues that individuals participate in mathematical discourse through speech and thought. This participation is evident in their actions. Therefore, current studies focus on the participation of individuals in discourse in order to analyze learning (Christiansen et al., 2023). In this context, routines as an element of mathematical discourse are taken as the unit of analysis, and learning is defined as the de-ritualization of one's actions. Thus, learning is seen as a process of change in discursive routines in a particular community rather than a process in which an individual changes specific cognitive structures in the mind (Lavie et al., 2019). This study will examine a high school student's participation in discourse related to equations and inequalities, focusing on processes of de-ritualization.

Mathematical Learning as Routinization

Routines are defined as a pair of task and procedure (Lavie et al., 2019; Sfard, 2018). Task refers to the participant's decision-making regarding actions in a new task situation, considering past learning experiences. Procedure refers to all actions, including processes, methods, and symbolic manipulations, that participants utilize to accomplish a task. Thus, a routine is dependent on the specific task situation and the individual performing it (Lavie et al., 2019). A task situation is any task in which the participants consider themselves obliged to do something or a problem situation in which they are obliged to solve. Task situations can be deliberately created by the task setter (researcher, expert, teacher, etc.) to elicit a certain type of action. In a given task situation, participants model their current actions according to what they have learned and done in the past. This results in action patterns called routines (Lisarelli et al., 2022). Different participants may perform similar procedures aiming at different tasks for the same task situation. For example, for a task situation such as "Determine the real numbers that satisfy the equation $3x - 1 = 5$ ", participants may take it upon themselves to produce an expression in the form of " $x = \text{number}$ ", while other participants may be looking for the real number that satisfies equality when x is substituted in the equation (Lavie et al., 2019).

Discursive routines are divided into ritual and exploration routines according to their purpose. If the participant performs the routine to create and maintain a connection with other people, the routine is called a *ritual* routine; if the participant performs the routine to produce a mathematical narrative, the routine is called an *exploration* routine (Sfard, 2008). Narratives, like routines, are discourse elements and are sequences of words that contain descriptions of mathematical objects, relationships between objects, or processes. In mathematical discourse, there are types

of narratives, such as axioms, definitions, claims, and proofs (Sfard, 2008). For learning to progress, individuals need to transform ritual routines, which they initially imitate by imitating others in a dependent manner, into exploration routines that they can perform independently, flexibly, and agency (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019). This process is called the process of *de-ritualization*. For this transition to occur, individuals need to participate in discourse on the one hand, and on the other hand, they need to make efforts to develop their routines from process-oriented to result-oriented (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020). Depending on the participants' engagement with discursive routines, there are two types of discursive participation, ritualistic and explorative, which differ in their goals and rules of engagement (Baccaglini-Frank, 2021).

Ritualistic and Explorative Participation

In ritualistic participation, individuals display their routines to please others (friends, teachers, etc.) and establish a social bond with others. In this form of participation, individuals are novice participants and imitate or strictly follow procedures set by an authority (Roberts & le Roux, 2019; Sfard, 2008). The participant is process-oriented when implementing their procedure and tries to implement it by looking for answers to the question "How do I proceed?" (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019). The participant's discourse is mainly about the symbolic manipulation of mathematical objects. She cannot make new and independent decisions while practicing her procedure and often refers to memory or authority (friend, teacher, textbook) (Baccaglini-Frank, 2021). The participant has difficulty applying their routine in different task situations and focuses on the need to take and perform specific steps when providing arguments for their procedure (Nachlieli & Tabach, 2022).

In explorative participation, individuals perform their routines to produce mathematical narratives. In this form of participation, individuals are agency participants, make independent decisions while applying the procedure, and do not need to apply to authority. The participant is result-oriented while implementing the procedure and tries to implement the procedure by looking for an answer to the question "What do I want to achieve?" (Emre-Akdoğan & Gürbüz, 2023; Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019). Therefore, the participant's discourses are about mathematical objects rather than processes (Baccaglini-Frank, 2021). The participant performs their procedure not to please others but to present their arguments. Explorative participation involves showing agency, making independent choices, and adapting procedures flexibly (Emre-Akdoğan & Gürbüz, 2023; Heyd-Metzuyanim et al., 2016; Nachlieli & Tabach, 2019). The participant can construct mathematical arguments for their routine and include mathematical proofs during the implementation of the procedure (Lavie et al., 2019; Sfard, 2008).

Routines in mathematics learning environments are rarely only ritual or only exploration. Instead, routines exist on a spectrum where ritual and exploration are extreme cases. Moreover, using ritual routines is often seen as a necessary first step

in learning (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Katz, 2017; Sfard & Lavie, 2005; Viirman & Jacobsson, 2023). The participant tries to participate in the new discourse by imitating others (expert participants, teachers, etc.) to continue in a new task situation (Sfard, 2007). However, imitation in this context does not mean imitation in which thinking is not involved, and this type of imitation is called “thoughtful imitation” (Sfard, 2008). In thoughtful imitation, the participant constantly adjusts their performance to the performance of others while at the same time reflecting on the reasons for what expert mathematicians do (Sfard, 2008). Thus, the participant’s ritual routine can turn into a routine of exploration. Lavie et al. (2019) proposed considering six characteristics of routines to analyze the transition from ritual to exploration: objectification of the discourse, flexibility, bondedness, substantiability, performer’s agentivity, and applicability. According to the researchers, to talk about any progress in the transition process of routines from ritual to exploration, improvement in one or more of these characteristics should be observed.

Objectification of the discourse is defined as the process by which a participant begins to use a noun (e.g., equation, inequality, etc.) in discourse in a way that is independent of human actions/activities and represents a mathematical object (Sfard, 2008). In mathematical discourse, objectification is one of how talking about processes is replaced by talking about mathematical objects (Bacaglini-Frank, 2021). Sfard (2008) uses signifier and realization in her theory to explain the “mathematical object.” A set of words or symbols that function as the primary object in mathematical discourse is a signifier (Jayakody, 2015; Sfard, 2008). Any task situation, a problem, an equation, an algebraic expression, a number, or any representation of concepts can be a signifier. A realization is defined as the procedure that maps a signifier to another primary object or the product of such a procedure (Sfard, 2008). For example, if “the solution of the equation $7x + 4 = 5x - 2$ in the set of real numbers” is considered as a signifier, a (possible) realization of this signifier can be the x coordinate of the intersection point of the graphs of the lines $y = 7x + 4$ and $y = 5x - 2$ drawn on the analytic plane. In this context, a “mathematical object” is also defined as a “signifier” with its realizations (Sfard, 2008). When all the realizations of an signifier are organized hierarchically, it is called a “realization tree” (Jayakody, 2015; Sfard, 2008). Flexibility means that the participant can use more than one way to accomplish the task in the task situation. Bondedness means that the participant uses the output of any step in the participant’s procedure as input for subsequent steps. Substantiability involves reasoning about, providing arguments for or showing why any routine, procedure, or narrative emerges. Performer’s agentivity consists of the participant knowing when to start a routine, what decisions are needed to continue when to end it, and being able to evaluate the solution. Applicability involves the participant’s ability to apply the routine in a different environment, task situation, context within the task situation, and similar task situations with which they are familiar (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022).

Aim and Importance of the Research

This study examines the processes of de-ritualization of high school students in the context of equation and inequality concepts. Thus, analyzing a high school student's participation in mathematical discourse in task situations involving equations and inequalities will be presented to the reader in the objectification of discourse, flexibility, bondedness, substantiality, performer's agentivity, and applicability. When the related literature is examined, it is seen that the studies examining learning as routinization in mathematics education are primarily at the university level (Biza & Nardi, 2023; Christiansen et al., 2023; Karavi et al., 2022; Liu & Weingarden, 2022; Lipper & Karavi, 2023; Viirman & Jacobsson, 2023; Viirman & Nardi, 2019). Few studies have focused on high school students (Akçakoca et al., 2023; Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Macchioni et al., 2023; Roberts & le Roux, 2019). Most of these studies investigate learning as routinization (Baccaglini-Frank, 2021; Biza & Nardi, 2023; Christiansen et al., 2023; Essack, 2015; Karavi et al., 2022; Liu & Weingarden, 2022; Lipper & Karavi, 2023; Macchioni et al., 2023; Roberts & le Roux, 2019; Viirman & Nardi, 2019) provided findings on participants' discourse in the context of one or more of these six features. Baccaglini-Frank (2021) analyzed two low-achieving high school students' discourse on function in digital learning environments regarding performer's agentivity and objectification. Providing examples of ritualistic and explorative forms of participation, the researcher concluded that digital learning environments support lower-achieving students to engage in more explorative discourse. In another study focusing on high school students' discourse on function, Essack (2015) characterized student routines as ritual or exploration in terms of five features other than the performer's agentivity. Comparing the routines of low-achieving and high-achieving 11th graders, Essack (2015) concluded that explorative participation is positively related to student achievement. Macchioni et al. (2023) focused on the discourse of two low-achieving high school students in equation-solving processes. They examined their discourse participation regarding flexibility, applicability, substantiality, performer's agentivity. Focusing on the meaning-making processes in students' mathematical discourse, the researchers concluded that the participants' insistence on ritualistic participation negatively affected their meaning-making processes. Roberts and le Roux (2019) focused on the discourse of 8th and 9th-grade students in solving linear equations with objectification and flexibility features. Even though their study did not include sufficient evidence to show that students transitioned to explorative discourse, the researchers offered suggestions to teachers on how to change students' discourse. In another study examining high school students' discourse in the context of quadratic inequalities, Akçakoca and others (2023) analyzed students' routines regarding flexibility and performer's agentivity. The study's findings revealed that students mainly exhibited ritualistic participation in the context of the relevant features. When the studies (Akçakoca et al., 2023; Macchioni et al., 2023; Roberts & le Roux, 2019), which addressed learning as routinization in the context of equation or inequality concepts, were examined, it was observed that they generally focused on the discourse of low-achieving students (Macchioni et al., 2023; Roberts & le Roux, 2019) and

therefore did not provide sufficient findings on explorative participation (Akçakoca et al., 2023; Macchioni et al., 2023; Roberts & le Roux, 2019). In this study, an 11th-grade student's discourse on the processes of solving systems of equations and inequalities is analyzed in detail in the context of the six features above. Therefore, this study provide a rich data source for ritualistic and explorative participation in high school students' learning as routinization. The research question is stated as follows:

“What is the type (ritualistic or explorative) of an 11th-grade student's participation in mathematical discourse in various task situations related to the concepts of equation and inequality, and how does this participation occur?”

Method

Research Design

This study was designed as a case study, one of the qualitative research methods. The case study is an empirical method investigating a situation in depth and in a real-world context (Yin, 2018). This method requires investigating a problem in a real-life, current context or environment (Creswell, 2014). In this study, in-depth information was collected and findings were sought regarding the process of de-ritualization in the mathematical discourse of a high school student.

Determination of the Study Group and Research Participants

Elif (pseudonym), the participant of this study, was an 11th-grade student studying courses focused on mathematics and science-oriented fields in a public high school. The sociocultural setting in this study was an out-of-class mathematics study environment where Elif, the first researcher (also her mathematics course teacher), and four classmates. The five students in the study group, in which focus group interviews were conducted with Elif as a participant, were selected from a class of 23 students. A survey form was created by taking expert opinion to determine the study group. Before the survey form was applied to a class of 23 students, it was piloted with two students in another class of 11th-grade students studying in a numerical course. The pilot application included a process in which students were engaged in solving the task situations in the survey form, and interviews were conducted on student responses. The pilot interviews lasted 35 minutes, during which deficiencies and errors in the task situations were eliminated, and additions were made if necessary. The survey form, which includes two different task situations related to 9th grade learning outcome which is “Finds the solution sets of first-order equations and inequality systems with two variables” (MoNE, 2018), was applied to students in a class of 23 after the pilot application, and this application took 20 minutes. The first researcher analyzed student responses and took notes. In this analysis, students who did not volunteer for the study among 23 students and students who answered most of the task situations in the survey form incompletely or incorrectly were not selected as participants, considering that they would not constitute a rich data source. Apart from

these students, nine students remained, and individual interviews were conducted with these nine students to reduce this number due to the difficulty of discourse analysis. In the individual interviews, the students tried to explain their answers in the survey form with their justifications in a single session. In this process, the first researcher did not guide the students in terms of content but only asked them to justify their answers and, if necessary, to share their solutions aloud again. The findings obtained in the individual interviews were also used to determine the structure of the participants' routines before the focus group interviews. They formed part of the primary data of the study. The interviews were recorded on camera, and after analyzing these individual interviews, it was decided that the focus group interviews should be conducted with five students.

When the individual interviews of the participants were analyzed, it was seen that all of their routines were ritual routines. However, Elif participated in the focus group interview exploratively, unlike the others. Elif was taken as a participant in this study because Elif's findings provide a rich source of data, especially for the explorative form of participation, and thus include findings about learning as routinization. The other students in the study group were coded as S1, S2, S3, and S4 in the findings section. All students participated in mathematics lessons and focus group interviews with high interest and motivation during the research process. According to the first researcher's classroom experiences, Elif was a student with high academic achievement, whose mathematics course average was above 95, and with whom the other students in the study group communicated and asked for help in solving the problems they could not solve. For this reason, Elif was included in the study as a more experienced participant for her friends in participating in the discourse, that is, a student with the potential to be a reliable authority. While S2's math course achievement was above 95, S1's, S3's, and S4's math course achievement averages were in the range of 80 and 85; that is, they had lower academic achievement than Elif.

Researcher Roles

According to Sfard (2018), a researcher working with a commognitive perspective should investigate the discourse they are working on from the perspective of an "insider" as well as an "outsider." In this study, the first researcher assumed the researcher-teacher role (Tabach, 2006) and had the opportunity to examine students' mathematical discourse from an "outside" perspective as a researcher and an "inside" perspective as a teacher. The first researcher conducted her study with five students in a numeracy-dominated class in a public high school where she worked in the 2021-2022 academic year. The first researcher attended mathematics classes in the 9th, 10th, and 11th grades for 6 hours each per week. During this 3-year education period, 1.5 years (the second semester of the 9th and 10th grades) were conducted through distance education due to the COVID-19 pandemic. At the same time, the first researcher conducted her lessons as a teacher and her interviews as a researcher face-to-face with her students throughout this study. Simultaneously with the study, the

researcher taught the “Equations and Inequalities” unit in the 11th-grade curriculum in mathematics classes. In other words, the first researcher had a long-term interaction with the students in both in-class and out-of-class environments during the face-to-face education process and had the opportunity to observe the participants for a long time. Therefore, the first researcher coded the study’s raw data. The second and third researchers provided expert opinions in preparing the task situations, determining and implementing the methodology, and data analysis. All three authors contributed to the article’s writing process.

Data Collection Tools and Process

The data collection tools of the study consisted of a survey form including task situations, semi-structured individual and focus group interviews, and all written sources belonging to the students in these interviews. Along with the individual interviews, the focus group interviews, in which the other data of the study were collected, were conducted in an out-of-class mathematics learning environment in a public high school where the participants interacted with the first researcher and with each other (a group of 5 students). During the focus group interviews, Elif and her friends were seated around a table facing the board and the researcher. The seating arrangement was left to the student’s preference, and the participants mostly sat at the table in the study environment from right to left with Elif, S4, S3, S2, and S1. The individual and focus group interviews conducted during the research process were recorded with two cameras. In the individual interviews, one camera faced the participant, and the other faced what the participant had written. In the focus group interview, one of the cameras was set to focus on the table where the participants were sitting from a position where they could easily see their faces and what they were doing. The other camera was set to focus on the board from a position that easily saw what was written and the participants standing up to the board.

Preparation and Implementation of Task Situations

In this study, the survey form was used to determine the study group and conduct semi-structured individual interviews, and the task situations determined for focus group interviews were prepared for the 9th-grade learning outcomes related to equation and inequality (MoNE, 2018). Similar task situations were included in both individual and focus group interviews. Thus, it was aimed to observe whether there was a transition from ritual to exploration in the participant’s routine. While preparing the task situations, expert opinion was taken. Before the implementation, a pilot study was conducted with two students in a different class than the class in which the study group was selected. Pilot studies were conducted to eliminate deficiencies regarding students’ understanding of the task situations, and necessary arrangements were made afterward.

The individual interview was conducted before the focus group interviews, and Elif was asked to justify her answers to the survey form in a single session. This session lasted approximately 40 minutes, and the first researcher did not provide any

guidance in terms of content during this process; she only asked Elif to justify her answers and to share her solutions aloud again when necessary. The individual interview findings were also used to determine the structure of the participant's routines before the focus group interviews. The task situations in which Elif's discursive participation was examined in the individual interview are as follows:

1. Task Situation 1 (TS1): Given $x, y \in \mathbb{R}$,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

Find the solution set of the system of equations using the elimination method.

2. Task Situation 2 (TS2): Given $x, y \in \mathbb{R}$,

$$-2x - y < -1$$

$$4x + 2y \leq -6$$

Show the set of real number pairs satisfying the system of inequalities in the analytic plane.

Focus group interviews were conducted in two different sessions and Elif interacted with other participants during these sessions. The session on the task situation involving the equation system lasted approximately 42 minutes, while the session on the task situation involving the inequality system lasted approximately 21 minutes. During the focus group interviews, the participants were informed of the place and time by the first researcher before the interview and the first researcher prepared the working environment before the interview. After the participants sat around the table facing the board and the researcher in an order of their choice, the researcher greeted the participants and started the recording process. Before presenting the task situations to the participants, the first researcher reminded them that they would be given enough time to answer the task situation. She also stated that the content of their answers was important rather than mathematical accuracy, and that they should share their answers by utilizing their previous learning experiences about the task situation. Thus, it was aimed to obtain a rich data source by making the participants feel comfortable. Afterwards, each task situation was presented to the participants in turn and the other task situation was not applied to the participants until the participants' tasks, discussions and sharing about one task situation were completed. In this study, the focus group interviews aimed to reveal the original participant thinking and capture their mathematical communication. Thus, for each task situation in the sessions, the researcher first distributed the papers containing the relevant task situation to the participants and asked them to deal with it individually. Each participant dealt with the solution of the task situation individually for an average of 3 to 8 minutes without interacting with any of their friends. The participants were given enough time to work on the solution and when they completed their solutions, they gave the solutions to the researcher. When all participants completed the solution, the researcher examined the participant responses in the task situations

and invited them to the board to share their solutions aloud according to a flow that would provide rich data for the research. After this stage, the focus group discussions continued in an environment where the participants interacted with each other and shared and discussed their mathematical discourses. After confirming whether the participants' sharing of a task situation continued, a new task situation was introduced. At the beginning of the focus group interviews conducted in this way, the participants were informed that the answers in the task situation would not be subjected to any evaluation and that it was important to share their thoughts and solutions rather than their accuracy. In addition, while the participants were dealing with the solutions of the task situations, each participant was given the necessary time without being rushed. For the participants to express themselves comfortably, no guidance was given regarding their thoughts (mathematical discourse) on the board and their solutions in written sources. Thus, we tried to create a safe environment for the participants where they could easily establish personal and interpersonal mathematical communication. In this process, the first researcher, who assumed the role of a participant observer (Adler & Adler, 1998), tried to establish mathematical communication with the participants through triggers (probes) (Glesne & Peskin, 1992) and to encourage the participants to use exploration routines.

The task situations in which Elif's discursive participation was analyzed in the focus group interviews are as follows:

1. Task Situation 3 (TS3): $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$

Find the solution sets of the equations. Show these sets in the plane. Can you share your thoughts?

2. Task Situation 4 (TS4): $x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x ; x, y \in \mathbb{R}$

Determine the set of pairs of real numbers (if any) that satisfy the system of inequalities and then represent this set on the plane. Can you explain the steps you took and why you took them?

Data Analysis

The data were transcribed to include participants' simultaneous verbal expressions (what they said), actions (what they did) and drawings (what they drew). Each line was numbered when transcribing the participant discourses on task situations in both individual and focus group interviews, and the following abbreviations were used during the analysis:

- A: Researcher
- E: Elif
- S1, S2, S3 and S4: Other participants
- TS*n*: *n*. Task Situation (replace *n* with the number of the task status)[...]: waiting for some time
- [...]: when a participant speaks, their actions will be italicized in the section with "..."

- (...): when a participant is speaking and another participant is briefly involved in the conversation, italicized “...”
- <...>: while one participant is speaking, the actions and situations of other participants will be expressed in the “...”
- (x): What is said while writing on the blackboard
- (xx): What is said when writing on paper
- The “-” at the end of the word will be used to indicate that the participant’s speech was interrupted

Coding of Data

After the transcript of the study’s raw data was completed, the structure of Elif’s discursive routines of the relevant task situations was revealed, and the focus was on when and how the participant exhibited her routines. Thus, the type of routines (ritual or exploration) Elif used while solving systems of equations and inequalities was determined, and these routines were coded. One of Elif’s routines from the individual interview was coded as “BG,” and one from the focus group interviews was coded as “OG.” Afterward, the data were monitored again to determine what kind and how Elif participated in mathematical discourse in the relevant task situations through these routines. In this determination, how Elif engaged in the routines and the distinctive features of her participation patterns were considered. Thus, it was explained how Elif’s participation in discourse was realized in terms of objectification, flexibility, bondedness, substantiability, performer’s agentivity, and applicability. In examining Elif’s participation in discourse through their routines, the participant’s discourse of the mathematical objects and their discourses about the participants in the discourse was considered.

In the objectification of discourse, Elif’s participation was coded as ritualistic if her discourse was mostly about manipulating mathematical objects. If Elif’s discourse was mostly about mathematical objects and included canonical narratives about these objects, her participation in the discourse was coded as explorative. The word “canonical” was used here because the participant’s discourse corresponded to the procedures and narratives used by the expert mathematical community; namely, it was used when the discourses were mathematically “correct.” In addition, if Elif was unable or had difficulty in making transitions between different realizations of the concept, their participation was coded as ritualistic in the context of objectification of the discourse; if she was able to make these transitions proficiently and produce canonical narratives that they could establish mathematical relationships, her participation was coded as explorative.

In the flexibility, Elif’s participation in the discourse was coded as ritualistic if she performed the procedure rotely and through a rigid solution. On the other hand, if Elif performs her procedure canonically using different solution paths (complete and correct), her participation is coded as explorative in flexibility.

In the bondedness, the participant's participation in the utterance was coded as ritualistic if the steps in her procedure contained mathematical errors or the consecutive steps were not connected. On the other hand, if the successive steps in her procedure were canonically connected and she could complete her procedure canonically, the participant's participation in bondedness was coded as explorative.

In the substantiability, Elif's participation in the discourse was coded as ritualistic if she had difficulty in justifying any routine, performance, or narrative and constructing her own argument or if she justified any discourse by relying on intuition ("I don't know, I don't remember, I think so"); by relying on an authority (friend, expert, teacher, textbooks, etc.) or by citing previous task situations, class sessions, learning experiences ("That's what we saw in class, you told me, I heard it from my friend") it was coded as ritualistic. On the other hand, if Elif justified any routine, performance, or narrative by producing endorsed narratives, her participation was coded as explorative in substantiability.

In the performer's agentivity, Elif's participation in the discourse was coded as ritualistic if she had difficulty making independent decisions while performing the procedure in the task situation. However, her participation in the discourse was also coded as ritualistic if she felt the need to seek approval from others for the accuracy of her discourse and hesitated in her discourse. On the other hand, if Elif could make independent decisions while applying the procedure in the task situation, did not see anyone other than herself as an authority in this process, and seemed confident in her discourse, her participation is coded as explorative.

In the applicability, Elif's participation in the discourse was coded as ritualistic if she had difficulty in remembering and applying the routine in similar task situations in different environments and explorative if Elif applied the routine in a canonical way in a different environment, a different task situation, a different context in the task situation, and similar task situations with which she was familiar.

Validity and Reliability

For the validity and reliability of this qualitative research, credibility, transferability, dependability, and confirmability strategies were used (Lincoln & Guba, 1985). Long-term interaction, continuous observation, triangulation, and expert review strategies were used to enhance credibility. In this study, the first researcher had the opportunity to interact with the participants for a long time in the role of researcher-teacher and was able to observe the participants directly and continuously in the natural environment where the event took place. In addition, in this study, the triangulation strategy of data sources and data collection tools was used to increase the credibility of the findings. The data sources of the study consisted of semi-structured interviews, in-class and out-of-class unstructured observations, and written sources. Another strategy used to increase the credibility of the research was expert review. In the research, expert opinions were taken while preparing the survey forms and task situations.

In this study, the role of the researcher, how the participants were identified, information about the participants, how the focus group interviews were conducted, and data analysis were described in detail to ensure transferability, i.e., the transferability of research results to similar groups or settings. In addition, we increased transferability by selecting participants based on the purpose of the study.

To ensure the dependability of the research, the researcher asked questions using a similar approach in similar task situations, and the interviews were recorded. The study's raw data were transcribed and then replayed for data analysis. This study explained how the transcription and coding were done in detail for confirmability. In addition, all interviews were recorded during the research period, and the documents used by the participants were kept so they could be reaccessed when necessary.

Findings

When Elif's procedures for solving systems of equations and inequalities were examined, it was seen that her routine in the individual interview was a process-oriented ritual routine. Elif exhibited a ritual routine while solving systems of first-degree single-variable equations and inequalities, and this routine was coded as BG. Regarding the BG-coded routine, Elif saw it as her task to use the elimination method to find real number equivalents for the variables in the system of equations. Similarly, she saw it as her task to find the range of real numbers for the variables in the system of inequalities. While applying the BG-coded routine procedure, Elif's discourses were mostly about manipulating mathematical objects. Elif applied her procedure by searching for an answer to the question "How do I proceed?" in this process. Table 1 shows Elif's routine procedure for TS1.

Table 1

Elif's Procedure for the First Degree Two Variable Equation System (TS1)

What said	What did
511. E: By adding side to side [...] first of all here [pointing to the paper] I multiplied by two, this is ten x here minus ten x [pointing to realization 2].	
513. E: When I add them by equating them to each other [...] minus one, they cancel each other out.	
515. E: That's why I multiplied by two; I multiplied by five [pointing to realization 1] here since ten x minus ten x is still zero [...] I found the value of y here [pointing to realization 3], and then I can do the same thing [...] again using the elimination method for x . For example, if I multiply here by minus three, three y minus three y cancel each other out [pointing to realization 4] when adding, like that.	
525. E: For the solution set [...] I have to say it separately again, that is [...] The solution set for x is equal to two. I found x as two [pointing to realization 5], and it should be like this for y ; I found y as minus one [pointing to realization 3] [...] I think the solution set should be like this [pointing to realization 6] because if I write both of them in the same thing, it will not work. After all, it will be both two and minus one for x and both two and minus one for y .	

Here, Elif has started the procedure by adding equations together. While performing her procedure, she used demonstrative pronouns for mathematical objects and the verb “to cancel out” to equate the sum of the coefficients of the same variable to zero. However, while performing the solving procedures, Elif included expressions that include human actions, such as “I multiplied,” “I found ...” and “this is ...” in her statements. Elif completed her procedure with the discourse, “For the solution set [...] I have to say it separately again, that is [...] The solution set for x is equal to two. I found x as two [pointing to realization 5], and it should be like this for y ; I found y as minus one [pointing to realization 3] ... [525]”. These statements showed that she was unaware that the elements of the solution set of the equation system were ordered pairs.

Elif's discourse in Table 1 provides an example of ritualistic participation in terms of objectification of discourse. Elif's discourse is mostly about manipulating mathematical objects. She is process-oriented while demonstrating her routine and explains how she applies her procedure in her statements. During this process, statements such as “...I think the solution set should be like this... [525]” and her

inability to correctly determine the solution set show that Elif applies her procedure by rote. Therefore, she exhibited an example of ritualistic participation in terms of flexibility with this routine. Elif stated in her statements [525] that she was not aware that the solution set was an ordered pair while implementing her procedure. This caused her step in “realization 6” to be unrelated to her previous steps, and the participant’s BG-coded routine became an example of ritualistic participation in terms of bondedness. During this process, she justified her procedure by explaining how the procedure was performed based on her previous learning experiences ([513], [515]). Again, in this case, it constituted an example of ritualistic participation in terms of substantiability.

When Elif was asked to show the set of real number pairs that satisfy the inequality system in TS2 on the analytical plane, she applied the procedure by drawing lines in the coordinate system. Still, she answered the first researcher’s question, “For example, if there was no statement “shown on the analytical plane,” what solution method would you use? [556]” with the following statement: “Here I would use the elimination method. [557]” Elif’s routine procedure for solving the inequality system with the elimination method is as in Figure 1. During this process, the participant made the following discourses:

561. E: I multiply by two like this (*Figure 1-realization 1*) [...] minus four x minus two y is less than minus two [*by writing the inequalities in Figure 1-realization 2*] like this (*Figure 1-realization 2*) will cancel each other out [*as if crossing out the expressions $-2y$ and $2y$ with his pencil*], that is, this does not provide [...] Zero is less than uhm four (*Figure 1-realization 3*), you know, that is not possible [...] Excuse me, it actually does provide [*referring to the truth of the expression $0 < 4$*] but since x and y cancel each other out, I cannot find the solution set [...] that is, I cannot find the values of x and y . Therefore, the solution is the empty set.

Figure 1

Elif’s Procedure for Solving the Inequality System (TS2) Using the Elimination Method

Signifier

Realization 1..... $2x - y < -1$
 $4x + 2y < -6$

Realization 2..... $-4x - 2y < 2$
 $4x + 2y < -6$

Realization 3..... $0 < 4$

Elif’s discourse that she could solve systems of inequalities using the elimination method like systems of equations [557] and her discourse that the solution set would be the empty set because she could not determine a real number range for the variables

[561] showed that the participant applied her procedure by rote. When she was asked to solve TS2 aloud again, she used the procedure by drawing lines in the coordinate system. She said, “Here, first I accept this as a line, then I write zero for x and find y as one again, I write the equation that we know is correct [*showing the graphs*], and I try to draw it correctly” [569]. This confirmed that Elif performed her procedure rote and rigidly and showed that her participation was ritualistic in terms of flexibility. In response to the first researcher’s question, “Do you know why you did this? [570]”, the following discursive communication took place between the researcher and Elif:

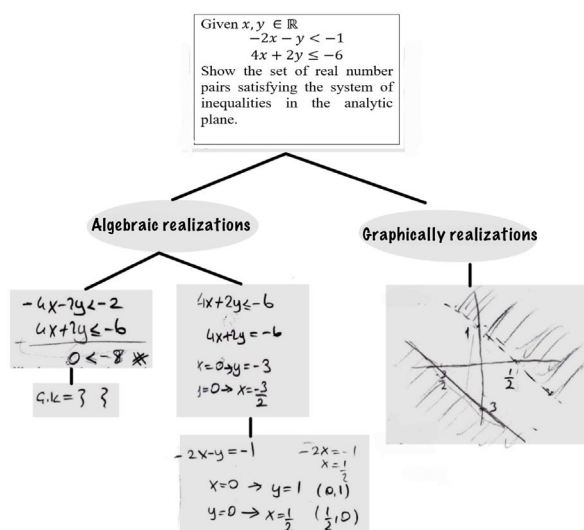
571. E: No, directly [...] in fact, I had watched this in the video before coming, it was done directly like this. For example, if it was less than [*showing the expression $-2x - y < -1$*] less than-equal [*showing the expression $4x + 2y \leq -6$*], I would draw a straight line like here [*it goes over the line $4x + 2y = -6$*], but since it is less than, I made it dotted [*it goes over the line $-2x - y = -1$*]

572. A: So, how do you decide which side to scan?

573. E: Here, if it provides the origin, I had to take the bottom or y [...] Sorry, when I put y on the opposite side since minus two x plus one is less than y , I take the top of y [*by scanning the right side of the line $-2x - y = -1$*], like this.

Here, Elif justified her routine with the discourse, “... I had watched this in the video; it was done directly ...” and relied on authority in this process. This situation revealed that Elif exhibited ritualistic participation in terms of substantiability. However, Elif’s personal discourse, including “...I would draw a straight line like here ... I made it dotted” and “... I had to take the bottom ... I take the top ...” showed that she could not make independent decisions in presenting arguments for her routine and tried to apply a rote procedure. Thus, Elif, who exhibited an example of ritualistic participation in terms of the performer’s agentivity, showed again with the procedure in Figure 1 that she applied her procedure in TS1 (Table 1) by rote.

Figure 2 shows the realization tree containing the different realizations in Elif’s procedure for TS2.

Figure 2*Realization Tree of Elif's Solution of Inequality System in TS2*

When the realization tree of Elif's TS2 in Figure 2 is examined, it is seen that although she confirms her discourse through different algebraic and graphical realizations, the algebraic realization she uses in the elimination method is not mathematically correct. In addition, Elif's discourses ([571], [573]) showed that she had difficulty in establishing logical relationships between algebraic realizations and graphical realizations. This situation was evidence that she had difficulty objectifying the discourse and provided examples of ritualistic participation in terms of objectification of the discourse. Errors in her procedure and not making the transitions between different realizations mathematically correct also revealed that Elif exhibited ritualistic participation in bondedness and flexibility.

Elif's discourses in the focus group interviews about the processes of solving equations and inequalities were mostly result-oriented. This result-oriented routine of Elif was coded as a exploration routine as OG. In this routine, she took to determine the elements that verify the system for equation and inequality systems (ordered pairs) as a task. In the focus group interviews, Elif applied her procedure by looking for an answer to the question "What do I want to achieve?" and produced mathematical narratives. Unlike the individual interview, Elif became aware that the solutions of the equation system were ordered in pairs. While talking about the solution set of the equation system in TS3, she stated the following: "Uhm [...] This is the common solution of the two equations and uhm [...] we need to express it as an ordered pair. In other words, the solution set is equal to four, zero [by writing the expression " $\zeta. K =$

$\{(4,0)\}$ ” [145]”. However, the following communication took place between Elif and her friend S1, who was having difficulty finding the solution to the system of equations while applying the procedure on the board:

36. E: Now I think it should be like this here [...] you found the x ’s here.
 37. S1: Yes.
 38. E: These have to be an ordered pair [...]. That’s why you found x .
 39. S1: Uh.
 40. E: Since it will be an ordered pair, you need to write x instead and find y .
 41. S1: Yes.
 42. E: The solution set will be x and y -ordered pairs.
 43. S1: It makes more sense [...] I think since one value of y provided one when I wrote both of them like this [...], they matched, I did that, but now they don’t [...] Ok, I understand.

Here, Elif was able to make independent decisions during the implementation of the procedure ([36], [38], [42]) and participated in the discourse in an authority role for her friend ([37], [43]). Therefore, her participation in the focus group interview was an example of explorative participation in terms of the performer’s agentivity. Unlike the individual interview, Elif became aware that the solution sets of first-degree two-variable equations were ordered pairs [42]. Here, Elif was result-oriented in her discourse and produced canonical narratives. Also, in the focus group interviews, she made the transition between algebraic and graphical realizations canonical. Elif, who had the opportunity to share her procedure for TS3 in Figure 3 on the board with the other participants, produced canonical narratives in this process. This situation presented examples of explorative participation in terms of the objectification of discourse:

64. S2: Well, I can give zero to x and find y , give zero to y and find x , or [...] well, there was a method, for example [...] what comes out when you give zero [...] we can try [...] maybe it can be done by trying like that.
 65. A: Maybe.
 66. E: Teacher, but the solution set of this [...] I mean, x and y are real numbers, or [...] there is an infinite number and an infinite number of points. *<She is talking about the solution set of the equation “ $x - 2y = 4$ ”>*
 ...
 74. A: But there must be a way to show this; what do you think this way is?
 75. S1: We can show it on the plane, but this is not the solution set, that is, what we show on the plane.
 76. E: We draw the graph.
 ...
 79. S1: Exactly. We are just drawing the graph to reach the solution set.
 80. A: We are showing it on the plane; what path would you follow?

81. E: Teacher, at first, I would give zero to x and find y ; I do this to find the points where the axes intersect and [...] show where that line passes.

...

83. E: If x is zero [by writing the expression $x=0$] uhm wait a minute zero minus two y is equal to four [by writing the expression $0 - 2y = 4$] two y minus four [by writing the expression $2y = -4$] y is equal to minus two [by writing the expression $y = -2$] Did I do it right? [By checking your work] uhm zero to zero point [by writing the expression $(0, -2)$], and I will give zero to y [by writing the expression $y = 0$]. x equals four directly [by writing the expression $x = 4$]. This is zero point to four [by writing the expression $(4,0)$], and its representation on the coordinate plane is as follows: [draws the coordinate system and marks the points he finds on the plane] a line like this [draws the line specified by the elements of the solution set of the equation $x - 2y = 4$ on the analytic plane].

...

86. A: What is the relationship between this line and the solution set?

87. S3: Could the solution set be one of the points inside the line?

88. E: All of them.

...

101. A: Okay, we drew it. [...] What is the relationship between the line we drew and the solution set?

102. E: Teacher, this line is the solution set of this equation. That is, it is shown on the graph. All of the points here [pointing to the $x - 2y = 4$ line].

...

116. E: Ok [...] x for zero y becomes eight [by writing the expression $x = 0 \Rightarrow y = 8$] from here to zero eight [by writing the expression $(0,8)$] y for zero x becomes minus four [by writing the expression $y = 0 \Rightarrow x = -4$]. I made a mistake, it becomes four [by writing $+4$] uhm, zero, four [by writing the expression $(4,0)$] The coordinate plane becomes like this [by drawing the coordinate plane] here is the x point here is y [she marks the points he finds on the plane and draws the line $y + 2x = 8$] like this. They intersect at a single point.

...

117. A: What is the relationship between this line graph you drew and the solution set?

...

120. E: Teacher, I think the direct line itself, the line [...], is already made up of infinite points; all of these infinite points are the solution set of this equation [pointing to the expression $y + 2x = 8$].

121. A: How are those points expressed?

122. E: That is, in the form of ordered pairs.

...

135. A: Now try solving it with the substitution method, Elif, you mentioned earlier.

136. E: Yes [...] the solution set of the two [...] I mentioned this point [pointing to the intersection] to find the point....

138. E: This is x equals four plus two y [...] I added two y to each side. [...] uhm then here [pointing to the expression $y + 2x = 8$], I will write this expression instead of x . [...] y plus two times four plus two y is eight [...] y plus eight plus four y is eight [...] that goes [crossing out the number 8] four y [...] minus y [...] wait a minute we need to subtract something from here [...] I mistakenly [rechecked] four plus eight is y plus eight.

...

143. E: Five y equals zero [by writing the expression $5y = 0$] y came from here as zero [by writing the expression $y = 0$] Okay, right, right. [She proceeds confidently] y came from here as zero. If y is zero, I can write it in any equation. Here, for example, zero plus two x equals eight [by writing the expression $0 + 2x = 8$] x comes from here as four [by writing the expression $x = 4$]

144. A: What does this mean?

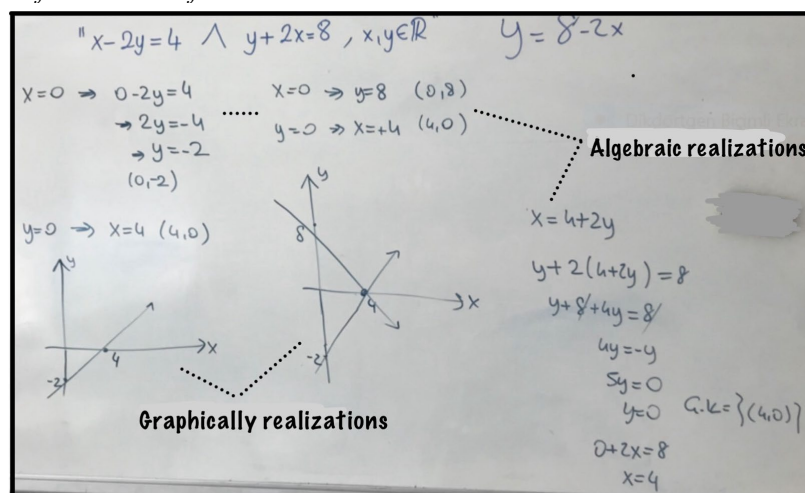
145. E: Uhh, this is the standard solution of the two equations, and [...] uh, we need to express it as an ordered pair. In other words, the solution set equals four and zero [by writing the expression $\zeta. K = \{(4,0)\}$]

...

149. S1: Oh! The point where they intersect is already their standard solution set [Realizing, being surprised].

Figure 3

Elif's Procedure for TS3



Here, Elif's awareness that the elements of the solution set of first-degree two-variable equations are ordered pairs ([66], [88], [120], [122]) enabled her to make transitions between algebraic and graphical realizations canonically ([77], [120], [136], [145]). Her awareness of the canonical transitions between algebraic and graphical realizations of the concept contributed to her displaying explorative participation in terms of objectification of discourse. Thus, this situation constituted an example of explorative participation in terms of objectification of discourse. When asked to show the elements of the solution set on an analytical plane in the individual interview, Elif applied a rote procedure (e.g., Table 1 and Figure 1) and drew their line graphs, and presented mathematical arguments for this procedure in the focus group interviews ([81], [120], [136], [145]). During this process, Elif responded confidently to the questions of the researcher and her colleagues (e.g., [80], [86], [87], [101], [117], [121], [144]) by producing canonical narratives ([81], [83], [88], [102], [120], [122], [145]). In response to the researcher's questions such as "... What is the relationship between the line we drew and the solution set? [101]", "What is the relationship between this line graph you drew and the solution set? [117]", "How are those points expressed? [121]" and "What does this mean? [144]", Elif constructed her argument by producing narratives such as "... this line is the solution set of this equation. That is, it is shown on the graph. All of the points here [*pointing to the $x - 2y = 4$ line*]. [102]", "... the line [...], is already made up of infinite points; all of these infinite points are the solution set of this equation [*pointing to the expression $y + 2x = 8$*]. [120]", "That is, in the form of ordered pairs. [122]" and "... this is the standard solution of the two equations, and [...] uh, we need to express it as an ordered pair. In other words, the solution set equals four and zero [*by writing the expression $\mathcal{C}.K = \{(4,0)\}$*] [145]". Thus, these findings, which provide examples of explorative participation in terms of substantiability, also revealed that the participant was able to proficiently make transitions between realizations. Her discourse also enabled her friends to make logical inferences ([79], [149]). This situation was evidence that she participated in the discourse as an authority. The fact that her discourse contributed to her friends making logical inferences, her role as an authority for her friends in the discourse, and her self-confidence in her discourses constituted an example of explorative participation in terms of the performer's agentivity. In addition, Elif's ability to make transitions between realizations in a canonical way helped her to apply her procedure mathematically correctly using different realizations, as in Figure 3, and her routine also presented an example of explorative participation in terms of both flexibility and bondedness.

Elif's discourse in the focus group interviews were mainly about mathematical objects and focused on results. She produced canonical narratives in TS4 and stated in her discourses in the individual interview that solving systems of first-degree two-variable inequalities using the elimination method was not canonical ([90]):

78. E: The reason why it doesn't satisfy them is that there is no expression like less than or equal to, that is, since there is no equality, we don't take that region [*draws the line in the air with his hand*] [...] that is, it doesn't satisfy that line.

<While talking about the solution set of the inequality " $y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}$ " in TS4>

...

90. E: But then they are both a system of inequalities, and I wanted to show them in a coordinate system.

...

114. E: Teacher, it is greater there. The reason is that we already thought of it as an equal, but since that symbol does not contain such a thing, it does not express that solution set, that's why. <When talking about the solution set of the inequality " $8 - 2x - y > 0, x, y \in \mathbb{R}$ " in TS4>

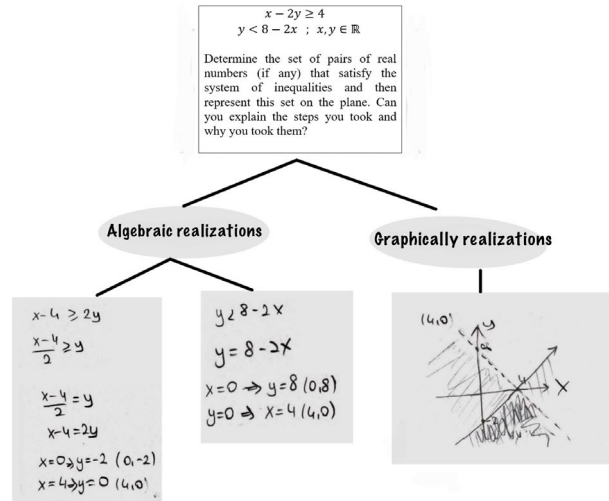
...

123. E: That point is on the line, so it does not satisfy (inequality) $< (0,8)$ while indicating that the ordered pair $8 - 2x - y > 0$ does not satisfy>

Unlike the individual interview, Elif justified the reason why the line graph drawn on the analytical plane is represented as a dashed line when the inequality contains " $<$ " or " $>$ " relations with canonical narratives ([78], [114], [123]). Elif's realization tree containing her procedures for TS4 is as in Figure 4.

Figure 4

Realization Tree of Elif's Solution of Inequality System in TS4



Here, when Elif's realization tree in Figure 4 is examined, she made the transitions that she had difficulty making in the individual interview (Figure 2) in a canonical way in the focus group interview. She also confirmed this routine with her discourses ([78], [114], [123]). In this case, the objectification of the discourse

presented findings that she exhibited explorative participation in terms of flexibility and bondedness.

In summary, regarding the objectification of discourse, the participant's BG-coded routine procedure is an example of ritualistic participation. In contrast, the OG-coded routine procedure is an example of explorative participation. While Elif's discourses in the BG-coded routine procedure were mostly about manipulating mathematical objects (Table 1 and [561], [571], [573]), in the OG-coded routine procedure, they were about mathematical objects and she produced canonical narratives ([66], [81], [102], [120], [145]). However, although Elif had difficulty in transitioning between different realizations of the concept in the BG-coded routine ([561], [571], [573]), she canonically made these transitions in the OG-coded routine ([77], [120], [136], [145]).

Regarding flexibility, Elif's BG-coded routine procedure is an example of ritualistic participation, while the OG-coded routine procedure is an example of explorative participation. In her BG-coded routine, she applied a rote procedure to determine the solution set of systems of equations and inequalities, as in Table 1 and Figure 1. Although she could make algebraic and graphical realizations of the task situations (Figure 2), she had difficulty establishing the relationships between these realizations in a canonical way. In contrast, Elif was able to determine the solution set of systems of equations and inequalities through her algebraic and graphical realizations in the focus group interviews and establish the mathematical relationship between these different procedures.

Regarding bondedness, she exhibited more explorative participation in the OG-coded routine procedure than the BG-coded routine procedure. In both routine procedures, Elif wrote equivalent open propositions and used the output of the previous step in her procedure as input for the next step. Unlike the focus group interview, she had difficulty correctly determining the solution set in the individual interview (realization 6 in Table 1). Despite this, Elif mostly canonically applied her operational procedures in individual and focus group interviews.

Regarding the substantiability, the participant's BG-coded routine procedure is an example of ritual participation, while the OG-coded routine procedure is an example of explorative participation; while justifying her procedure in the individual interview, she referred to her previous learning experiences (her memory) ([571]) and explained how she implemented the steps of the procedure ([571], [573]). In contrast, she justified her procedures by producing canonical narratives in the focus group interviews ([66], [81], [102], [120], [136], [145]).

Regarding the performer's agentivity, the participant's BG-coded routine was an example of ritualistic participation, while the OG-coded routine was an example of explorative participation. Since she tried to apply her procedure by rote in the individual interview, she had difficulty making independent decisions about how to proceed and end it. She had hesitations in determining the solution sets of equation

and inequality systems. She included expressions such as “... I think it should be like this”, “... it should be like this” and “I had to get ...” in her discourses. In contrast, Elif acted as an authority for her friends in the focus group interviews ([36], [38], [42]) and contributed to their logical inferences (S1’s discourses: [41], [75], [149]). The participant applied her procedure without authority (Figure 3 and Figure 4) and could make independent decisions during this process.

Regarding applicability, she demonstrated explorative participation in both routines. While Elif was able to proficiently re-apply her routine, which she applied in the survey form, in the individual interview, she was also able to successfully apply her routine in similar task situations in the focus group interviews.

Conclusion, Discussion and Recommendations

This study focused on participation in the mathematical discourse of a high school student in task situations involving systems of equations and inequalities. It also aimed to provide empirical examples of learning as routinization. Accordingly, how she participates in discourse in certain task situations through a routine in which the transition from ritual to exploration is seen is explained in objectification, flexibility, bondedness, substantiability, performer’s agentivity, and applicability.

In her individual interview, Elif practiced a rote procedure by imitating others in task situations involving systems of equations and inequalities ([571]) and displayed a process-oriented ritual routine. This form of participation in learning as routinization is seen as the first and necessary step for a new participant in discourse (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Katz, 2017; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008; Viirman & Jacobsson, 2023). During her individual interview, Elif mostly participated in the discourse in a ritualistic manner and while doing so, she reflected on which of her previous learning experiences she should use while applying her procedure and shared this in her discourse. ([561], [571], [573]). While Elif participated in discourse by imitating others, she also tried to make sense of what she did (her procedure). Sfard (2008) calls this type of imitation “thoughtful imitation.” By the term “thoughtful imitation,” Sfard (2008) refers to the process in which the learner, while trying to reproduce the expert’s action, constantly needs to ask herself which features of this action should be preserved and which ones should be modified according to the demands of a new situation. Elif used the learning experiences in the mathematics lessons conducted simultaneously with the research process in similar task situations and aimed to produce narratives. In learning as routinization, this effort of the participant in learning is considered necessary for transforming a ritual routine into an explorative routine (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020), and the findings of this study support this view. In her interview, Elif struggled to make meaningful transitions between different realizations while solving equations and inequality systems. At the same time, she continued to think about what she had done throughout the research process. This effort enabled her to produce narratives in the focus group interviews and to make meaningful transitions between different realizations. Thus, Elif could participate in the discourse more agency and move

independently and flexibly. Focusing on the meaning-making processes of low-achieving students regarding the concept of equation, Macchioni et al. (2023) also found slightly similar findings in their study. One of the two students in the study exhibited her routine more flexibly than the other and employed different realizations in different task situations involving equations while applying her procedure. According to the researchers (Macchioni et al., 2023), although this student still relied on rituals, this effort at flexibility made her participation in the discourse more explorative than the other student. Focusing on students' equation-solving processes of de-ritualization, Roberts and le Roux (2019) also reached similar findings, stating that low-achieving students rely on rituals, rigidly apply routine procedures, and cannot produce narratives during the solving process. Researchers who stated that students have little or no flexibility in procedural solutions have obtained very little evidence of explorative participation in learning processes of de-ritualization. The findings of this study contribute to studies that do not include sufficient evidence showing that any student has transitioned to explorative discourse in the context of equation and inequality concepts (Macchioni et al., 2023; Nisa et al., 2021; Roberts & le Roux, 2019) with the examples it provides regarding the transition from ritual participation to explorative participation. Unlike other studies, Elif's high academic success as a student provides the opportunity to present richer empirical examples regarding the transition process from ritual to explorative in this study. Therefore, the study's findings are consistent with studies (Essack, 2015) claiming that students exhibit more explorative participation as achievement increases and that an objectified discourse is associated with improved performance.

Investigating learning in mathematical discourse is equivalent to answering how routines emerge and how they improve later (Lavie et al., 2019; Sfard, 2008). Studies focusing on mathematical discourse (Lavie et al., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard, 2017) claim that in order for learning to progress, the individual must transform the ritual routines that they initially exhibit by imitating others into exploration routines that they can apply independently of others, flexibly and agency. However, according to Heyd-Metzuyanim et al. (2019), focusing on transitioning from ritualistic to explorative participation allows us to see the nature, scheme, speed, and underlying mechanisms of mathematics learning processes. The study's findings contribute to the relevant literature on the structure of learning as routinization by revealing that the participant's awareness of the structure and properties of the concept was effective in Elif's transition from ritual to exploration. With the emergence of awareness that the solution set of a first-degree two-variable equation is an ordered pair and that this ordered pair corresponds to a point in the plane ([36], [38], [40], [42]), Elif made transitions between different realizations of concepts canonically and produced canonical narratives for these transitions ([66], [81], [102], [120], [136], [145]). Having started to determine the elements of the solution set correctly and relatedly, Elif wrote the procedural steps in a more connected and canonical way and applied her procedure flexibly (Figure 3 and Figure 4). Thus, Elif's discourses started to

become objectified, and she participated in the discourse in a more explorative way by presenting mathematical arguments ([78], [81], [102], [114], [123]).

In summary, according to the study's findings, when students apply their routines by thinking about the routines of participants whom they take as authorities and more experienced than themselves, there may be a development in the routines of the students. In other words, for learning as routinization, individuals must participate in the discourse on the one hand, and on the other hand, they must make an effort to develop their routines from process-oriented to result-oriented. Another conclusion reached from the study's findings is that students' awareness of the structure and characteristics of mathematical concepts can enable them to objectify their discourse, enrich their narratives, present mathematical arguments, and thus transform their ritual routines into exploration routines. At the same time, students' awareness of the relationships between different realizations of mathematical concepts could increase the bondedness, flexibility, and applicability of their procedures and thus enable them to participate in the discourse more exploratively.

Recommendations

Since there are not enough studies on students' processes of de-ritualization, researchers can conduct studies similar to this study on students' processes of de-ritualization in the context of different algebraic or geometric concepts. In this way, it can contribute to the few discursive studies on how student learning takes place. Since it is not in this study, the transition from ritualistic participation to explorative participation for the factors independent of the structure of the concept was not investigated in detail in this study. As it is not in the context of this study, we did not investigate in detail what factors independent of the structure of the concept might be responsible for the transition from ritualistic participation to explorative participation. Therefore, researchers who aim to focus on students' processes of de-ritualization can present studies on the reasons for the transition from ritualistic participation to explorative participation in the context of related and different concepts. The elaboration of this transition, which shows that learning takes place, will both provide ideas to pre-service teachers and teachers in the teaching process of the concept and contribute to the related literature.

Since it can be concluded that students can participate in discourse more exploratively through their efforts and awareness of the structure and properties of a concept, various suggestions can be listed for teachers regarding the teaching of the concept in the course process. Teachers should provide opportunities and possibilities for students to participate in discourse in mathematics learning environments. In this process, teachers can include different realizations of the concept (verbal, algebraic, graphical, etc.) in the task situations they present to students. In solving equations and inequalities, they can realize their solutions in a way that includes algebraic and graphical realizations accompanied by verbal realizations, including canonical narratives about the concepts.



Denklem ve Eşitsizlik Kavramları Bağlamında Rutinleştirme: Bir Durum Çalışması¹

MAKALE TÜRÜ	Başvuru Tarihi	Kabul Tarihi	Yayınlanma Tarihi
Araştırma Makalesi	16.11.2024	20.05.2025	16.08.2025

Tuba Akçakoca ²
Milli Eğitim Bakanlığı

Gönül Yazgan Sağ ³
Gazi Üniversitesi
Ziya Argün ⁴
Gazi Üniversitesi

Öz

Bu çalışmanın amacı, ampirik örnekler sunarak, rutinleştirme bağlamında öğrenme süreçlerinin yapısını açığa çıkarmaktır. Bu doğrultuda bir lise öğrencisinin denklem ve eşitsizlik sistemlerini içeren görev durumlarında söyleme katılım biçimlerini nesneleştirme, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik özellikleri bağlamında incelenmiştir. Bu nedenle çalışma, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın katılımcısı Elif, bir devlet lisesinde sayısal ağırlıklı derslerle eğitim gören bir 11. sınıf öğrencisidir. Araştırmanın bulguları yarı-yapılandırılmış bireysel ve odak grup görüşmeleri aracılığıyla toplanmıştır. Çalışmanın bulguları Elif'in bireysel görüşmede söyleme başkalarını taklit etme yoluyla ritüel bir katılım sergilerken, odak grup görüşmelerinde katılımcının kavramların yapısına yönelik farkındalığının oluşmasıyla daha keşifsel bir katılım sergilediğini göstermiştir. Çalışmanın bulgularına göre, öğrencilerin kendilerinden daha tecrübeli olarak gördüğü katılımcıların rutinleri üzerine düşünerek kendi rutinini uyguladığında söyleme daha keşifsel bir şekilde katılabildiği görülmüştür. Ayrıca rutinleştirme bağlamında öğrenmenin gerçekleşebilmesi için bireyin bir yandan söyleme katılması, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermesi gerektiği tespit edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Matematiksel söylem, rutin, ritüel katılım, keşifsel katılım, denklem ve eşitsizlikler, lise öğrencileri

¹Bu çalışma Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Bölümünde, Prof. Dr. Ziya Argün ve Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ danışmanlığında yürütülen Tuba Akçakoca'nın doktora tezinden türetilmiştir.

²Sorumlu Yazar: Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı, Türkiye, E-posta: erturktuba06@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1346-0060>, <https://ror.org/00jga9g46>

³Doç. Dr., Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara/Türkiye, E-posta: gonulyazgan@gazi.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-7237-5683>, <https://ror.org/054xkpr46>

⁴Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara/Türkiye, E-posta: ziya@gazi.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-8101-7215>, <https://ror.org/054xkpr46>

Matematik eğitiminde öğrenmeyi temelde sosyal bir etkinlik olarak tanımlayan araştırmalar, anlamı ve düşünmeyi bu sosyal etkinliğin ürünleri olarak görmektedir (Ben-Zvi ve Sfard, 2007; Kieran ve diğ., 2001; Lerman, 2006; Moschkovich, 2010; Sfard, 2008). Sosyokültürel bu bakış açısına göre matematik öğrenimi bu sosyal etkinliklere katılımla gerçekleşmektedir (Wenger, 1998). Sfard'ın (2008) matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisi de, diğer sosyokültürel yaklaşımlara benzer bir şekilde, öğrenmeyi belirli bir topluluğun söyleminde yetkin bir katılımcı olmak olarak tanımlar (Weingarden ve diğ., 2019). Bu teoriye göre söylem, belirli bir topluluğa özgü iletişimsel bir etkinliktir ve matematik de bir söylemdir (Sfard, 2008). Düşünme ise kişinin kendisiyle ya da başkalarıyla olan iletişimdir (Sfard, 2008, 2012). Sfard'a (2012) göre bireyler, hem konuşarak hem de düşünerek matematiksel söyleme katılır ve söyleme katılımı, bireyin eylemlerinde görülür (Sfard, 2012). Bu nedenle bu bakış açısını benimseyen güncel çalışmalar, öğrenmeyi analiz etmek ve araştırmak için bireylerin söyleme katılımlarına odaklanır (Christiansen ve diğ., 2023). Bu bağlamda matematiksel söylemin bir ögesi olan rutinler, analiz birimi olarak alınır ve öğrenme bireyin eylemlerini rutinleştirme süreci olarak tanımlanır. Böylece öğrenme, bireyin zihindeki belirli bilişsel yapıları değiştirdiği bir süreç olmaktan ziyade belirli bir toplulukta söylemsel rutinlerindeki değişim süreci olarak görülür (Lavie ve diğ., 2019). Bu çalışmada da bir lise öğrencisinin denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında söyleme katılımı mercek altına alınarak rutinleştirme süreçleri izah edilecektir.

Rutinleştirme Bağlamında Matematiksel Öğrenme

Rutinler, görev ve prosedür çifti olarak tanımlanır (Lavie ve diğ., 2019; Sfard, 2018). Görev; katılımcının geçmiş öğrenme yaşantılarını göz önüne alarak, yeni görev durumunda ne yapması ya da yapmaması gerektiğine dair verdiği karardır. Prosedür ise katılımcının görevini gerçekleştirmek için uyguladığı işlem, yol, yöntem ve sembolik manipülasyonlar gibi eylemlerin tamamıdır. Bu nedenle bir rutin, görev durumuna ve görevi gerçekleştiren katılımcıya bağlıdır (Lavie ve diğ., 2019). Katılımcının kendisini bir şey yapmakla yükümlü gördüğü herhangi bir iş veya çözmekle yükümlü olduğu bir problem durumu görev durumu olarak isimlendirilir. Görev durumları belirli bir eylem türünün ortaya çıkarılması için görev belirleyici (araştırmacı, uzman, öğretmen vb.) tarafından kasıtlı olarak oluşturulabilir. Katılımcılar belirli bir görev durumunda, mevcut eylemlerini geçmişte öğrendikleri ve yaptıklarına göre modellemektedirler. Bu durum, rutin adı verilen eylem kalıplarıyla sonuçlanır (Lisarelli ve diğ., 2022). Aynı görev durumu için farklı katılımcılar; benzer prosedürleri, farklı görevleri amaçlayarak uygulayabilir. Örneğin, " $3x - 1 = 5$ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz" biçimindeki bir görev durumu için, bir katılımcı " $x = \text{sayı}$ " biçiminde bir ifade üretmeyi kendine görev edinebilirken, bir diğeri denklemde x yerine konulduğunda eşitliği sağlayan reel sayıyı arıyor olabilir (Lavie ve diğ., 2019).

Söylemsel rutinler amacına göre ritüel ve keşif olmak üzere ikiye ayrılır. Katılımcı prosedürünü diğer insanlarla bir bağ oluşturmak ve bu bağ sürdürmek amacıyla uyguluyorsa rutini *ritüel* rutin; matematiksel bir anlatı üretmek amacıyla

uyguluyorsa rutini *keşif* rutini olarak adlandırılır (Sfard, 2008). Anlatılar, rutinler gibi söylemin bir ögesidir ve matematiksel nesnelerin tanımlarını, nesneler arasındaki ilişkileri veya süreçleri içeren söz dizileridir. Matematiksel söylemde aksiyomlar, tanımlar, iddialar, ispatlar gibi anlatı türleri vardır (Sfard, 2008). Öğrenmenin ilerlemesi için bireyin başlangıçta başkalarına bağlı bir şekilde taklit ederek sergilediği ritüel rutinlerini; başkalarından bağımsız, esnek ve yetkin bir şekilde uygulayabildiği keşif rutinlere dönüştürmesi gerekir (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Tabach, 2019). Bu süreç *ritüelden keşfe* geçiş süreci (process of de-ritualization) olarak isimlendirilir. Bu geçişin gerçekleşebilmesi için bireylerin bir yandan söyleme katılmaları, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermeleri gerekir (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Tabach, 2022; Sfard, 2020). Katılımcıların söylemsel rutinlerle meşguliyetine bağlı olarak ritüel ve keşifsel katılım olmak üzere, amaçları ve katılım kuralları bakımından farklılık gösteren iki tür söylemsel katılım biçimi vardır (Baccaglini-Frank, 2021).

Ritüel ve Keşifsel Katılım

Ritüel katılımı bireyler, başkalarını (arkadaş, öğretmen vb.) memnun etmek ve başkalarıyla sosyal bir bağ kurmak amacıyla rutinini sergiler. Bu katılım biçiminde bireyler acemi bir katılımcı rolündedir ve bir otorite tarafından belirlenen prosedürleri taklit ederler veya katı bir şekilde takip ederler (Roberts ve le Roux, 2019; Sfard, 2008). Katılımcı prosedürünü uygularken süreç odaklıdır ve prosedürünü “Nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak uygulamaya çalışır (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Tabach, 2019). Katılımcının söylemleri çoğunlukla matematiksel nesnelerin sembolik manipülasyonu hakkındadır. Prosedürünü uygularken yeni ve bağımsız kararlar alamaz ve sıklıkla hafızaya ya da otoriteye (arkadaş, öğretmen, ders kitabı) başvurur (Baccaglini-Frank, 2021). Katılımcı rutinini farklı görev durumlarında uygulamada güçlük yaşar ve prosedürüne argüman sunarken belirli adımların atılması ve gerçekleştirilmesi ihtiyacına odaklanır (Nachlieli ve Tabach, 2022).

Keşifsel katılımı ise bireyler, matematiksel anlatılar üretmeyi amaçlayarak rutinini sergiler. Bu katılım biçiminde bireyler yetkin katılımcı rolündedir ve prosedürünü uygularken bağımsız kararlar alır ve herhangi bir otoriteye başvurma ihtiyacı hissetmez. Katılımcı prosedürünü uygularken sonuç odaklıdır ve prosedürünü “Neyi başarmak istiyorum?” sorusuna yanıt arayarak uygulamaya çalışır (Emre-Akdoğan ve Gürbüz, 2023; Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Tabach, 2019). Bu sebeple, katılımcının söylemleri süreçlerden ziyade matematiksel nesneler hakkındadır (Baccaglini-Frank, 2021). Prosedürünü başkalarını memnun etmek için değil kendi argümanlarını sunmak için yerine getirir. Keşifsel katılım; eylemlilik göstermeyi, bağımsız seçimler yapmayı ve prosedürleri esnek bir şekilde uyarlamayı içerir (Emre-Akdoğan ve Gürbüz, 2023; Heyd-Metzuyanım ve diğ., 2016; Nachlieli ve Tabach, 2019). Katılımcı kendi rutinine dair matematiksel argümanlar inşa edebilir ve prosedürünün uygulanması sürecinde matematiksel ispatlara yer verir (Lavie ve diğ., 2019; Sfard, 2008).

Matematik öğrenme ortamlarındaki rutinler nadiren sadece ritüel veya sadece keşiftir. Bunun yerine rutinler, ritüel ve keşfin uç durumlar olduğu bir spektrum üzerinde var olurlar. Dahası, ritüel rutin kullanımı genellikle öğrenmenin gerekli ilk adımları olarak görülür (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Katz, 2017; Sfard ve Lavie, 2005; Viirman ve Jacobsson, 2023). Katılımcı, karşılaştığı yeni bir görev durumunda devam edebilmek için başkalarını (uzman katılımcılar, öğretmenler vb.) taklit ederek yeni söyleme katılmaya çalışır (Sfard, 2007). Fakat bu bağlamdaki taklit, düşüncenin işe koşulmadığı bir taklit anlamına gelmez ve bu tür taklit “düşünerek taklit etme” olarak isimlendirir (Sfard, 2008). Düşünerek taklit eden katılımcı; performansını sürekli olarak başkalarının performansına göre ayarlarken, aynı zamanda uzman matematikçilerin yaptıklarının nedenleri üzerinde düşünür (Sfard, 2008). Böylece katılımcının ritüel bir rutini, bir keşif rutinine dönüşebilir. Lavie ve diğ. (2019) ritüelden keşfe geçiş sürecini analiz edebilmek için rutinlere ait altı özelliği göz önüne almayı önermiştir: söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik. Araştırmacılara göre rutinlerin ritüelden keşfe geçiş sürecinde herhangi bir ilerlemeden söz edilebilmesi için bu özelliklerin birinde veya daha fazlasında gelişim gözlemlenmelidir.

Söylemin nesneleştirilmesi; katılımcının söylemlerinde bir ismi (örneğin, denklem, eşitsizlik vb.) insani eylemlerden/faaliyetlerden bağımsız ve matematiksel bir nesneyi temsil eden bir şekilde kullanmaya başladığı süreç olarak tanımlanır (Sfard, 2008). Matematiksel söylemde nesneleştirme, süreçlerden bahsetmenin yerini matematiksel nesnelerden bahsetmenin aldığı hallerden biridir (Bacaglini-Frank, 2021). Sfard (2008) “matematiksel nesne”yi izah edebilmek için teorisinde gösterge ve gerçekleşme terimlerini kullanır. Matematiksel söylemde birincil nesne olarak işlev gören bir dizi kelimeye veya sembole gösterge adı verilir (Jayakody, 2015; Sfard, 2008). Herhangi bir görev durumu, bir problem, bir denklem, bir cebirsel ifade, bir sayı veya kavramların herhangi bir temsili, bir gösterge olabilir. Bir gerçekleşme ise bir göstergeyi başka bir birincil nesneyle eşleştiren prosedür ya da böyle bir prosedürün ürünü olarak tanımlanır (Sfard, 2008). Örneğin “ $7x + 4 = 5x - 2$ denkleminin reel sayılar kümesindeki çözümü” bir gösterge olarak düşünülürse bu göstergenin (olası) bir gerçekleşmesi analitik düzlemde çizilen $y = 7x + 4$ ve $y = 5x - 2$ doğrularının grafiklerinin kesim noktasının x koordinatı olabilir. Bu bağlamda “matematiksel bir nesne” de gerçekleşmeleriyle birlikte bir “gösterge” olarak tanımlanır (Sfard, 2008). Bir göstergenin tüm gerçekleşmeleri, hiyerarşik bir şekilde düzenlendiğinde buna “gerçekleşme ağacı” adı verilir (Jayakody, 2015; Sfard, 2008). *Esneklik*; katılımcının görev durumunda görevini yerine getirmede birden fazla yol kullanabiliyor olması anlamına gelir. *Bağlılık*; katılımcının prosedüründeki herhangi bir adımın çıktısını, sonraki adımlarda girdi olarak kullanması anlamına gelir. *Gerekçelendirme*; ortaya çıkan herhangi bir rutin, bir prosedür ya da bir anlatı hakkında akıl yürütmeyi, argümanlar sunmayı veya nedenini gösterebilmeyi içerir. *Katılımcının yetkinliği*, katılımcının bir rutini ne zaman başlatacağını, devam etmek için hangi kararların gerekli olduğunu, bunların ne zaman biteceğini bilmesini ve çözümü değerlendirebilmesini içerir. *Uygulanabilirlik* ise katılımcının rutinini farklı

çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında uygulayabilmesini içerir (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Tabach, 2022).

Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın amacı, lise öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında rutinleştirme süreçlerini incelemektir. Bu doğrultuda bir lise öğrencisinin denklem ve eşitsizlikleri içeren görev durumlarında matematiksel söyleme katılımının; söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik özellikleri bağlamında analizi okuyucuya sunulacaktır. İlgili literatür incelendiğinde matematik eğitiminde rutinleştirme bağlamında öğrenmeyi inceleyen çalışmaların çoğunlukla üniversite düzeyinde olduğu görülmüştür (Biza ve Nardi, 2023; Christiansen ve diğ., 2023; Karavi ve diğ., 2022; Liu ve Weingarden, 2022; Lipper ve Karavi, 2023; Viirman ve Jacobsson, 2023; Viirman ve Nardi, 2019). Lise düzeyinde yapılan çalışmaların (Akçakoca ve diğ., 2023; Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Macchioni ve diğ., 2023; Roberts ve le Roux, 2019) azlığı ise dikkat çekmiştir. Rutinleştirme bağlamında öğrenmeyi araştıran bu çalışmaların çoğu (Baccaglini-Frank, 2021; Biza ve Nardi, 2023; Christiansen ve diğ., 2023; Essack, 2015; Karavi ve diğ., 2022; Liu ve Weingarden, 2022; Lipper ve Karavi, 2023; Macchioni ve diğ., 2023; Roberts ve le Roux, 2019; Viirman ve Nardi, 2019) katılımcıların söyleme katılımlarına bahsi geçen altı özelliğin biri ya da birkaçı bağlamında bulgular sunmuştur. Baccaglini-Frank (2021), düşük başarılı iki lise öğrencisinin dijital öğrenme ortamlarında fonksiyon kavramına yönelik söylemlerini katılımcının yetkinliği ve nesneleştirme özellikleri bağlamında analiz etmiştir. Çalışmasında ritüel ve keşifsel katılım biçimlerine dair örnekler sunan araştırmacı, dijital öğrenme ortamlarının daha düşük başarılı öğrencilerin, söyleme daha keşifsel katılımlarını desteklediği sonucuna varmıştır. Lise öğrencilerinin fonksiyon kavramına yönelik söylemlerine odaklanan bir diğer çalışmada ise Essack (2015), katılımcının yetkinliği dışındaki beş özellik bağlamında öğrenci rutinlerini ritüel ya da keşifsel olarak karakterize etmiştir. Düşük ve yüksek başarılı 11. sınıf öğrencilerinin rutinlerini kıyaslayan Essack (2015), keşifsel katılımın öğrenci başarısıyla olumlu bir şekilde ilişkili olduğu sonucuna varmıştır. Macchioni ve diğ. (2023) ise düşük başarılı iki lise öğrencisinin denklem çözme süreçlerindeki söylemlerine odaklanmış ve söyleme katılımlarını esneklik, uygulanabilirlik, gerekçelendirme ve katılımcının yetkinliği bağlamında incelemişlerdir. Öğrencilerin matematiksel söylemlerindeki anlamlandırma süreçlerine odaklanan araştırmacılar, katılımcıların ritüel katılımdaki ısrarının, onların anlamlandırma süreçlerini olumsuz etkilediği sonucuna varmıştır. Roberts ve le Roux (2019) ise 8 ve 9. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemleri çözme süreçlerindeki söylemlerine nesneleştirme ve esneklik özellikleri bağlamında odaklanmıştır. Çalışmaları öğrencilerin keşifsel söyleme geçiş yaptığını gösteren yeterli kanıt içermese bile araştırmacılar, öğrencilerin söylemlerinin nasıl değiştirilebileceğine dair öğretmenlere öneriler sunmuştur. Lise öğrencilerinin söylemlerini ikinci dereceden eşitsizlikler kavramı bağlamında ele alan bir diğer çalışmada ise Akçakoca ve diğerleri (2023) öğrencilerin

rutinleri esneklik ve katılımcının yetkinliği bağlamında analiz edilmiştir. Araştırmanın bulguları öğrencilerin ilgili özellikler bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım sergilediğini ortaya koymuştur. Rutinleştirme bağlamında öğrenmeyi denklem veya eşitsizlik kavramları bağlamında az da olsa ele alan çalışmalar (Akçakoca ve diğ., 2023; Macchioni ve diğ., 2023; Roberts ve le Roux, 2019) incelendiğinde, genellikle düşük başarılı öğrencilerin söylemlerine odaklanıldığı (Macchioni ve diğ., 2023; Roberts ve le Roux, 2019) ve bu nedenle keşifsel katılıma dair yeterli bulgu sunulmadığı (Akçakoca ve diğ., 2023; Macchioni ve diğ., 2023; Roberts ve le Roux, 2019) görülmüştür. Bu çalışmada ise bir 11. sınıf öğrencisinin denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözme süreçlerine dair söylemleri, bahsi geçen altı özelliğin tamamı bağlamında detaylı bir şekilde analiz edilmektedir. Bu nedenle bu çalışmanın, lise öğrencilerinin rutinleştirme bağlamında öğrenmelerine ilgili kavram bağlamında hem ritüel hemde keşifsel katılıma yönelik zengin bir veri kaynağı sunacağı düşünülmektedir. Araştırmanın sorusu ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

“Bir 11. sınıf öğrencisinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait çeşitli görev durumlarındaki matematiksel söyleme katılımının türü (ritüel ya da keşifsel) nedir ve bu katılım nasıl gerçekleşmektedir?”

Yöntem

Araştırma Modeli

Bu çalışma, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Durum çalışması, güncel bir durumu derinlemesine ve gerçek dünya bağlamında araştıran ampirik bir yöntemdir (Yin, 2018). Bu yöntem gerçek yaşamın, güncel bağlam ya da ortamın içindeki bir durumun araştırılmasını gerektirmektedir (Creswell, 2014). Bu çalışmada derinlemesine bilgi toplanarak sonuçlar ortaya koymaya çalışılan durum, bir lise öğrencisinin matematiksel söylemindeki rutinleştirme süreçleridir.

Çalışma Grubu ve Araştırmanın Katılımcısının Belirlenmesi

Bu çalışmanın katılımcısı olan Elif (takma adı), bir devlet lisesinde sayısal ağırlıklı derslerle eğitim gören bir 11. sınıf öğrencisidir. Bu çalışmada sosyokültürel ortam ise Elif’in birinci araştırmacı (aynı zamanda matematik ders öğretmeni) ve dört sınıf arkadaşı ile birlikte olduğu sınıf dışı bir matematik çalışma ortamıdır. Elif’in de katılımcısı olduğu odak grup görüşmelerinin yürütüldüğü çalışma grubundaki 5 öğrenci, 23 kişilik bir sınıftan seçilmiştir. Çalışma grubunu belirlemek için uzman görüşü alınarak bir tarama formu oluşturulmuştur. Tarama formu, 23 kişilik sınıfa uygulanmadan önce 11. sınıf sayısal ders ağırlıklı öğrenim gören başka bir sınıftaki 2 öğrenciyle pilot uygulamaları yapılmıştır. Pilot uygulama, öğrencilerin tarama formunda yer alan görev durumlarının çözümleriyle uğraştığı ve sonrasında öğrenci yanıtları üzerine görüşmelerin yapıldığı bir süreci içermektedir. Pilot görüşmeler 35 dk sürmüştür ve bu görüşmeyle görev durumlarındaki eksiklik ve hatalar giderilmiş ve gerekirse eklemeler yapılmıştır. 9. sınıf “Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve

eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” (MEB, 2018) kazanımını içeren işleme yönelik 2 farklı görev durumunu içeren tarama formu, pilot uygulama sonrasında 23 kişilik sınıfta yer alan öğrencilere uygulanmış ve bu uygulama 20 dk sürmüştür. Öğrenci yanıtları birinci araştırmacı tarafından incelenerek notlar alınmıştır. Yapılan bu incelemelerde 23 öğrenciden çalışmaya gönüllü olmayanlar ile tarama formunda yer alan görev durumlarının çoğunu eksik ya da hatalı yanıtlayan öğrenciler zengin veri kaynağı oluşturmayacağı düşüncesiyle katılımcı olarak seçilmemiştir. Bu öğrenciler dışında geriye 9 öğrenci kalmıştır ve söylem analizinin zorluğundan dolayı bu sayısının azaltılması için bu 9 öğrenciyle bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bireysel görüşmelerde öğrenciler tarama formunda verdikleri yanıtları tek bir oturumda gerekçeleriyle açıklamaya çalışmıştır. Birinci araştırmacı bu süreçte içerik açısından öğrencilere herhangi bir yönlendirmede bulunmamış sadece öğrencilerden yanıtlarını gerekçelendirmesini, gerekirse tekrardan sesli bir şekilde çözümlerini paylaşmalarını istemiştir. Bireysel görüşmede elde edilen bulgular, aynı zamanda katılımcıların odak grup görüşmeleri öncesindeki rutinlerinin yapısını belirlemek amacıyla da kullanılmış ve araştırmanın ana verilerinin bir kısmını oluşturmuştur. Görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır ve bu bireysel görüşmelerin incelenmesi sonucunda araştırmanın odak grup görüşmelerinin 5 öğrenci ile yürütülmesi kararına varılmıştır.

Katılımcıların bireysel görüşmeleri analiz edildiğinde rutinlerinin tamamının ritüel rutin olduğu görülmüştür. Fakat katılımcılardan Elif, diğerlerinden farklı olarak odak grup görüşmesinde keşifsel bir katılım göstermiştir. Elif’in bulguları özellikle keşifsel katılım biçimine zengin bir veri kaynağı sunması ve böylece rutinleştirme bağlamında öğrenmeye dair bulgular içermesi sebebiyle bu çalışmada Elif katılımcı olarak alınmıştır. Çalışma grubunda yer alan diğer öğrenciler ise bulgular bölümünde Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 şeklinde kodlanmıştır. Araştırma sürecinde tüm katılımcılar hem matematik derslerine hem de odak grup görüşmelerine yüksek ilgi ve motivasyonla katılmışlardır. Elif, matematik ders başarı ortalaması 95’in üzerinde olan, birinci araştırmacının ders deneyimlerine göre çalışma grubundaki diğer arkadaşlarının çözemediği soruların çözümünde iletişim kurduğu ve yardım istediği akademik başarısı yüksek bir öğrencidir. Bu nedenle diğer katılımcılar için Elif söyleme katılımında arkadaşları için daha deneyimli bir katılımcı yani güvenilir bir otorite olma potansiyeline sahip bir öğrenci olarak araştırmaya dahil edilmiştir. Katılımcılardan Ö2’nin matematik ders başarı 95’in üzerinde iken, Ö1, Ö3 ve Ö4’ün matematik ders başarı ortalaması 80 ve 85 aralığında olan yani Elif göre akademik başarısı daha düşük olan öğrencilerdir.

Araştırmacı Roller

Sfard’a (2018) göre Commognitive perspektifle çalışma yapan bir araştırmacı, üzerinde çalıştığı söylemi “dışarıdan” olduğu kadar “içeriden” birinin bakış açısıyla da araştırmalıdır. Bu çalışmada birinci araştırmacı, araştırmacı-öğretmen rolünü (Tabach, 2006) üstlenerek öğrencilerin matematiksel söylemlerine araştırmacı olarak “dışarıdan”, öğretmen olarak “içeriden” bir bakış açısıyla inceleme fırsatı bulmuştur.

Birinci araştırmacı, çalışmasını 2021-2022 eğitim-öğretim yılında görev yapmakta olduğu bir devlet lisesindeki sayısal ders ağırlıklı bir sınıfta öğrenim gören 5 öğrencisiyle yürütmüştür. Birinci araştırmacı, çalışma yaptığı öğrencilerinin de bulunduğu sınıfın haftada 6'şar saat olmak üzere 9, 10 ve 11. sınıfta matematik derslerine girmiştir. Bu 3 yıllık eğitim-öğretim sürecinin 1,5 yılı (9. sınıfın ikinci dönemi ile 10. sınıf) Covid-19 salgını nedeniyle uzaktan eğitimle gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda birinci araştırmacı, bu çalışma boyunca hem öğretmen olarak derslerini hem de araştırmacı olarak görüşmelerini öğrencileriyle yüz yüze gerçekleştirmiştir. Çalışmanın yürütüldüğü süreçle eş zamanlı olarak araştırmacı matematik derslerinde 11. sınıf müfredatında yer alan "Denklem ve Eşitsizlikler" ünitesini işlemektedir. Yani birinci araştırmacı yüz yüze yapılan eğitim-öğretim sürecinde hem sınıf içi hem de sınıf dışı ortamlarda öğrencileriyle uzun süreli bir etkileşim içinde olmuş ve katılımcıları uzun soluklu gözlemleme fırsatı bulmuştur. Bu nedenle araştırmacının ham verileri birinci araştırmacı tarafından kodlanmıştır. İkinci ve üçüncü araştırmacılar ise çalışmanın görev durumlarının hazırlanması, yöntemin belirlenmesi ve uygulanması süreciyle verilerin analizinde uzman görüşünde bulunmuştur. Makalenin yazım sürecinde her üç yazarın da katkısı bulunmaktadır.

Veri Toplama Araçları ve Süreci

Araştırmanın veri toplama araçları, görev durumlarının yer aldığı tarama formu, yarı-yapılandırılmış bireysel ve odak grup görüşmeleri ve bu görüşmelerde öğrencilere ait yazılı kaynakların tamamıdır. Bireysel görüşmelerle birlikte araştırmanın diğer verilerinin toplandığı odak grup görüşmeleri, öğrencilerin öğrenim gördüğü devlet lisesinde, katılımcıların birinci araştırmacıyla ve birbirleriyle (5 kişilik öğrenci grubu) etkileşim içinde oldukları sınıf dışı bir matematik öğrenme ortamında yürütülmüştür. Odak grup görüşmelerinde Elif, diğer arkadaşlarıyla bir masa etrafında yüzleri tahtaya ve araştırmacıya dönük bir şekilde konumlanmışlardır. Oturma düzeni öğrencilerin tercihi bırakılmış ve katılımcılar çoğunlukla çalışma ortamında masaya sağdan sola doğru Elif, Ö4, Ö3, Ö2 ve Ö1 olacak şekilde yerleşmişlerdir. Araştırma sürecinde yapılan bireysel görüşme ve odak grup görüşmeleri iki farklı kamerayla kayıt altına alınmıştır. Bireysel görüşmelerde kameranın biri katılımcıya diğeri katılımcının yazdıklarına dönük konumda yer almıştır. Odak grup görüşmesinde kameralardan biri katılımcıların yüzlerini ve yaptıklarını rahatça gören bir konumdan oturdukları masaya odaklı, diğeri ise yazılanları ve tahtaya kalkan katılımcıları rahatça gören bir konumdan tahtaya odaklı olacak şekilde ayarlanmıştır.

Görev Durumlarının Hazırlanması ve Uygulanması

Bu çalışmada hem çalışma grubunun belirlenmesi hem de yarı-yapılandırılmış bireysel görüşmelerin yürütülmesinde kullanılan tarama formu ile odak grup görüşmeleri için belirlenen görev durumları, 9. sınıf denklem ve eşitsizlik kazanımlarına yönelik (MEB, 2018) hazırlanmıştır. Hem bireysel görüşmede hem de odak grup görüşmelerinde benzer görev durumlarına yer verilmiştir. Böylece katılımcının rutininde ritüelden keşfe bir geçişin olup olmadığını gözlemlemek

amaçlanmıştır. Görev durumları hazırlanırken uzman görüşüne başvurulmuş ve uygulanmadan önce ise çalışma grubunun seçildiği sınıftan farklı bir sınıftaki 2 öğrenciyle pilot çalışma yapılmıştır. Pilot uygulamalar görev durumlarındaki öğrenci anlamalarına yönelik eksikliklerin giderilmesi amacıyla gerçekleştirilmiş ve sonrasında gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Bireysel görüşme, odak grup görüşmelerinden önce gerçekleştirilmiş ve bu görüşmede Elif'ten tarama formuna verdiği yanıtları tek bir oturumda gerekçeleriyle açıklaması istenmiştir. Bu oturum yaklaşık 40 dk sürmüş ve birinci araştırmacı bu süreçte içerik açısından herhangi bir yönlendirmede bulunmamış, sadece Elif'ten yanıtlarını gerekçelendirmesini, gerektiğinde çözümlerini tekrar sesli bir şekilde paylaşmasını istemiştir. Bireysel görüşme bulguları, aynı zamanda katılımcının odak grup görüşmeleri öncesindeki rutinlerinin yapısını belirlemek amacıyla da kullanılmıştır. Bireysel görüşmede Elif'in söylemsel katılımının incelendiği görev durumları ise aşağıdaki gibidir:

1. Görev Durumu 1 (GD1): $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

denklemler sisteminin çözüm kümesini yok etme metodunu kullanarak bulunuz.

2. Görev Durumu 2 (GD2): $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-2x - y < -1$$

$$4x + 2y \leq -6$$

eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

Odak grup görüşmeleri ise iki farklı oturumda gerçekleştirilmiş ve Elif bu süreçte diğer katılımcılarla etkileşim içinde olmuştur. Denklemler sisteminin içeren görev durumu ile ilgili yürütülen oturum yaklaşık 42 dk sürerken eşitsizlik sisteminin içeren görev durumu ile ilgili yürütülen oturum yaklaşık 21 dk sürmüştür. Odak grup görüşmeleri yürütülürken, görüşme öncesinde birinci araştırmacı tarafından katılımcılara yer ve saat bilgisi verilmiş ve birinci araştırmacı görüşme öncesinde çalışma ortamını hazır hale getirmiştir. Katılımcılar çalışma ortamında masa etrafında yüzleri tahtaya ve araştırmacıya dönük olacak şekilde istedikleri bir düzende oturduktan sonra, araştırmacı katılımcıları selamlamış ve kayıt sürecini başlatmıştır. Birinci araştırmacı görev durumlarını katılımcılara sunmadan önce; görev durumunu yanıtlamaları için yeterli sürenin sağlanacağına, yanıtlarındaki matematiksel doğruluktan ziyade içeriğinin önemli olduğuna ve görev durumuna dair daha önceki öğrenme yaşantılarını işe koşarak yanıtlarını paylaşımlarına dair hatırlatmalarda bulunmuştur. Böylece katılımcıların kendilerini rahat hissetmeleri sağlanarak zengin bir veri kaynağı elde edilmesi amaçlanmıştır. Sonrasında her bir görev durumu katılımcılara sırayla sunulmuş ve bir görev durumu hakkındaki katılımcı görevleri, tartışmalar ve paylaşımlar bitmeden diğer görev durumu katılımcılara

uygulanmamıştır. Bu çalışmada odak grup görüşmelerinin amacı, özgün katılımcı düşüncesini ortaya çıkarmak ve matematiksel iletişimlerini yakalamak olmuştur. Bu amaçla; oturumlarda her bir görev durumu için araştırmacı öncelikle ilgili görev durumunu içeren kağıtları katılımcılara dağıtmış ve görev durumuyla bireysel bir şekilde uğraşmalarını istemiştir. Her bir katılımcı görev durumunun çözümüyle hiçbir arkadaşıyla etkileşime girmeden, bireysel bir şekilde ortalama 3 ile 8 dakika arasında uğraşmıştır. Katılımcılara çözümle uğraşmaları için yeterli bir süre tanınmış ve katılımcılar çözümlerini tamamladığında araştırmacıya teslim etmiştir. Araştırmacı tüm katılımcılar çözümü tamamladığında görev durumlarındaki katılımcı yanıtlarını incelemiş ve araştırmaya zengin veri sunacağını düşündüğü bir akışa göre katılımcıları çözümlerini sesli bir şekilde paylaşmaları için tahtaya davet etmiştir. Bu aşamadan sonra katılımcıların birbirleriyle etkileşim içinde oldukları ve matematiksel söylemlerini paylaştıkları ve tartıştıkları bir ortamda odak grup görüşmeleri devam etmiştir. Bir görev durumuyla ilgili katılımcıların paylaşımlarının devam edip etmediği teyit edildikten sonra, yeni görev durumunun uygulanmasına geçilmiştir. Bu şekilde yürütülen odak grup görüşmelerine başlarken katılımcılara, görev durumundaki yanıtların herhangi bir değerlendirmeye tabi tutulmayacağı, düşüncelerinin ve çözümlerinin doğruluğundan ziyade paylaşımının önemli olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte katılımcılar görev durumlarının çözümleriyle uğraşırken acele ettirilmeden her bir katılımcıya gerekli süre tanınmıştır. Katılımcıların kendilerini rahatça ifade edebilmesi için hem tahtaya kalkıp paylaştığı düşüncelerine (matematiksel söylemlerine) hem de yazılı kaynaklardaki çözümlerine dair bir yönlendirme yapılmamıştır. Böylece katılımcılar için kişisel ve kişilerarası matematiksel iletişimi rahatça kurabilecekleri güvenli bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu süreçte katılımcı gözlemci (Adler ve Adler, 1998) bir rol üstlenen birinci araştırmacı gerektiğinde katılımcılara yönelttiği tetikleyiciler (sondalar) (Glesne ve Peskin, 1992) aracılığıyla katılımcılarla matematiksel iletişimi kurmaya ve katılımcıları keşif rutinlerinin kullanımına teşvik etmeye çalışmıştır.

Odak grup görüşmelerinde Elif'in söylemsel katılımının incelendiği görev durumları ise aşağıdaki gibidir:

$$3. \text{ Görev Durumu 3 (GD3): } x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$$

denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz. Bu kümeleri düzlemde gösteriniz. Ne gördüğünü paylaşır mısın?

$$4. \text{ Görev Durumu 4 (GD4): } x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x ; x, y \in \mathbb{R}$$

eşitsizlik sistemini sağlayan (varsa) reel sayı ikililerinin kümesini belirleyiniz ve sonra bu kümeyi düzlemde gösteriniz. Attığınız adımları ve bu adımları niçin attığınızı açıkla mısın?

Verilerin Analizi

Araştırmanın verileri katılımcıların eşzamanlı sözel ifadelerini (ne söylediğini), eylemlerini (ne yaptığını) ve çizimlerini (ne çizdiğini) içerecek şekilde transkript edilmiştir. Hem bireysel hem de odak grup görüşmelerindeki görev durumlarına ait katılımcı söylemlerinin transkripti yapılırken her bir satır numaralandırılmış ve ayrıca analiz esnasında aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

- A: Araştırmacı
- E: Elif
- Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4: Diğer katılımcılar
- GDs: s. Görev Durumu (s yerine görev durumunun numarası yazılacak)[...]: bir süre bekliyor
- [...]: bir katılımcı konuşurken yaptığı eylemler italik bir şekilde “...” lı kısımda yer alacak
- (...): bir katılımcı konuşurken başka bir katılımcının konuşmaya kısa süreli dahil olduğu konuşmaları italik bir şekilde “...” lı kısımda yer alacak
- <...>: bir katılımcı konuşurken diğer katılımcıların eylemleri ve durumları “...” lı kısımda ifade edilecek
- (x): Tahtaya yazılırken söylenenler
- (xx): Kağıda yazılırken söylenenler
- Kelimenin sonundaki “-“ işareti katılımcının konuşmasının yarım kaldığını belirtmek için kullanılacak

Verilerin Kodlanması

Araştırmanın ham verilerinin transkripti tamamlandıktan sonra öncelikle Elif’in ilgili görev durumlarına ait söylemsel rutinlerinin yapısı açığa çıkarılmış ve katılımcının rutinlerini ne zaman ve nasıl sergilediğine odaklanılmıştır. Böylece Elif’in denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı rutinlerinin türü (ritüel ya da keşif) belirlenmiş ve bu rutinler kodlanmıştır. Elif’in bireysel görüşmeye ait bir rutini “BG”, odak grup görüşmelerine ait bir rutini “OG” biçiminde kodlanmıştır. Sonrasında veriler tekrar izlenerek, katılımcının bu rutinleri aracılığıyla ilgili görev durumlarında matematiksel söyleme katılım biçiminin ne türden ve nasıl olduğu belirlenmiştir. Bu belirlemede, Elif’in rutinlerle nasıl meşgul olduğu ve katılım biçimlerinin ayırt edici özellikleri dikkate alınmıştır. Böylece Elif’in söyleme katılımının nesneleştirme, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından nasıl gerçekleştiği izah edilmiştir. Katılımcıların rutinleri aracılığıyla söyleme katılımları incelenirken, katılımcıların matematiksel nesneler hakkındaki söylemleriyle birlikte söyleme katılanlar hakkındaki söylemleri de dikkate alınmıştır.

Söylemi nesneleştirme bağlamında katılımcının söyleme katılımı, onun söylemi çoğunlukla matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında ise ritüel olarak kodlanmıştır. Katılımcının söylemleri çoğunlukla matematiksel nesneler hakkında ve bu nesnelere dair kanonik anlatıları içeriyorsa katılımcının söyleme katılımı keşifsel olarak kodlanmıştır. Burada “kanonik” kelimesi katılımcının söyleminin uzman matematik topluluğu tarafından kullanılan prosedürler ve anlatılarla örtüşmesi yani matematiksel olarak “doğru” olması anlamında kullanılmıştır. Ayrıca katılımcı kavramın farklı gerçekleştirmeleri arasındaki geçişleri yapamıyor ya da yapmada güçlük çekiyorsa katılımı söylemin nesneleştirilmesi bağlamında ritüel; eğer bu geçişleri ustaca yapabiliyor ve matematiksel ilişkileri kurabildiğine dair kanonik anlatılar üretbiliyorsa katılımı keşifsel olarak kodlanmıştır.

Esneklik bağlamında katılımcının söyleme katılımı, prosedürünü ezbere ve katı bir çözüm yoluyla gerçekleştirirse ritüel olarak kodlanmıştır. Buna karşılık katılımcı farklı çözüm yollarını kanonik bir şekilde (tam ve doğru) kullanarak prosedürünü gerçekleştirirse katılımı esneklik bağlamında keşifsel olarak kodlanmıştır.

Bağlılık bağlamında katılımcının söyleme katılımı, prosedüründeki adımları herhangi bir matematiksel hata içeriyorsa ya da ardışık adımları birbiriyle bağlantılı değilse ritüel olarak kodlanmıştır. Buna karşılık prosedüründeki ardışık adımları birbiriyle kanonik bir şekilde bağlantılı ve prosedürünü kanonik bir şekilde tamamlayabiliyorsa bağlılık bağlamında katılımcının katılımı keşifsel olarak kodlanmıştır.

Gerekçelendirme bağlamında katılımcının söyleme katılımı, katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı gerekçelendirmede ve kendi argümanını inşa etmede güçlük yaşarsa ya da herhangi bir söylemini sezgilerine dayanarak (“bilmiyorum, hatırlamıyorum, öyle olduğunu düşünüyorum” gibi ifadelerle); bir otoriteye güvenerek (arkadaş, uzman, öğretmen, ders kitapları, vb.) ya da önceki görev durumlarını, ders oturumlarını, öğrenme tecrübelerini kaynak göstererek (“derste öyle gördük, siz söylediniz, arkadaşımın duydum” gibi ifadelerle) gerekçelendirirse ritüel olarak kodlanmıştır. Buna karşılık, katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı onaylanmış anlatılarla üretmek gerekçelendirirse katılımı gerekçelendirme bağlamında keşifsel olarak kodlanmıştır.

Katılımcının yetkinliği bağlamında katılımcının söyleme katılımı, katılımcı görev durumunda prosedürü uygularken bağımsız kararlar almada güçlük çekerse ritüel olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte katılımcı söyleme katılırken başkalarından söylemlerinin doğruluğu için onay isteme ihtiyacı hisseder ve söylemlerinde tereddüt eder ve duraksamalar yaşarsa da katılımı ritüel olarak kodlanmıştır. Buna karşılık, katılımcı görev durumunda prosedürü uygularken bağımsız kararlar alabiliyor ve bu süreçte kendisi dışında hiç kimseyi otorite olarak görmüyorsa ve söylemlerinde kendinden emin gözüküyorsa katılımı keşifsel olarak kodlanmıştır.

Uygulanabilirlik bağlamında katılımcının söyleme katılımı, katılımcı rutinini farklı çalışma ortamlarında benzer görev durumlarını hatırlamakta ve uygulamakta

güçlük yaşarsa ritüel; katılımcı rutinini, farklı çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında kanonik bir şekilde uygularsa keşifsel olarak kodlanmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Bu nitel araştırmanın geçerlik ve güvenirliliği için inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlılık ve teyit edilebilirlik stratejileri kullanılmıştır (Lincoln ve Guba, 1985). İnandırıcılık için artırmada uzun süreli etkileşim, sürekli gözlem, çeşitleme (triangulation) ve uzman incelemesi stratejileri kullanılmıştır. Bu çalışmada birinci araştırmacı, araştırmacı-öğretmen rolünde katılımcılarla uzun süreli etkileşim halinde olma fırsatı bulmuş ve olayın gerçekleştiği doğal ortamda katılımcıları doğrudan sürekli gözlemleyebilmiştir. Bununla birlikte bu çalışmada bulguların inandırıcılığını artırmak için veri kaynaklarının ve veri toplama araçlarının çeşitlemesi stratejisi kullanılmıştır. Araştırmanın veri kaynaklarını yarı-yapılandırılmış görüşmeler, ders içi ve ders dışı yapılandırılmamış gözlemler ile yazılı kaynaklar oluşturmuştur. Araştırmanın inandırıcılığını artırmada kullanılan bir diğer strateji ise uzman incelemesidir. Araştırmada tarama formları ve görev durumları hazırlanırken uzman görüşü alınmıştır.

Aktarılabilirlik yani araştırma sonuçlarının benzer gruplara ya da ortamlara transfer edilebilmesi için bu çalışmada araştırmacının rolü, katılımcıların nasıl belirlendiği, katılımcılara ait bilgiler, odak grup görüşmelerin nasıl yapıldığı ve veri analizi detaylı bir şekilde betimlenmiştir. Bununla birlikte araştırmanın amacına uygun bir şekilde katılımcı seçimi ile aktarılabilirlik artırılmaya çalışılmıştır.

Araştırmanın tutarlılığını sağlamak için benzer görev durumlarında araştırmacı sorularını benzer bir yaklaşımla sormuş ve görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Araştırmanın ham verileri transkript edildikten sonra veri analizi için tekrar izlenmiştir. Bu çalışmada teyit edilebilirlik için transkriptin ve kodlamanın nasıl yapıldığı detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca araştırma süresinde kayıt altına alınan tüm görüşmeler ve katılımcıların kullandıkları dokümanlar gerektiğinde tekrar ulaşabilmek adına saklanmıştır.

Bulgular

Elif'in denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürleri incelendiğinde, bireysel görüşmede katılımcının rutininin süreç odaklı bir ritüel rutin olduğu görülmüştür. Elif, birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken ritüel bir rutin sergilemiş ve bu rutini BG şeklinde kodlanmıştır. Katılımcı BG kodlu rutinde denklem sistemi için yok etme metodunu kullanarak değişkenler için bir reel sayı karşılığını bulmayı görev olarak görürken; eşitsizlik sisteminde değişkenler için bir reel sayı aralığı bulmayı görev olarak görmüştür. BG kodlu rutin prosedürünü uygularken katılımcının söylemleri çoğunlukla matematiksel nesnelerin manipülasyonu hakkında olmuş ve Elif bu süreçte "Nasıl ilerlerim?" sorusuna yanıt arayarak prosedürünü uygulamıştır. Tablo 1'de Elif'in GD1'e ait rutin prosedürü yer almaktadır.

Tablo 1

Elif'in Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine (GD1) Dair Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
511. E: Taraf tarafa toplayarak [...] yani öncelikle burada [kâğıdını işaret ederek] ikiyle çarpmışım burası on x oldu burada eksi on x [gerçekleşme 2'yi göstererek].	
513. E: Birbirine [...] eksilisine eşitleyerek topladığım zaman birbirlerini götürmesi için.	
515. E: O yüzden de iki ile çarpmışım, beşle çarpmışım [gerçekleşme 1'i göstererek] burada hani on x eksi on x daha sıfır olduğu için [...] burada y değerini buldum [gerçekleşme 3'ü göstererek] daha sonra aynı şeyi [...] tekrar yok etme metodunu kullanarak x için yapabilirim. Burayı mesela eksi üçle çarparsam üç y eksi üç y birbirini götürür [gerçekleşme 4'ü göstererek] toplarken, o şekilde.	Gösterge Gerçekleşme 1: $2/5x + 3y = 7$ $5/y - 2x = -5$ Gerçekleşme 2: $10x + 6y = 14$ $5y - 10x = -25$ $11y = -11$ Gerçekleşme 3: $y = -1$ Gerçekleşme 4: $5x + 3y = 7$ $-3y + 6x = 15$ $11x = 22$ Gerçekleşme 5: $x = 2$ Gerçekleşme 6: $x \rightarrow C.K. = \{2\}$ $y \rightarrow C.K. = \{-1\}$
525. E: Çözüm kümesi için [...] yine ayrı ayrı demem lazım yani [...] x için çözüm kümesi eşittir x 'i iki bulmuşum [gerçekleşme 5'i göstererek], y için de yine böyle olması lazım y 'yi de eksi bir [gerçekleşme 3'ü göstererek] bulmuşum [...] bence çözüm kümesi böyle olmalı [gerçekleşme 6'ya göstererek] çünkü ikisini de aynı şeye yazarsam, x için hem iki hem eksi bir, y için hem iki hem eksi bir olacağı için olmaz.	

Burada Elif taraf tarafa toplama yaparak prosedürünü başlatmıştır. Prosedürünü gerçekleştirirken, matematiksel nesneler için işaret zamirlerini ve aynı değişkene ait katsayıların toplamını sıfıra eşitleme işlemi için “götürmek/gitmek” fiilini kullanmıştır. Bununla birlikte Elif, çözme prosedürlerini uygularken söylemlerinde “çarpmışım”, “buldum/bulmuşum” ve “burası ... oldu” gibi insani eylem içeren ifadelerle yer vermiştir. Elif, prosedürünü “Çözüm kümesi için [...] yine ayrı ayrı demem lazım yani [...] x için çözüm kümesi eşittir x 'i iki bulmuşum [Tablo 1-gerçekleşme 5'i göstererek], y için de yine böyle olması lazım y 'yi de eksi bir [Tablo 1-gerçekleşme 3'ü göstererek] bulmuşum ... [525]” şeklindeki söylemiyle tamamlamıştır. Katılımcının bu söylemleri, onun denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarının birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığının olmadığını göstermiştir.

Elif'in Tablo 1'de yer alan söylemleri, söylemin nesneleştirilmesi bağlamında ritüel bir katılımın örneğini sunmaktadır. Katılımcının söylemleri çoğunlukla matematiksel nesneleri manipüle edilmesi hakkındadır. Elif, rutinini sergilerken süreç odaklıdır ve söylemlerinde prosedürünü nasıl uyguladığını izah etmektedir. Bu süreçte “...bence çözüm kümesi böyle olmalı ... [525]” gibi ifadeleri ve çözüm kümesini doğru bir şekilde belirleyememesi Elif'in prosedürünü ezbere bir şekilde

uyguladığını göstermiştir. Bu nedenle katılımcı bu rutiniyle esneklik bağlamında ritüel bir katılım örneği sergilemiştir. Katılımcı prosedürünü uygularken çözüm kümesinin birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığı olmadığını söylemlerinde [525] belirtmiştir. Bu durum onun “gerçekleşme 6” daki adımının bir önceki adımlarıyla bağlantılı olmamasına sebep olmuştur ve katılımcının BG kodlu rutini bağlılık bağlamında ritüel bir katılıma örnek olmuştur. Katılımcı bu süreçte prosedürünü önceki öğrenme tecrübelerine dayanarak prosedürün nasıl gerçekleştiğini izah ederek ([513], [515]) gerekçelendirmiştir. Yine bu durumda gerekçelendirme bağlamında ritüel katılıma bir örnek teşkil etmiştir.

Elif GD2’de eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde göstermesi istendiğinde koordinat sisteminde doğruları çizerek prosedürü uygulamış olsa da birinci araştırmacının “Mesela burada analitik düzlemde gösterin ifadesi olmasaydı, nasıl bir çözüm yolu kullanırdın? [556]” şeklindeki sorusunu “Burada yok etme metodunu kullanırdım. [557]” şeklindeki söylemiyle yanıtlamıştır. Elif’in yok etme metoduyla eşitsizlik sistemini çözdüğü rutin prosedürü ise Şekil 1’deki gibidir. Bu süreçte katılımcı aşağıdaki söylemlerde bulunmuştur:

561. E: Şöyle iki ile çarparım (Şekil 1-gerçekleşme 1) [...] eksi dört x eksi iki y küçüktür eksi iki [Şekil 1-gerçekleşme 2’de yer alan eşitsizlikleri yazarak] böyle (Şekil 1-gerçekleşme 2) olacağı için birbirini götürcek [kalemiyle $-2y$ ve $2y$ ifadelerinin üzerini çizer gibi yaparak] yani bu da sağlamaz [...] Sıfır küçüktür ııı dört (Şekil 1-gerçekleşme 3) hani, olmaz [...] Pardon oluyor, aslında sağlıyor [$0 < 4$ ifadesinin doğrulunu kastederek] ama x ve y ’ler birbirini götürdüğü için çözüm kümesini bulamam [...] yani x ve y değerlerini bulamam. Bu yüzden çözüm boş küme.

Şekil 1

Elif’in Eşitsizlik Sistemini (GD2) Yok Etme Metoduyla Çözme Prosedürü

Gösterge
⋮

Gerçekleşme 1..... $2 \cdot (-2x - y) < -1$
 $4x + 2y \leq -6$

Gerçekleşme 2..... $-4x - 2y < -2$
 $4x + 2y \leq 6$

Gerçekleşme 3..... $0 < 4$

Elif’in eşitsizlik sistemlerini de denklem sistemleri gibi yok etme metodunu kullanarak çözebileceğini ifade etmesi [557] ve değişkenler için birer reel sayı aralığı

belirleyemediği için çözüm kümesinin boş küme olacağını belirtmesi [561] katılımcının prosedürünü ezbere bir şekilde uyguladığını göstermiştir. Katılımcıdan GD2'yi tekrar sesli bir şekilde çözmesi istendiğinde ise koordinat sisteminde doğruları çizerek prosedürü uygulamış ve “Burada önce bunu bir doğru olarak kabul ediyorum, sonra x için sıfır yazıp y 'yi yine bir buluyorum, bildiğimiz hani doğru denklemi yazıyorum [*grafikleri göstererek*] doğru çizmeye çalışıyorum” [569] söyleminde bulunmuştur. Bu durum Elif'in prosedürünü ezbere ve katı bir şekilde sergilediğini doğrulamış ve katılımının esneklik bağlamında ritüel olduğunu göstermiştir. Birinci araştırmacının “Peki neden böyle yaptığını biliyor musun? [570]” sorusu üzerine araştırmacıyla Elif arasında aşağıdaki söylemsel iletişim gerçekleşmiştir:

571. E: Hayır direkt yani [...] hatta bunu gelmeden önce videoda izlemiştim, direkt bu şekilde yapılmıştı. Yani mesela küçüktür var [$-2x - y < -1$ *ifadesini göstererek*] küçük-eşittir [$4x + 2y \leq -6$ *ifadesini göstererek*] olsaydı buradaki gibi düz çizgi çekecektim [$4x + 2y = -6$ *doğrusunun üzerinden geçiyor*] ama küçük olduğu için hani noktalı noktalı yaptım [$-2x - y = -1$ *doğrusunun üzerinden geçiyor*]

572. A: Peki ne tarafı tarayacağına nasıl karar veriyorsun?

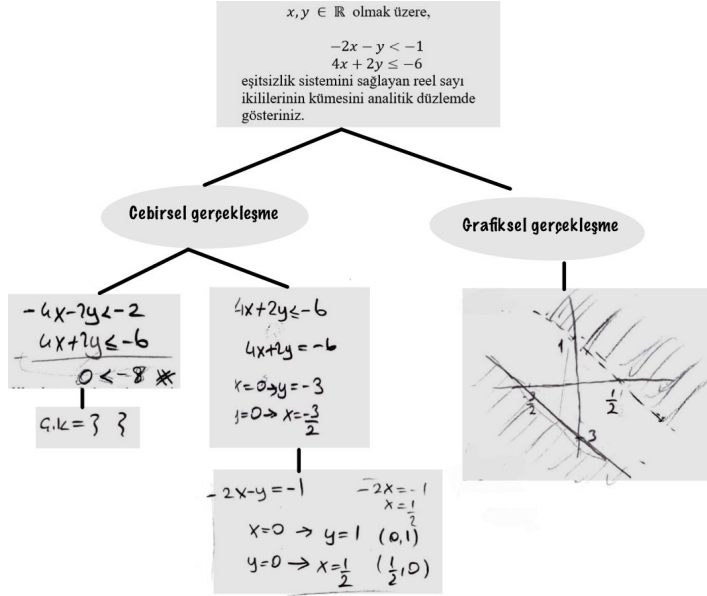
573. E: Burada orijini sağlıyorsa altını almam gerekiyordu ya da y 'yi [...] pardon y 'yi karşı taraf attığım zaman eksi iki x artı bir küçüktür y olduğu için y 'nin yukarısını alıyorum [$-2x - y = -1$ *doğrusunun sağını tarayarak*] yani bu şekilde.

Burada Elif, rutinini “...videoda izlemiştim, direkt bu şekilde yapılmıştı. ...” söylemiyle gerekçelendirmiş ve bu süreçte bir otoriteye güvenmiştir. Bu durum Elif'in gerekçelendirme bağlamında ritüel bir katılım sergilediğini ortaya koymuştur. Bununla birlikte Elif'in “... buradaki gibi düz çizgi çekecektim ... olduğu için hani noktalı noktalı yaptım” ve “... altını almam gerekiyordu ... yukarısını alıyorum ...” biçimindeki kişisel söylemlerini de içeren söylemleri, onun rutinine argüman sunmada bağımsız kararlar alamadığını ve ezbere bir prosedürü uygulamaya çalıştığını göstermiştir. Böylece katılımcının yetkinliği bağlamında ritüel bir katılım örneğini sergileyen Elif, GD1'deki prosedürünü de (Tablo 1) ezbere bir şekilde uyguladığını Şekil 1'deki prosedürüyle tekrar göstermiştir.

Şekil 2'de ise Elif'in GD2 için uyguladığı prosedüründeki farklı gerçekleştirmelerin yer aldığı gerçekleştirme ağacı yer almaktadır.

Şekil 2

Elif'in GD2'deki Eşitsizlik Sistemi Çözümüne Ait Gerçekleşme Ağacı



Elif'in GD2'ye ait Şekil 2'deki gerçekleşme ağacı incelendiğinde, katılımcının cebirsel ve grafiksel olmak üzere farklı gerçekleştirmeler aracılığıyla söylemini onayladığı görülsede, yok etme metodunu kullandığı cebirsel gerçekleştirmesinin matematiksel olarak doğru olmadığı görülmüştür. Ayrıca katılımcının söylemleri ([571], [573]), onun cebirsel gerçekleştirmeler ile grafiksel gerçekleşme arasındaki mantıksal ilişkileri kurmada güçlük yaşadığını göstermiştir. Bu durum onun söylemi nesneleştirmede güçlük yaşadığına dair bulgular olmuş ve söylemin nesneleştirilmesi bağlamında ritüel katılımın örneklerini sunmuştur. Katılımcının prosedüründeki hatalı işlemler ve farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri matematiksel olarak doğru yapamaması aynı zamanda hem bağlılık hem de esneklik bağlamında da Elif'in ritüel bir katılım sergilediğini ortaya koymuştur.

Elif'in odak grup görüşmelerindeki söylemleri incelendiğinde ise katılımcının denklem ve eşitsizlikleri çözme süreçlerine dair söylemlerinin çoğunlukla sonuç odaklı olduğu görülmüştür. Elif'in sonuç odaklı bu rutini keşif rutini olarak OG şeklinde kodlanmıştır. Katılımcı bu rutininde denklem ve eşitsizlik sistemleri için sistemi doğrulayan elemanları (sıralı ikililer) belirlemeyi görev olarak görmüştür. Elif, odak grup görüşmelerinde prosedürünü "Neye ulaşmak istiyorum?" sorusuna yanıt arayarak uygulamış ve matematiksel anlatılar üretmiştir. Bireysel görüşmeden farklı olarak Elif'in denklem sisteminin çözümlerinin birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığının oluştuğu gözlemlenmiştir. Katılımcı, GD3'te yer alan denklem

sisteminin çözüm kümesi hakkında konuşurken “İ1 [...] bu da iki denklemin ortak çözümü ve İ1 [...] sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [“Ç. $K = \{(4,0)\}$ ” ifadesini yazarak]. [145]” biçimindeki ifadeleriyle belirtmiştir. Bununla birlikte Elif ile tahtada prosedürünü uygularken denklem sisteminin çözümünü bulmada güçlük yaşayan arkadaşı Ö1 arasında aşağıdaki gibi bir iletişim de gerçekleşmiştir:

36. E: Şimdi burada şöyle olması gerekiyor bence [...] burada x 'leri buldun ya.
 37. Ö1: Evet.
 38. E: Bunlar bir sıralı ikili olmak zorunda [...] o yüzden de x 'i buldun.
 39. Ö1: Hımm.
 40. E: Sıralı ikili olacağından x 'i yerine yazıp y 'yi bulman lazım.
 41. Ö1: Evet.
 42. E: x, y sıralı ikilileri olacak çözüm kümesi.
 43. Ö1: Daha mantıklı [...] sanırım ben y nin bir değeri biri sağladığı için ikisini yazınca böyle [...] ikisi denk geldi öyle yaptım ama şimdi yok [...] tamam anladım.

Burada Elif'in prosedürün uygulanması sürecinde bağımsız kararlar alabildiği ([36], [38], [42]) ve arkadaşı için bir otorite rolünde ([37], [43]) söyleme katıldığını görülmüştür. Bu nedenle Elif odak grup görüşmesindeki bu katılımı katılımcının yetkinliği bağlamında keşifsel katılımın örneği olmuştur. Bireysel görüşmeden farklı olarak Elif'in birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümelerinin birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığının oluştuğu görülmüştür [42]. Burada Elif, söylemlerinde sonuç odaklı olmuş ve kanonik anlatılar üretmiştir. Bununla birlikte odak grup görüşmelerinde cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeler arasındaki geçişi kanonik bir şekilde yapmıştır. GD3'e dair Şekil 3'teki prosedürünü tahtada diğer katılımcılarla paylaşma fırsatı bulan Elif, bu süreçte kanonik anlatılar üretmiştir. Bu durum söylemin nesneleştirilmesi bağlamında keşifsel katılımın örneklerini sunmuştur:

64. Ö2: İ1 x 'e sıfır verip y 'yi, y 'ye sıfır verip x 'i bulurum ya da [...] İ1 hani bir yöntem vardı ya mesela [...] sıfır verince ora ne çıkıyor [...] deneyebiliriz de [...] öyle denemeyle de belki olabilir.
 65. A: Olabilir belki.
 66. E: Hocam ama bunun çözüm kümesi [...] yani hani x ve y reel sayılar ya [...] bir sayı sonsuz tane ve sonsuz tane nokta var. <“ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşuyor>
 ...
 74. A: Ama bunu göstermenin bir yolu olmalı, sizce bu yol nedir?
 75. Ö1: Düzlemde gösterebiliriz ama bence bu çözüm kümesi değil yani düzlemde gösterdiğimiz şey.

76. E: Grafiğini çizmiş oluyoruz.

...

79. Ö1: Aynen, çözüm kümesine ulaşmamız için, sadece grafiğini çiziyoruz biz şu an.

80. A: Düzlemde gösteriyoruz, nasıl bir yol izlersin?

81. E: Hocam en başta x 'e sıfır verip y 'yi bulurum, bunu yapmamın sebebi aslında eksenleri kestiği noktaları bulup [...] o doğrunun geçtiği yeri göstermek.

...

83. E: x sıfır ise [$x = 0$ ifadesini yazarak] 111 bir dakika sıfır eksi iki y eşittir dört [$0 - 2y = 4$ yazarak] iki y eksi dört [$2y = -4$ ifadesini yazarak] y eşittir eksi iki [$y = -2$ ifadesini yazarak] Doğru yaptım herhalde? [İşlemimi kontrol ederek] 111 sıfıra eksi iki noktası [$(0, -2)$ ifadesini yazarak] bir de y 'ye sıfır vereceğim [$y = 0$ ifadesini yazarak]. O da x eşittir direkt dört olur [$x = 4$ ifadesini yazarak] Bu da dörde sıfır noktası [$(4, 0)$ ifadesini yazarak] bunu da zaten koordinat düzleminde gösterimi şöyle [koordinat sistemini çiziyor ve düzlemde bulunduğu noktaları işaretliyor] şöyle bir doğru olur. [$x - 2y = 4$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemde belirttiği doğruyu çiziyor]

...

86. A: Bu doğru ile çözüm kümesi arasında nasıl bir ilişki var?

87. Ö3: Çözüm kümesi doğrunun içindeki noktalardan biri olabilir mi?

88. E: Hepsi.

...

101. A: Tamam, çizdik. [...] Çizdiğimiz doğru ile çözüm kümesi arasındaki ilişki ne?

102. E: Hocam bu doğru aslında bu denklemin çözüm kümesi yani grafikte gösterilmiş. Buradaki noktaların [$x - 2y = 4$ doğrusunu göstererek] hepsi.

...

116. E: Tamam [...] x sıfır için y işte sekiz olur [$x = 0 \Rightarrow y = 8$ ifadesini yazarak] buradan sıfıra sekiz [$(0, 8)$ ifadesini yazarak] y sıfır için x eksi dört olur [$y = 0 \Rightarrow x = -4$ ifadesini yazarak] yanlış yaptım, dört olur [$+4$ yazarak] 111 şey dörde sıfır [$(4, 0)$ ifadesini yazarak] koordinat düzlemi de şöyle olur [koordinat düzlemi çizerek] şurası x noktası şurası y [düzlemde bulunduğu noktaları temsilen işaretliyor ve $y + 2x = 8$ doğrusunu çiziyor] bu şekilde. Tek bir noktada kesişiyorlar.

...

117. A: Şimdi yine bu çizmiş olduğun doğru grafiğinin çözüm kümesiyle ilişkisi nedir?

...

120. E: Hocam bence yine direkt doğrunun kendisi, doğrunun [...] zaten doğru sonsuz noktalardan oluşuyor, bu sonsuz noktaların hepsi bu $[y + 2x = 8]$ ifadesini göstererek] denklemin çözüm kümesi.

121. A: O noktalar nasıl ifade ediliyor peki?

122. E: Yani sıralı ikili şeklinde.

...

135. A: Şimdi bir de yerine koyma metoduyla çözmeye çalış Elif az önce bahsettiğin.

136. E: Evet [...] aslında ikisinin çözüm kümesi [...] aslında bu noktayı [kesişim yerini göstererek] noktayı bulmak için söylemiştim.

...

138. E: Şurası x eşittir dört artı iki y olur [...] her tarafa iki y ekledim. [...] ıı sonra burada $[y + 2x = 8]$ ifadesini göstererek] x yerine bu ifadeyi yazacağım. [...] y artı iki çarpı dört artı iki y eşittir sekiz [...] y artı sekiz artı dört y eşittir sekiz [...] şunlar gider $[8 \text{ sayısının üzerini çizerek}]$ dört y [...] eksi y [...] bir dakika buradan bir şey çıkarmamız gerekiyor [...] yanlış yaptım [tekrar kontrol ederek] dört y artı sekiz eşittir y artı sekiz.

...

143. E: Beş y eşittir sıfır $[5y = 0]$ ifadesini yazarak] y buradan sıfır geldi $[y = 0]$ ifadesini yazarak] tamam. Doğru tamam, doğru. [Emin olup ilerliyor] y buradan sıfır geldi. y sıfırsa herhangi bir denklemde yerine yazarım. Burada da mesela sıfır artı iki x eşittir sekiz $[0 + 2x = 8]$ ifadesini yazarak] x de buradan dört gelir $[x = 4]$ ifadesini yazarak]

144. A: Bu ne anlama geliyor?

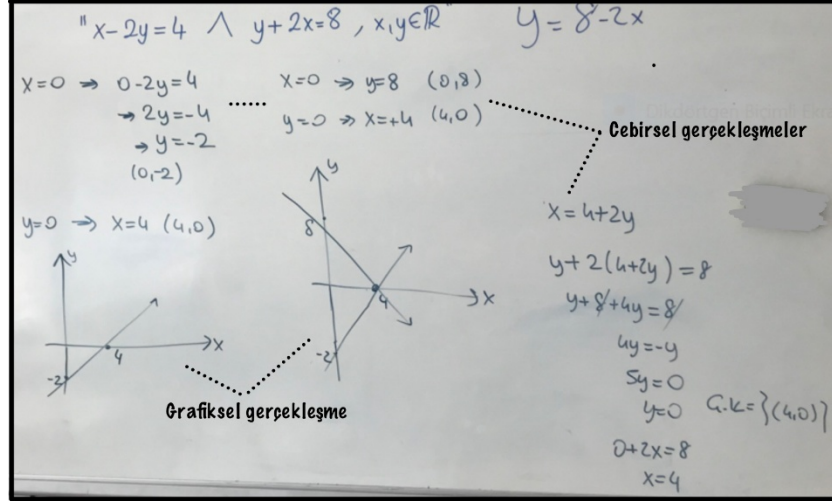
145. E: ıı bu da iki denklemin ortak çözümü ve [...] ıı sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır $[Ç. K = \{(4,0)\}]$ ifadesini yazarak]

...

149. Ö1: Aaaaa! Kesiştikleri nokta zaten ortak çözüm kümeleri oluyormuş [Farkına vararak, hayret ederek]

Şekil 3

Elif'in GD3 için Uyguladığı Prosedürü



Bu söylemsel iletişimde Elif'in birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümesinin elemanlarının birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığı ([66], [88], [120], [122]), onun cebirsel ve grafiksel gerçeşmeler arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde yapmasını sağlamıştır ([77], [120], [136], [145]). Katılımcının kavramın cebirsel ve grafiksel gerçeşmeler arasındaki kanonik geçişlere dair farkındalığı, onun söylemin nesneleştirilmesi bağlamında keşifsel bir katılım sergilemesine katkı sağlamıştır. Böylece bu durum söylemin nesneleştirilmesi bağlamında keşifsel katılımın bir örneğini teşkil etmiştir. Bireysel görüşmede çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde göstermesi istendiğinde ezbere bir prosedür uygulayarak (örneğin, Tablo 1 ve Şekil 1) doğru grafiklerini çizen Elif, odak grup görüşmelerinde bu prosedürüne matematiksel argümanlar ([81], [120], [136], [145]) sunmuştur. Bu süreçte Elif'in araştırmacı ve arkadaşlarının sorularına (örneğin, [80], [86], [87], [101], [117], [121], [144]) kanonik anlatılar üretirken kendinden emin bir şekilde yanıt verdiği ([81], [83], [88], [102], [120], [122], [145]) gözlemlenmiştir. Araştırmacının "... Çizdiğimiz doğru ile çözüm kümesi arasındaki ilişki ne? [101]", "Şimdi yine bu çizmiş olduğun doğru grafiğinin çözüm kümesiyle ilişkisi nedir? [117]", "O noktalar nasıl ifade ediliyor peki? [121]" ve "Bu ne anlama geliyor? [144]" biçimindeki sorularına Elif, "... bu doğru aslında bu denklemin çözüm kümesi yani grafikte gösterilmiş. Buradaki noktaların $x - 2y = 4$ doğrusunu göstererek] hepsi. [102]", "... doğrunun kendisi, doğrunun [...] zaten doğru sonsuz noktalardan oluşuyor, bu sonsuz noktaların hepsi bu $y + 2x = 8$ ifadesini göstererek] denklemin çözüm kümesi. [120]", "Yani sıralı ikili şeklinde. [122]" ve "... bu da iki denklemin ortak çözümü ve [...] ını sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır $[Ç. K = \{(4,0)\}]$ ifadesini yazarak [145]" biçiminde anlatılar

üretmek argümanını inşa etmiştir. Böylece gerekçelendirme bağlamında keşifsel katılımın örneklerini sunan bu bulgular katılımcının gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri ustaca yapabildiğini de ortaya koymuştur. Elif'in bu söylemleri aynı zamanda arkadaşlarının mantıksal çıkarımlar yapmasını da ([79], [149]) sağlamıştır. Bu durum onun bir otorite olarak söyleme katılımında rol aldığına dair bulgular olmuştur. Elif'in söylemlerinin arkadaşlarının mantıksal çıkarımlar yapmasına katkı sağlaması, onun arkadaşları için bir otorite olarak söylemde rol üstlenmesi ve söylemlerinde kendinden emin olması ise katılımcının yetkinliği bağlamında keşifsel katılıma bir örnek teşkil etmiştir. Bununla birlikte Elif'in, gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde yapabilmesi ona prosedürünü Şekil 3'teki gibi farklı gerçekleştirmeleri kullanarak matematiksel olarak doğru bir şekilde uygulamasına katkı sağlamış ve Elif'in bu rutini hem esneklik hem de bağlılık bağlamında da keşifsel katılımın bir örneğini sunmuştur.

Elif'in odak grup görüşmelerindeki söylemleri çoğunlukla matematiksel nesneler hakkında ve sonuç odaklı olmuştur. Katılımcı GD4 içinde kanonik anlatılar üretmiş ve bireysel görüşmede birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemlerini yok etme metodu kullanarak çözmesinin kanonik olmadığını söylemlerinde ([90]) ifade etmiştir:

78. E: Orayı sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [*eliyle havada doğruyu çiziyor*] almıyoruz [...] o doğruyu sağlamıyor yani. <GD4'te " $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken>

...

90. E: Ama sonra ikisi de bir eşitsizlik sistemi ve bence koordinat sisteminde göstermem gerektiğini düşündüm.

...

114. E: Hocam orada büyüktür yani ın sebebi şu, biz zaten orayı bir eşittir olarak düşündük, aslında o sembolde öyle bir şey içermediği için o çözüm kümesini ifade etmiyor o yüzden. <GD4'de " $8 - 2x - y > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken>

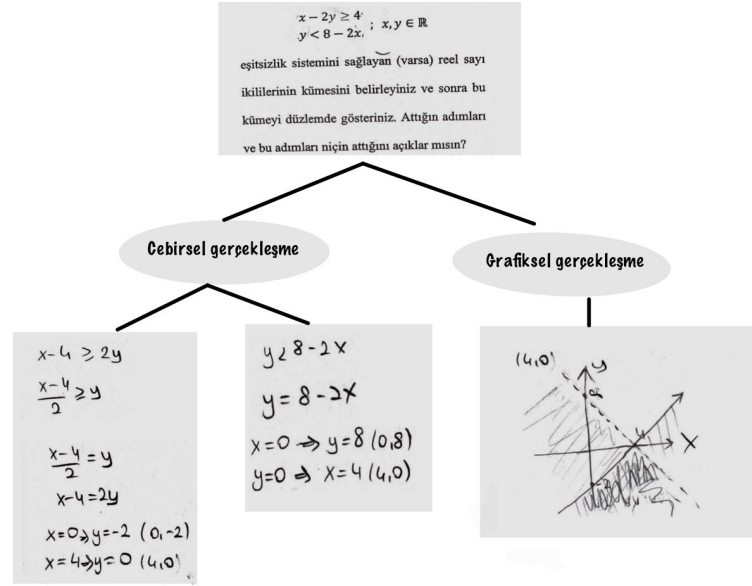
...

123. E: Doğrunun üzerinde o nokta, o yüzden (*eşitsizliği*) sağlamıyor <(0,8) sıralı ikilisinin " $8 - 2x - y > 0$ doğrulamadığını belirtirken>

Elif, bireysel görüşmeden farklı olarak, eşitsizliğin "<" ya da ">" bağıntılarını içermesi durumunda analitik düzlemde çizilen doğru grafiğinin kesikli bir şekilde çizilerek temsil edilme sebebini kanonik anlatılarla ([78], [114], [123]) gerekçelendirmiştir. Elif'in GD4'e yönelik prosedürlerini içeren gerçekleştirme ağacı ise Şekil 4'teki gibidir.

Şekil 4

Elif'in GD4'teki Eşitsizlik Sistemi Çözümüne Ait Gerçekleşme Ağacı



Burada Elif'in Şekil 4'teki gerçekleşme ağacı incelendiğinde, bireysel görüşmede yapmada güçlük çektiği geçişleri (Şekil 2) odak grup görüşmesinde kanonik bir şekilde yaptığı görülmüştür. Katılımcı bu rutinini söylemleriyle de onaylamıştır ([78], [114], [123]). Bu durumda söylemin nesneleştirilmesi, esneklik ve bağlılık bağlamında katılımcının keşifsel bir katılım sergilediğine dair bulgular sunulmuştur.

Özetle, Elif'in söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında ele alındığında, katılımcının BG kodlu rutin prosedürü ritüel bir katılımın, OG kodlu rutin prosedürü keşifsel bir katılımın örneği olmuştur. BG kodlu rutin prosedüründe Elif'in söylemleri çoğunlukla matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında (Tablo 1 ve [561], [571], [573]) iken, OG kodlu rutin prosedüründe matematiksel nesneler hakkında olmuş ve katılımcı kanonik anlatılar ([66], [81], [102], [120], [145]) üretmiştir. Bununla birlikte BG kodlu rutininde kavramın farklı gerçekleştirmeleri arasında geçişte güçlük yaşayan ([561], [571], [573]) katılımcı, OG kodlu rutininde bu geçişleri kanonik bir şekilde ([77], [120], [136], [145]) yapmıştır.

Elif'in söyleme katılımı esneklik bağlamında ele alındığında, katılımcının BG kodlu rutin prosedürü ritüel bir katılımın, OG kodlu rutin prosedürü keşifsel bir katılımın örneği olmuştur. Elif BG kodlu rutininde, Tablo 1 ve Şekil 1'deki gibi denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini belirlemek için ezbere bir prosedür uygulamıştır. Katılımcı görev durumlarına yönelik cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri yapabilir de (Şekil 2) bu gerçekleştirmeler arasındaki ilişkileri kanonik

bir şekilde kurmada güçlük yaşamıştır. Buna karşılık Elif, odak grup görüşmelerinde cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri aracılığıyla denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini belirleyebilmiş ve bu farklı prosedürler arasındaki matematiksel ilişkiyi kurabilmiştir.

Elif'in söyleme katılımı bağlılık bağlamında ele alındığında, katılımcı OG kodlu rutin prosedüründe BG kodlu rutin prosedürüne göre daha keşifsel bir katılım sergilemiştir. Her iki rutin prosedüründe de Elif, birbirine denk açık önermeler yazmış ve prosedüründeki bir önceki adımının çıktısını bir sonraki adımında girdi olarak kullanmıştır. Odak grup görüşmesinden farklı olarak katılımcı bireysel görüşmede çözüm kümesini doğru bir şekilde belirlemede güçlük yaşamıştır (Tablo 1'de gerçekleşme 6). Buna rağmen Elif, hem bireysel hem de odak grup görüşmelerinde işlemsel prosedürlerini çoğunlukla kanonik bir şekilde uygulamıştır.

Elif'in söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında ele alındığında, katılımcının BG kodlu rutin prosedürü ritüel bir katılımın, OG kodlu rutin prosedürü keşifsel bir katılımın örneği olmuştur. Katılımcı bireysel görüşmede prosedürünü gerekçelendirirken önceki öğrenme yaşantılarına (hafızaya) başvurmuş ([571]) ve prosedürün adımlarını nasıl uyguladığını ([571], [573]) açıklamıştır. Buna karşılık odak grup görüşmelerinde kanonik anlatılar üreterek prosedürlerini gerekçelendirmiştir ([66], [81], [102], [120], [136], [145]).

Elif'in söyleme katılımı, katılımcının yetkinliği bağlamında ele alındığında, katılımcının BG kodlu rutin prosedürü ritüel bir katılımın, OG kodlu rutin prosedürü keşifsel bir katılımın örneği olmuştur. Katılımcı bireysel görüşmede prosedürünü ezbere bir şekilde uygulamaya çalıştığı için, prosedüründe nasıl ilerleyeceği ve prosedürünü nasıl sonlandıracağı konusunda bağımsız kararlar almada güçlük yaşamıştır. Denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini belirlemede tereddütler yaşamış ve "... bence böyle olmalı", "...böyle olması lazım" ve "... almam gerekiyordu" gibi ifadelerle söylemlerinde yer vermiştir. Buna karşılık Elif, odak grup görüşmelerinde arkadaşları için bir otorite rolünde olmuş ([36], [38], [42]) ve onların mantıksal çıkarımlarda bulunmasına (Ö1'e ait söylemler: [41], [75], [149]) katkıda bulunmuştur. Katılımcı herhangi bir otoriteye ihtiyaç hissetmeden prosedürünü uygulamış (Şekil 3 ve Şekil 4) ve bu süreçte bağımsız kararlar alabilmiştir.

Elif'in söyleme katılımı, uygulanabilirlik bağlamında ele alındığında, katılımcı her iki rutininde de keşifsel bir katılım sergilemiştir. Elif, tarama formunda uyguladığı rutinini bireysel görüşmede tekrar ustaca uygulayabilirken, odak grup görüşmelerinde de benzer görev durumlarında rutinini başarılı bir şekilde uygulayabilmiştir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu çalışma, bir lise öğrencisinin denklem ve eşitsizlik sistemlerini içeren görev durumlarında söyleme katılımına odaklanmış ve rutinleştirme bağlamında öğrenmeye

dair ampirik örnekler sunmayı amaçlamıştır. Bu doğrultuda, belirli görev durumlarında katılımcının ritüelden keşfe geçişin görüldüğü bir rutini aracılığıyla söyleme katılım biçiminin nasıl olduğu; nesneleştirme, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik özellikleri bağlamında izah edilmiştir.

Bireysel görüşmesinde Elif, denklem ve eşitsizlik sistemlerini içeren görev durumlarında başkalarını taklit etme yoluyla ([571]) ezbere bir prosedür uygulamış ve süreç odaklı bir ritüel rutin sergilemiştir. Rutinleştirme bağlamında öğrenmede bu katılım biçimi, söyleme yeni katılan bir katılımcı için ilk ve gerekli adımlar olarak görülmektedir (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli ve Katz, 2017; Sfard ve Lavie, 2005; Sfard, 2008; Viirman ve Jacobsson, 2023). Bireysel görüşmesinde çoğunlukla söyleme ritüel bir biçimde katılan Elif, prosedürünü uygularken daha önceki öğrenme yaşantılarından hangilerini işe koymasına gerektiği üzerine düşünerek katılım göstermiş ve bu durumu söylemlerinde paylaşmıştır ([561], [571], [573]). Elif bu süreçte bir yandan başkalarını taklit etme yoluyla söyleme katılırken, bir yandan da yaptıklarını (prosedürünü) anlamlandırmak için çaba göstermiştir. Sfard (2008) bu tür taklidi “düşünerek taklit etme (thoughtful imitation)” olarak isimlendirir. “Düşünerek taklit etme” terimiyle Sfard (2008), öğrenenin, uzmanın eylemini yeniden üretmeye çalışırken, bu eylemin hangi özelliklerinin korunması gerektiğini ve hangilerinin yeni bir durumun taleplerine göre değiştirilmesi gerektiğini dair sürekli kendine soru sorma ihtiyacı duyduğu sürecini kastetmektedir. Elif, araştırma süreciyle eş zamanlı yürütülen matematik derslerindeki öğrenme yaşantılarını benzer görev durumlarında işe koymuş ve anlatılar üretmeyi amaçlamıştır. Rutinleştirme bağlamında öğrenmede katılımcının bu çabası, ritüel bir rutinini keşif rutinine dönüştürebilmesi için önemli görülmekte (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020) ve bu çalışmanın bulguları da bu fikri desteklemektedir. Çünkü Elif, bireysel görüşmesinde denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri anlamlı bir şekilde yapmada güçlük çekmiş ve aynı zamanda yaptıkları üzerine araştırma boyunca düşünmeye devam etmiştir. Bu çabası onun odak grup görüşmelerinde anlatılar üretmesine ve farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri anlamlı bir şekilde yapabilmesini sağlamıştır. Böylece Elif, söyleme daha yetkin bir şekilde katılabilmiş ve söylem içerisinde bağımsız ve esnek bir şekilde hareket edebilmiştir. Düşük başarılı öğrencilerin denklem kavramına dair anlamlandırma süreçlerine odaklanan Macchioni ve diğerleri (2023) de çalışmalarında az da olsa benzer bulgulara rastlamıştır. Araştırmanın yürütüldüğü iki öğrenciden biri diğerine göre daha esnek bir şekilde rutinini sergilemiş ve prosedürünü uygularken denklem içeren farklı görev durumlarında farklı gerçekleştirmeleri işe koymuştur. Araştırmacılara göre (Macchioni ve diğ., 2023) bu öğrenci hala ritüellere güvenmesine rağmen bu esnekliğine dair çabası onun söyleme katılımını diğer öğrenciye göre daha keşifsel kılmıştır. Öğrencilerin denklem çözme süreçlerine rutinleştirme bağlamında odaklanan Roberts ve le Roux (2019) da benzer bulgulara ulaşarak düşük başarılı öğrencilerin ritüellere güvendiğini ve rutin prosedürlerini katı bir şekilde uyguladığını ve çözme sürecinde anlatı üretmediklerini belirtmiştir.

Öğrencilerin prosedür çözümündeki esnekliğinin ya çok az olduğunu ya da hiç olmadığını belirten araştırmacılar rutinleştirme bağlamında öğrenme süreçlerinde keşifsel katılıma dair çok az bulgu elde etmiştir. Bu çalışmanın bulguları ise denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında herhangi bir öğrencinin keşifsel söyleme geçiş yaptığını gösteren yeterli kanıtı içermeyen çalışmalara (Macchioni ve diğ. 2023; Nisa ve diğ., 2021; Roberts ve le Roux, 2019) ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişe dair sunduğu örneklerle katkı sunmaktadır. Diğer çalışmalardan farklı olarak, Elif'in akademik başarısı yüksek bir öğrenci olmasının, bu çalışmada ritüelden keşfe geçiş sürecine dair daha zengin amprik örnekler sunmaya fırsat sağladığı düşünülmektedir. Bu nedenle çalışmanın bulguları, başarı arttıkça öğrencilerin daha keşifsel bir katılım sergilediğini ve nesneleştirilmiş bir söylemin gelişmiş bir performansla ilişkili olduğunu iddia eden çalışmalarla da (Essack, 2015) uyumlu olmuştur.

Matematiksel söylemde öğrenmeyi araştırmak, rutinlerin nasıl ortaya çıktığı ve daha sonra nasıl geliştiği sorusunu yanıtlamakla eşdeğer görülmektedir (Lavie ve diğ., 2019; Sfard, 2008). Matematiksel söyleme odaklanan araştırmalar (Lavie ve diğ., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard, 2017), öğrenmenin ilerlemesi için bireyin başlangıçta başkalarına bağlı bir şekilde taklit ederek sergilediği ritüel rutinlerini; başkalarından bağımsız, esnek ve yetkin bir şekilde uygulayabildiği keşif rutinlere dönüştürmesi gerektiğini iddia etmektedir. Bununla birlikte Heyd-Metzuyanım ve diğerlerine (2019) göre ritüelden keşifsel katılıma geçişe odaklanmanın matematiği öğrenme süreçlerinin doğasını, şemasını, hızını ve altta yatan mekanizmalarını net bir şekilde görebilmemizi sağlamaktadır. Çalışmanın bulguları, Elif'in ritüelden keşfe geçiş sürecinde, katılımcının kavramın yapısına ve özelliklerine dair farkındalığının oluşmasının etkili olduğunu ortaya koyarak rutinleştirme bağlamda öğrenmenin yapısına dair ilgili literatüre katkılar sunmaktadır. Elif, birinci dereceden iki değişkenli bir denklemin çözüm kümesinin bir sıralı ikili olduğuna ve bu sıralı ikilinin düzlemde bir noktaya karşılık geldiğine dair farkındalığının oluşmasıyla ([36], [38], [40], [42]), kavramların farklı gerçekleştirmeleri arasında geçişleri kanonik bir şekilde yapmış ve bu geçişlere yönelik kanonik anlatılar ([66], [81], [102], [120], [136], [145]) üretmiştir. Çözüm kümesinin elemanlarını doğru ve ilişkili bir şekilde belirlemeye başlayan Elif, prosedür adımlarını daha bağlı ve kanonik bir şekilde yazmış ve prosedürünü esnek bir şekilde uygulamıştır (Şekil 3 ve Şekil 4). Böylece katılımcının söylemleri nesneleşmeye başlamış ve Elif matematiksel argümanlar sunarak ([78], [81], [102], [114], [123]) söyleme daha keşifsel bir biçimde katılmıştır.

Özetle, çalışmanın bulgularına göre, öğrencilerin kendilerine otorite ve kendilerinden daha tecrübeli olarak gördüğü katılımcıların rutinleri üzerine düşünerek kendi rutinini uyguladığında, öğrencilerin rutinlerinde bir gelişimin meydana gelmesinin söz konusu olabileceği sonucuna varılmıştır. Yani rutinleştirme bağlamında öğrenmenin gerçekleşebilmesi için bireylerin bir yandan söyleme katılmaları, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermeleri gerekir. Çalışmanın bulgularından ulaşılan bir diğer sonuç ise, öğrencilerin matematiksel kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik farkındalığının oluşmasının; onların söylemini nesneleştirmesini, anlatılarını

zenginleştirmesini, matematiksel argümanlar sunmasını ve böylece ritüel rutinlerini keşif rutinlere dönüştürmesini sağlayabileceğidir. Aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavramların farklı gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkilere yönelik farkındalığının oluşmasının onların prosedüründeki bağlılığı, esnekliği ve uygulanabilirliği artırmasını ve böylece söyleme daha keşifsel bir şekilde katılmalarını sağlayabileceği tespit edilmiştir.

Öneriler

Öğrencilerin rutinleştirme süreçlerine yönelik henüz yeterli çalışmaların olmamasından dolayı, araştırmacılar farklı cebirsel ya da geometrik kavramlar bağlamında öğrencilerin rutinleştirme süreçlerine yönelik bu çalışmaya benzer şekilde çalışmalar yürütebilir. Böylece öğrenci öğrenmelerinin nasıl gerçekleştiğine dair az sayıdaki söylemsel çalışmalara katkı sunabilir. Bu çalışmanın bağlamında olmadığı için ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin, kavramın yapısından bağımsız faktörlerin neler olabileceği detaylı bir şekilde bu çalışmada araştırılmamıştır. Bu nedenle öğrencilerin rutinleştirme süreçlerine odaklanmayı hedefleyen araştırmacılar, hem ilgili hem de farklı kavramlar bağlamında ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin nedenleri üzerine çalışmalar sunabilir. Öğrenmenin gerçekleştiğini gösteren bu geçişin detaylandırılmasının, hem kavramın öğretim sürecinde öğretmen adaylarına ve öğretmenlere fikirler sunacağı hem de ilgili literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Öğrencilerin hem kendi çabalarıyla hem de bir kavramın yapısına ve özelliklerine dair farkındalığının oluşmasıyla söyleme daha keşifsel katılabileceği sonucundan dolayı da öğretmenlere, ders sürecinde kavramın öğretimi ile ilgili çeşitli öneriler sıralanabilir. Öğretmenler öğrencilerine matematik öğrenme ortamlarında söyleme katılmalarına fırsat ve olanaklar sunmalıdır. Bu süreçte öğretmenler, öğrencilere sunacağı görev durumlarında kavramın farklı gerçekleştirmelerine (sözel, cebirsel, grafiksel vb.) yer verebilir. Denklem ve eşitsizlikleri çözme süreçlerinde kavramlara yönelik kanonik anlatıları içeren sözel gerçekleştirmeler eşliğinde cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri içerecek şekilde çözümlerini gerçekleştirebilir.

References

- Adler P. A. & Adler P. (1998). Observational techniques. In N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 79–109). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Akçakoca, T., Sağ, G. Y., & Argün, Z. (2023). Rituals and explorations in students' mathematical discourses: The case of polynomial inequalities. *Participatory Educational Research*, 11(1), 178-197.
- Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: how dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10009-w>
- Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings and the learners autonomy. *Education et Didactique*, 1(3), 117-134. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.241>
- Biza, I., & Nardi, E. (2023). *Online search routines in undergraduate students' agentive participation in mathematical discourse*. Paper presented at Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Budapest, Hungary.
- Christiansen, I. M., Corriveau, C. & Pettersson, K. (2023). Hybrids between rituals and explorative routines: opportunities to learn through guided and recreated exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 112(1), 49-72. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10167-z>
- Creswell, J. W. (2014). *Research design, qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. United State of America: Sage.
- Emre-Akdoğan, E., & Gürbüz, F. N. (2023). *Explorative participation in the context of a classroom discourse*. Paper presented at Twelfth ERME Topic Conference Language in the Mathematics Classroom. Oxford, UK
- Essack, R. M. (2015). *Exploring grade 11 learner routines on function from a commognitive perspective*. Doctoral Dissertation, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.
- Heyd-Metzuyanım, E. & Graven, M. (2019). Rituals and explorations in mathematical teaching and learning: introduction to the special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 141-151. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09890-x>
- Heyd-Metzuyanım, E., Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: Between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 547-574. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9311-1>

- Glesne C. & Peskin A. (1992). *Becoming qualitative researchers: An introduction*. White Plains, NY: Longman.
- Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 611–619.
- Karavi, T. Mali, A. & Avraamidou, L. (2022). Commognition as an approach to studying proof teaching in university mathematics lectures. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), em2132. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12173>
- Kieran, C., Forman, E. & Sfard, A. (2001). Guest editorial learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 1–12.
- Lavie, I. & Sfard, A. (2019). How children individualize numerical routines: Elements of a discursive theory in making. *Journal of the Learning Sciences*, 28(4-5), 419-461. <https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650>
- Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and, future* (pp. 347–366). Rotterdam: Sense.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Lisarelli, G., Macchioni, E. & Miragliotta, E. (2022). A developing discourse on transitions between different realizations of the same function. *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 147-154.
- Lipper, D. & Karavi, T. (2023). *Teaching characteristics in the introduction of proof for supporting de-ritualization*. Paper presented at Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Budapest, Hungary.
- Liu, J. & Weingarden, M. (2022). *Beyond correctness: Understanding preservice teachers' fraction discourse*. Paper presented at American Educational Research Association Annual Meeting. San Diego, California.
- Macchioni, E., Lisarelli, G., Miragliotta, E. & Baccaglini-Frank, A. (2023). *Sense-making in algebraic mathematizing discourse: The profiles of Bea and Nico*. Paper presented at Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Budapest, Hungary.
- Millî Eğitim Bakanlığı (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. [Mathematics education curriculum] <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343> sayfasından erişilmiştir.

- Moschkovich, J. N. (Ed.). (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Charlotte, NC: Information Age.
- Nachlieli, T. & Katz, Y. (2017). *Ritual towards explorative classroom participation of pre-service elementary school mathematics teachers*. Paper presented at Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Dublin, Ireland.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2019). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 253-271. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9848-x>
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2022). Classroom learning as a deritualization process: The case of prospective teachers learning to solve arithmetic questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 65, 100930. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100930>
- Nisa, Z. & Lukito, A. & Masriyah, M. (2021). Students mathematical discourse analysis by commognition theory in solving absolute value equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1808(1), 1–10.
- Roberts, A. & le Roux, K. L. (2019). A commognitive perspective on Grade 8 and Grade 9 learner thinking about linear equations. *Pythagoras*, 40(1), 1–15.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. <https://doi.org/10.1080/10508400701525253>
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University.
- Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013>
- Sfard, A. (2018). On the need for theory of mathematics learning and the promise of ‘commognition’. *The Philosophy of Mathematics Education Today*, 219-228. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_13
- Sfard, A. (2020). Commognition. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 95-101.
- Sfard, A. & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different?—Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309. https://doi.org/10.1207/s1532690xc2302_3
- Tabach, M. (2006). Research and teaching—Can one person do both? A case study. Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5, 233–240.

- Viirman, O. & Jacobsson, M. (2023). *Adapting standard mathematics exercises to promote de-ritualization*. Paper presented at Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Budapest, Hungary.
- Viirman, O. & Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 233–252. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9861-0>
- Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E. & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool—examining explorative participation in mathematics lessons. *The Journal of Mathematical Behavior*, 56, 100717. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100717>
- Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning as a social system. *Systems Thinker*, 9(5), 2-3.
- Yin, R.K. (2018). *Case study research and applications*. London UK: Sage.

Ethical and Author Declarations | Etik ve Yazar Beyanları

Graduate Thesis Information

This study is derived from the 2024 doctoral thesis of Tuba Akçakoca at Gazi University, Institute of Educational Sciences, Department of Mathematics Education, supervised by Prof. Dr. Ziya Argün and Assoc. Prof. Dr. Gönül Yazgan Sağ (dissertation no: 899793). The dissertation title is "Examination of the routines of secondary school students related to concepts of equations and inequalities."

Authors' Contributions

Information about the authors' contributions to the article in the article sections is included under the heading "Researcher Roles" in the method section.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no competing interests relevant to the content of this article.

Ethical Approve

This research was approved by the permission of Gazi University Scientific Research and Publication Ethics Committee dated 23.02.2022 and numbered 44154050.

Lisansüstü Tez Bilgileri

Bu çalışma, 2024 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Ziya Argün ve Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ danışmanlığında tamamlanan Tuba Akçakoca'nın doktora tezinden türetilmiştir (tez no: 899793). Tez başlığı: "Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ilişkin rutinlerinin incelenmesi."

Yazarların Katkı Düzeyleri

Yazarların makaleye katkıları hakkındaki bilgiler makalenin yöntem bölümünde "Araştırmacı Roller" başlığı altında yer almaktadır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların, bu makalenin içeriğiyle ilgili beyan edilecek herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Etik Onay

Bu araştırma Gazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'nun 23.02.2022 tarih ve 44154050 sayılı izni ile onaylanmıştır.

This study has been evaluated under double-blind peer review and verified to be free of plagiarism using iThenticate software.

Bu çalışma, çift taraflı kör hakemlik kapsamında değerlendirilmiş ve iThenticate yazılımı kullanılarak intihal içermediği teyit edilmiştir.

The copyrights of the studies published in our journal belong to our journal and are published as open access under a CC-BY-NC-ND license.

Dergimizde yayımlanan çalışmaların telif hakları dergimizde olup, CC-BY-NC-ND lisansı ile açık erişim olarak yayımlanmaktadır.

Ethical disclosure | Etik bildirim: ebfd@ankara.edu.tr