Bir Matematik Öğretmeni Ne Bilmeli? Alan Bilgisi ve Alan Eğitimi Bilgisi Arasındaki Fark

Gülseren Karagöz Akar

Özet

Eğitim alanında 1980'li yıllarda yapılan araştırmalar sonucunda alan bilgisi ile alan eğitimi bilgisinin birbirlerinden farklı olmaları gerektigi kuramsal ve empirik sonuçlarla kanıtlanmıştır. Sonuçlar, öğretmen yetiştiren eğitim kurumlarını işlevsel anlamda ciddi değişiklikler yapmaya yönlendirmiştir. Bu bağlamda, bu çalışmanın amacı ulusal ve uluslararası eğitim araştırmalarını temel alarak, matematik eğitimi öğretmen adaylarının sahip olmaları gereken bilgi türünün karakteristik özelliklerini nitelik ve nicelik açısından incelemektir. Araştırma sonuçları öğretmen yetiştiren eğitim fakültelerinin önemini bir kez daha gözler önüne sermektedir.

Anahtar sözcükler: Matematik alan bilgisi, matematik eğitimi bilgisi

Giriş

Eğitim araştırmaları ışığında özellikle 1980'li yıllarda önem kazanmaya başlayan alan eğitimi bilgisi, günümüzde daha da ivme kazanarak öğretmen adaylarının sahip olmaları gereken bilgi türleri arasında olmazsa olmaz yerini korumaktadır. Alan eğitimi bilgisi nedir? Neden öğretmen adaylarının alan eğitimi bilgisine ihtiyaçları vardır ve bu bilgi türünün matematik (alan) eğitimindeki bazı örneklemeleri nelerdir? Öğretmenlik mesleğinin profesyonel bir meslek grubu olduğu ve bilimsel temellere dayandığı düşünüldüğünde bu sorular ilk etapta akla gelen ve cevaplanması zorunlu olan sorular olarak göze çarmaktadır.

Alan bilgisi ile alan eğitimi bilgisinin farklı olduklarını kuramsal olarak ilk defa savunan kişi Shulman (1986) olmuştur. Shulman çalışmasında alan bilgisi ile alan eğitimi bilgisinin farklı niteliklere sahip olduğunu teorik olarak açıklamıs ve öğretmen adaylarının alan bilgisinin kendi alanlarında öğretmenlik yapabilmek için yeterli olamayacağını ifade etmiştir. Shulman (1986), alan eğitimi bilgisini şu şekilde tanımlamıştır:

> Alan eğitimi bilgisi, alan bilgisini sadece kendisi için bilmekten öteye başkaları (öğrenciler) ile paylaşabilecek nitelikte anlayabilmek, diğerleri ile paylaşırken nasıl bir yol izlenmesi gerektiği noktasında temel olarak nereden başlanabileceğinin bilgisine ve karşılaşılabilecek zorlukların farkındalığına sahip olmaktır. Ayrıca bilgiyi diğerleri ile paylaşırken hangi materyal ve gösterimlere öncelik verilmesi gerektiği bilgisine de sahip olunması demektir. (s. 9)

Açıklamadan da anlaşılabileceği üzere, alan eğitimi bilgisinin niteliği ve karakteristik özelliklerinden bahsetmek zordur. Bu zorluk alan eğitimi bilgisinin, bilgiyi kişinin kendisi için bilmekten öteye başkalarının anlayabileceği nitelikte bilmesi gerekliliğinden kaynaklanmaktadır.

---

[1]*Gülseren Karagöz Akar, Öğr. Gör. Dr., Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, İstanbul,* gulseren.akar@boun.edu.tr

Shulman'ın iddiası eğitim akademisi ve eğitim politikası çevrelerine ciddi bir sonuç sunmuş ve onları düşünmeye sevk etmiştir. Zira o güne kadar hem akademik kesimin hem de eğitim politikalarını belirleyen kesimin düşüncesi paralel olmuştur: Bir öğretmenin ne kadar çok alan bilgisi varsa o kadar iyi öğretmen olur ve öğrenci başarısı da ilişkili bir şekilde yüksek çıkar (Wilson, Floden & Ferrini-Mundy, 2001). Bu düşünce ile tezat oluşturan bir düşüncenin ortaya konması, bu kesimlerin alan bilgisi ile alan eğitimi bilgisi farklılığının öğretmenlik mesleğindeki yerinin gerçekte bahsedilen kadar önemli olup olmadığı sorusunu sormalarına yol açmıştır. Bunun üzerine eğitim politikacılarının da desteği ile eğitim biliminin hemen her alanında çok sayıda araştırma yapılmıştır. Burada sunulan çalışma çerçevesinde, daha önce de belirttiğimiz üzere sadece matematik eğitimini baz alan çalışmalarn sonuçlarından bahsedeceğiz.

Öncelikle matematik eğitimi araştırmacıları üç önemli soruya yanıt bulmaya çalışmışlardır: Bir matematik öğretmeni ne kadar matematik bilmeli? Bu matematik bilgisinin niteliği ne olmalı? Öğretmenlerdeki bu iki bilgi türünün öğrencilerin başarısına etkisi ne kadardır? Üçüncü soruyu daha da net söylemek istersek matematik öğretmenlerinin üniversite eğitimi sırasında aldıkları "matematik" ve "matematik eğitimi metod" derslerinin öğrencilerin (hem ilkögretim düzeyinde hem de ortaöğretim düzeyinde) başarısına etkisi nedir? sorusuna cevap aranmıştır. 1987 ve 1991 yılları arasında Amerika Birleşik Devletleri'nde 51 farklı yerleşim merkezinde ve bu merkezlerdeki onlarca okul ve öğretmen ve yüzlerce öğrenci ile calışmalar yapılmıştır (Ferguson & Womack, 1993; Guyton & Farokhi, 1987; Monk, 1994; Wilson, Floden & Ferrini-Mundy, 2001). Sonuçlardan bazıları şöyledir: i) Hem Fen Edebiyat Fakültesi çıkışlı ve hem de Eğitim Fakültesi çıkışlı matematik öğretmenlerinin üniversite yıllarında aldıkları 5'ten fazla matematik dersinin öğrencilerinin başarısına etkisi çok azdır. ii) Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü mezunu olmanın öğrencilerin başarısına hiç bir ek katkısı yoktur. iii) Son olarak da, matematik eğitimi metod derslerinin öğrencilerin başarısına etkisi alınan matematik derslerinin öğrencilerin başarısına etkisinden daha fazladır (Ferguson & Womack, 1993; Guyton & Ferokhi, 1987; Monk, 1994; Wilson, Floden & Ferrini-Mundy, 2001).

Bu sonuçlardan sonra, Shulman (1986) çalışması eğitim araştırmacılarının dikkatini çok daha fazla çekmiş ve fazla matematik dersi almanın öğrenci başarısına etkisi çok az ise, öğretmenlerin matematik bilgisinin niteliği nasıl olmalı? sorusunu sormalarına yol açmıştır. Bu bağlamda hem Fen Edebiyat Fakültesi mezunu ve hem de Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü mezunu ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenleri ile çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların ortak sonuçları ise şöyle olmuştur: Öğretmenler matematiksel kuralları bilme ve kullanabilme anlamında ciddi bilgi seviyesine sahiptirler. Ama neden-sonuç ilişkisi kuramamaktadırlar (Adams, 1998; Ball, 1990; Borko, Eisenhart, Underhill, Jones & Agard, 1992; Graeber, Tirosh, & Glover, 1989; Simon, 1993). Diğer bir deyişle, hem ilköğretim ve hem de ortaöğretim matematik öğretmenleri işlemsel anlamda matematikte başarılı olmuşlardır. Ama işlemlerin ve kuralların sebepselliklerini ifade edememişlerdir. Sebepten kasıt cebirsel anlamda işlemin nasıl geliştiğinin ifade edilemeyişi değildir. Sebepten kasıt mantıksal anlamda kuralların hangi temel kavramlara dayandığının ifade edilemeyişidir. Bu bağlamda yapılan ilginç araştırmalardan biri, Çin ve Amerika Birleşik Devletleri'ndeki ilköğretim öğretmenleri üzerine yapılmış olandır. Çalışma sonuçları, Çin'li matematik öğretmenlerinin temel kavramlar hakkındaki bilgi seviyesinin Amerika Birleşik

Devletleri'ndeki matematik öğretmenlerinin temel kavramlar hakkındaki bilgi seviyesinden çok daha derin olduğunu ve Amerika Birleşik Devletleri'ndeki öğretmenlerin işlemler ve kurallar dışına çıkamadıklarını bulgulamıştır (Ma, 1999).

Bunun üzerine, bir matematik öğretmeninin bilmesi gereken matematiğin niteliği cok daha fazla önem kazanmış ve eğitim araştırmacıları bu konunun üzerine gitmişlerdir. Zira matematik öğretmeni yetiştiren kurumların müfredatlarının belirlenmesi geleceğin kaliteli matematik öğretmenlerinin ve doğal olarak kaliteli öğrencilerin yetiştirilmesi açısından çok önemlidir. İlerleyen paragraflarda, hem ilköğretim matematik alanında ve hem de ortaöğretim matematik alanında yapılan çalışmalardan bazılarının sonuçları ışığında matematik öğretmenlerinin bilmesi gereken matematiğin bazı örneklendirmelerini sunacağız.

Daha öncesinde de Shulman'ın (1986) belirttiği üzere, matematik öğretmeleri matematiği sadece işlemsel olarak değil kavramsal olarak da bilmek zorundadırlar. Bu özellikle matematiği sadece kendileri için değil diğerleri için de bilmek zorunda olmalarından ötürüdür. Aslında bu söylem kendi içinde bir tezatı da barındırmaktadır. Şöyleki, matematiği bildiği iddia edilen kişilerin (matematikçi, matematik eğitimci, fizikçi, fizik eğitimci vesayre) zaten kavramsal olarak matematiği anlamış olmaları gerekmiyor mudur? Ünlü felsefecimiz Cemal Yıldırım (2010) matematiği tanımlarken bir kavramlar bilimi olduğunu vurgulamaktadır. Bu bağlamda elbetteki matematik bilimini okuduğu ve bildiği iddia edilen kişilerin kavramsal düzeyde matematiği bildikleri varsayılmaktadır. Halbuki, yapılan araştırmalar önceki paragraflarda da ifade edildiği üzere matematik öğretmenlerinin matematiği kavramlar bilimi olarak değil de işlemsel olarak anladıklarını göstermektedir. Öğretmenlerin sonuçlar bilimi olarak algıladıkları matematiği başkalarına öğretmek zorunda olmaları ise sorunu daha da derinleştirmektedir. Zira, sebeplemeleri verilmeden anlatılan matematik, öğrencilerin ezberleyerek öğrenmesine yol açmaktadır (Van de Walle, 2008). Bu ise, öğrencilerin matematiği ayrık kümelerden oluşmuş bilgiler üzerine değerlendirmelerine ve birbirinden kopuk konulardan oluşan bir bilim olarak anlamalarına yol açmaktadır. Ayrıca, öğretmenlerin kavramların farkındalığında olmayışı öğrencilerini anlayabilmeleri, dinleyebilmeleri ve farklı bakış açılarını kabullenebilmelerini de ciddi ölçüde kısıtlamaktadır (Ball, Thames & Phelps, 2008). Bu konulara açıklık getirebilmek ve matematiği birbiri üzerine kurulu temel kavramlar bilimi olarak öğrenmeyi tartışabilmek üzere aşağıda örneklemeler sunacağız. Bunun için ilk önce ilköğretimin en alt kademelerinden başlayıp, orta kademelerinden örneklemeler ile devam edeceğiz ve en son ortaöğretimden örneklemeler ile bitireceğiz.

İlköğretimden bir örnek vermek gerekirse şöyle ifade edebiliriz. İki basamaklı iki doğal sayı düşünelim; bunlar 25 ile 12 olsun. Bu sayılar çarpılırken işlemsel anlamda su kural geçerlidir. İkinci sayının birler basamağındaki rakam ile birinci sayının birler basamağındaki rakam çarpılır. Sonuç yine bir rakamsa aynen yazılır. Eger sayı ise eldesi alınır ve geriye kalan rakam yazılır. Sonra yine ikinci sayının birler basamağındaki rakam ile birinci sayının onlar basamağındaki rakam çarpılır ve elde eklenerek yazılır . İkinci kısım içinse, sırayla ikinci sayının onlar basamağındaki rakam ile birinci sayının birler basamağındaki rakam ve onlar basamağındaki rakamlar çarpılır ifade ettigimiz kural çercevesinde yazılır. Yalnız bu yazılma yapılırken çarpım sonucu bir basamak sola doğru kaydırılır ve daha sonrasında da toplama yapılır. Bu işlemsel anlamda tüm matematik öğretmenlerinin bildiği ve ifade edebildiği bir kuraldır. Aşağıdaki örnekte olduğu gibi,

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ 25 \\ \hline 300 \end{array}$$

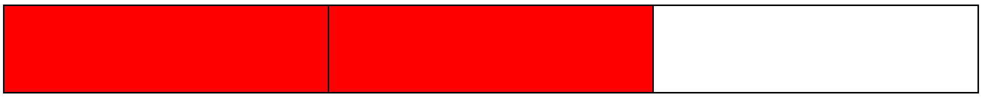
Kavramsal anlamda ise bir matematik öğretmeni neden ikinci çarpımı bir basamak sola kaydırabiliyoruz? sorusunu yanıtlayabilmelidir. Yani aslında ikinci çarpım sonucunun (ikinci sayının onlar basamağındaki rakam ile birinci sayının hem birler hemde onlar basağındaki rakamların çarpım sonucu) iki basamaklı değil üç basamaklı bir sayıya tekabul ettiğini bilmelidir. Örnek üzerinden konuşacak olursak, ikinci çarpımın sonucu aslında 25 değil 250'dir. Çünkü ikinci sayının onlar basamağındaki rakam ile birinci sayının çarpımının sonucudur. Birinci sayı yani 25 iki basamaklı bir sayıdır ve ikinci sayının onlar basamağının degeri ise 10 dur. Bu durumda 25 ile 10 çarpılmış sonuç 250 çıkmıştır. Neden bir basamak sola kaydırdığımızın sebebine gelince ise bu matematiğin gelişim süreci içerisinde daha pratik olduğu düşünülerek elde edilmiştir. Yani "0" yazıp yazmamamızın toplam sonuç üzerinde etkisi yoktur. İlköğretim öğretmenlerinin bu açıklamayı öğrencilerine yapabilecek bilgiye sahip olmaları gerekmektedir aksi takdirde bu işlem salt bir kural şeklinde öğrenciye ifade edilecek ve ezber öğretime sebep olacaktır.

Öğretmenlerin bu açıklamayı yapabilmesinden daha da önemli olanı ise bu kavramın farkındalığında olabilmesi ve öğrencilerini duyabilmeleridir. Bu ne anlama gelmektedir? Aşağıdaki farklı çözümleri iki öğrencinin yaptığını düşünelim: Kavramın farkında olmayan bir öğretmen büyük ihtimalle A'daki çözümü yanlış olarak nitelendirebilecek ve çarpmaya soldan başlayamayacağımızı ifade edebilecektir. Aynı şekilde B'deki çözümünde gercek anlamda çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğinden kaynaklandığını ve her iki çözümün de onluk sistem kavramını içselleştirmis çocuklar tarafından gerceklestirilmiş çözümler olabileceğini göremeyebilecektir. Bu ise, öğrencilerin matematiksel olarak konuştuğu bir ortamda öğretmenlerin onları duyamaması anlamına gelecektir. İşte Shulman'ın (1986) bahsettiği öğretmenlerin kavramların farklı gösterimlerini anlayabilmeleri ifadesine bir örnekleme budur.

$$\text{A)}\ \begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 250 \\ 50 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \text{B)}\ \begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 10 \\ 40 \\ 50 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array}$$

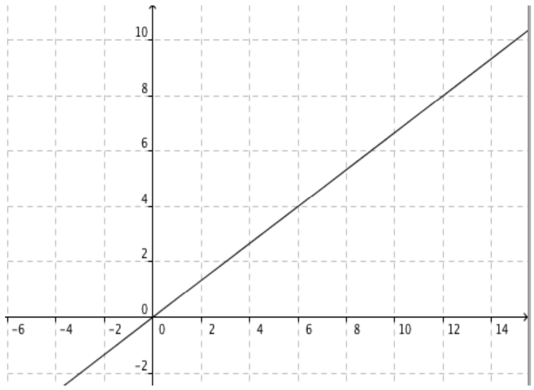
Yani, öğretmenlerin bilmeleri gereken matematiğin içerisinde kavram bilgisi yeterli olamayacaktr. Yukarıdaki örneklemede verilmeye çalışıldığı üzere, belirli yaş gruplarındaki öğrencilerin matematiksel olarak nasıl düşündüklerinin bilgisine de sahip olabilmeleri gerekmektedir (NCTM, 1989, 2000). Ayrıca, araştırmacıların vurguladığı üzere, öğretmenlerin bu kavramların nasıl öğrenciye kazandırabilecegi noktasında da ciddi materyal bilgisine ve metod bilgisine sahip olabilmeleri gerekmektedir (örneğin, Van de Walle, 2000; Kamii, Lewis & Kirkland, 2001; Thompson, 1994; Labinovicz, 1988). Materyal bilgisi ve metod bilgisinden daha sonraki paragraflarda bahsedilecektir.

İlköğretim öğretmenlerinin bilmesi gereken matematiğe örnek olabilecek başka bir kavram da kesirli sayılardır. Kesirler, rasyonel sayıların bir alt kavramıdır. Öyleki, kesirleri bir bütünün eş parçaları olarak tanımlarsak, kesirlerin paydaları bütünün kaç eş parçaya ayrıldığını ve payları ise bu eş parçalardan elimizde kaç tane olduğunu ifade eder (Van de Walle, 2000). Bu durumda kesirler bize bir miktarı belirtir ve parça-bütün ilişkisini ifade eder. Diğer bir deyişle, kesir bir bütünün bölündüğü eş parça sayısı ile her bir eş parçanın miktarı arasındaki ters ilişkiyi ifade eden matematiksel gösterimdir (Van de Walle, 2000). Örnek verecek olursak, $\frac{2}{3}$ kesri, bir bütünün üç eş parçasından 2 sini göstermektedir [Bkz. Şekil 1].



Şekil 1. $\frac{2}{3}$ kesrinin gösterimi

Oysaki rasyonel sayıların 4 tane daha farklı alt kavramı bulunmaktadır. Bunlardan biri "oran"dır. Oran, kesirli sayıların gösterimleri ile aynı şekilde ifade edilebilmesine karşın, iki çokluk arasında bir çarpımsal ilişkiyi ifade etmektedir (Heinz, 2000). Bu durumda, oranı ifade eden kesirsel gösterim parça-parça veya parça- bütün ilişkişi içerisinde verilebilir. Örneğin, oran olarak $\frac{2}{3}$ ifadesi, $y=\frac{2}{3}x$ doğrusuna tekabül etmektedir [Bkz. Şekil 2] (Kaput & West, 1994).



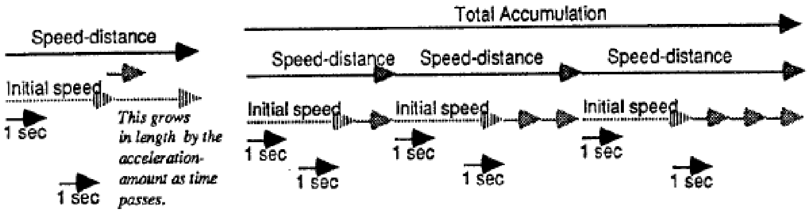
Şekil 2. $\frac{2}{3}$ oranının gösterimi

Bu ise şu anlama gelmektedir: Kesirlerin oran'dan en bariz kavramsal farklarından biri kesirlerin parça-bütün ilişkisini ifade etmesi gerektiğidir; diğer bir kavramsal fark ise bir miktarın matematiksel gösterimi oluşudur. Oysaki, oran bir ilişkiyi gosterir ve parça-parça ilişkisini de ifade edebilir (Heinz, 2000; Karagöz Akar, 2007). Öğretmenlerin bu kavramlar arasındaki farkları ve benzerlikleri bilmeleri gerekmektedir ki öğrencilerinin matematik bilgisini (salt) mutlak miktar (mesela kesirler) ve görece (relative) ilişki (çarpımsal ilişki) (mesela oran) ile ilgili örneklendirmeler ile güçlendirebilsinler. İlkögretim matematik öğretmeni adayları ile yapılan çalışmalarda, öğretmen adaylarının oran'ı iki büyüklük arasındaki çarpımsal bir ilişki olarak göremedikleri ortaya çıkmıştır (Simon & Blume, 1994). Bu çok ciddi bir sorundur. En temel anlamda bu iki kavram arasındaki benzerlik (gösterim benzerliği) ve farklılıkların (kavram) farkında olamayan öğretmenlerin rasyonel sayı kavramını öğrencilere benimsetebilmeleri noktasında ciddi sorunlar çıkabilecektir. Sadece çözümsel olarak işlemleri yapabilen ve gerçekten ileri matematik sevisyesinde oran ile kesirli sayıları ayırt etmeleri gereken durumlarda sorun yaşayabilen öğrencilerin yetişmesine sebep olabileceklerdir (Karagöz Akar, 2007). Araştırmalar her ne kadar öğretmen adaylarının bu kavram farklılıklarına sahip olmadıklarını gösterse de yine de şu soru akla gelebilmektedir: Peki bilen öğretmen nasıl davranmalıdır?

Bahsettiğimiz üzere kesirler bir miktarın göstergeleridir ve parça-bütün ilişkisi içerisinde verilmelidir. Bu durumda öğretmen kağıt katlama yöntemi ile öğrencilere kesir kavramının verilebileceği ve hatta bu yöntemin en iyi yöntemlerden biri olduğu bilgisine sahip olmalıdır (Van de Walle, 2000). Kağıt katlama yönteminde aynı büyüklükte olan kağıtlar öğrencilere iki eşit, üç eşit, dört eşit, beş eşit parçaya (on iki esit parçaya kadar) eşit parçalardan her birinin bir birim kesire tekabül ettiği ifade edilerek verilince, öğrencilerde yukarıda belirttiğimiz kesir kavramı oluşabilmektedir. Zira, öğrenciler her katlamada daha az miktarda eşit parçalar elde ettiklerini fark edecek ve ne kadar çok bölünme varsa o kadar az miktar elde edilir sonucunu kendileri çıkarım yapacaklardır. Ayrıca, hep aynı miktarda büyüklüğü eşit parçalara ayırdıklarının farkına vardıkları için onlarda "bütün kavramı" da oluşacaktır. Kendilerinin vardığı bu çıkarımlar ile kesirlerin sıralanması olası olacaktır (Van we Walle, 2000). Aynı şekilde, aynı öğretmenimiz oran kavramını işlerken bu gösterimi yani kağıt katlama gösterimini uygulamaması gerektiğini de bilmek durumdadır. Sebebi ise, oran bir miktara tekabül etmemektedir, oran iki büyüklük arasındaki bir ilişkiyi ifade etmektedir. Öğretmenimiz bu sefer de örneğin farklı iki renkte boncuk kullanarak bu kavramı konuşabilecektir. Mesela, öğretmenimiz öğrencilerinden her iki kırmızı boncuğa karşılık üç beyaz boncuk kullanarak iki kırmızı boncuk ve üç beyaz boncuk arasındaki değişmez ilişkiyi farklı sayıda boncuklar üzerinden gösterebilmelerini isteyebilir. Hatta bu gösterimleri veri tablosu yaparak ifade edebilmelerini bile isteyebilir. Daha sonraki süreçlerde ise, öğremenimiz öğrencilerinden bu ilişkiyi grafiksel olarak da ifade etmelerini isteyebilecektir. Bir ilköğretim öğretmeninin bu kavramları nasıl verebileceğinin en temel anlamda bilgisini bilmesinden ayrı olarak hangi gösterimin diğer gösterimlere göre daha iyi olabilecegi bilgisine de sahip olması ve öğrencilerinin bilgi seviyesine göre bu gösterimleri kullanabilmesi de gerekmektedir. Bu iki örneklemede olduğu üzere boncuklar ile kesirlerin verilmesi de uygundur ama öğrencilerin sınıf seviyelerine göre zorluk yaşamaları olasılığı da büyük olacaktır (Thompson, 1994) ve kavram yanılgılarına sebebiyet verebilecektir (Alacacı, 2010). İşte, matematik öğretmenlerini yetiştiren eğitim fakültelerinin ve matematik eğitimi bilgisinin verildiği metod derslerinin önemi en temel anlamda buradan kaynaklanmaktadır.

İlköğretim matematikte öğretmenlerin bilmeleri gereken matematiğin doğasına başka bir örnekleme vermek istersek, aritmetik ortalama ve oran kavramını konuşabiliriz. Aritmetik ortalama oran kavramı ile ilişkilidir. Diğer bir deyişle, ölçümsel oran kavramına bir örnektir. Ölçümsel orandan kasıt, bir büyüklüğün bir birimi ile diğer bir büyüklüğün bir miktarı arasındaki ilişkinin ifadesidir (Thompson, 1994). Ama, aritmetik ortalamanın sadece ölçümsel oran anlamı yoktur. Aritmetik ortalama aynı zamanda denge kavramını da içerir (Flores, 2008). Bu ne anlama gelmektedir? Bir analoji ile açıklamak istersek aritmetik ortalama elimizdeki veride bir anlamda Robin Hood görevi görmektedir. Diğer bir deyişle, cok olandan alıp az olana vermekte ve zengin ile fakir arasinda eşit bir dağılım yapmaktadır, böylelikle verideki adaletsiz dağılımı dengeye getirmektedir. Bu dağılım sağlanırken de her bir verinin ortalama değerden uzaklığı dağıttığı miktar ile aynı olmaktadır. Dengeden kasıt diğer bir söyleyişle tüm verilerin ortalama değere olan uzaklıklarının sağ ve sol toplamlarının eşit olması anlamına gelmektedir. Öğretmenlerin işte tamda bu kavram farklılıklarını bilmeleri gerekmektedir. Aksi takdirde, öğrencilerine aritmetik ortalamayı salt formülsel bir ifade ile anlatabileceklerdir. Daha sonraki süreçlerde ise maalesef öğrenciler farklı kavramlar sanki birbirleriyle ilişki içerisinde değiller de tamamen ayrık olarak matematiği olusturmaktadırlar yanılgısına sahip olacaklardır (Hiebert, 1986).

Öğretmenlerin bilmeleri gereken matematiğin doğasına lise seviyesinde örnekler vermek istersek, fonksiyonlardan bahsedebiliriz. Matematikçi ve matematik eğitimci araştırmacılar, fonksiyonların iki türlü kavramsallaştırılmasından bahsetmektedirler. Statik ve dinamik olarak (Dubinsky, Schoenfeld, & Kaput, 1994). Statik anlamda fonksiyonların kavramsallaştırılması iki küme arasında ilk kümenin elemanlarının bir ve yalnız bir kez kullanıldığı ve ilk kümenin elemanlarının hepsinin kullanıldığı bir bağıntı olarak ifade edilmesidir. Örneğin, f(x)=2x+5 ifadesinin $A=\{1,2,3\}$ kümesinin elemanlarını B={7, 9, 11} kümesinin elemanları ile eşleştirdiğini bilmesidir. Halbuki, ön analiz ve analizde fonksiyonların statik anlamdaki tanımlamalarından öteye dinamik anlamda tanımlamaları kullanılmaktadır. Bu ne anlama gelmektedir? Öğrencilerin, fonksiyonları oluşturan değişkenlerin birbirlerine göre bağıl (relative) konumlamalarını anlamaları (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002) ve bunu görsel olarak düşünebilmeleridir. Diğer bir deyişle, değişkenlerdeki eş zamanlı değişimleri düşünebilmeleri (Thompson, 1994) bu değişimlerin değişkenlerin birbirleri üzerine nasıl bir etki yaptığını kavrayabilmeleridir.



Şekil 3. Bir arabanın herbir saniyelik süreç içerisindeki ivmesine bağlı olarak hızının değişimi (Thompson, 1994, s.237)*

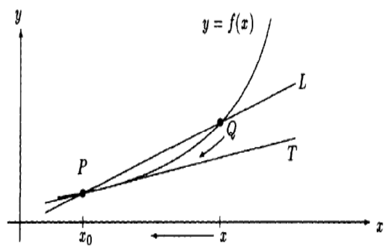
*Şekilde Speed-distance "her bir birimlik yoldaki hız"; initial speed "ilk hız"; 1 sec "bir saniye"; total accumulation "toplam hız miktarı"na tekabül etmektedir. Ayrıca, "this grows in length by the acceleration-amount as time passes" ifadesi "ilk hız miktarının ivmenin süreç içerisindeki miktarına bağlı olarak arttığını" açıklamaktadır.

Şekilde şu açıklanmaktadır: bir arabanın her bir saniyelik süreç içerisindeki ivmesi, hızdaki değişimin hızını bize belirtmektedir. Bu ise bize her saniyelik süreç içerisindeki ivmelerin miktarlarini vermektedir ve bu miktarlarin toplamı da yol bitiminde arabanın toplamdaki hızının ne kadar hızlandığını yani ne kadar ivmelendigini ifade etmektedir. Bu örneklemedeki değişkenler, zaman ve hız olmaktadır ve eş zamanlı değişim ise saniyelik süreçler içerisindeki hızdaki değişime tekabül etmektedir. Yani, hızdaki değişimin saniyelik süreçler cinsinden değerini düşünebilmeyi ifade etmektedir. İşte bu örneklemede olduğu üzere, öğrencilerin fonksiyon kavramını (fonksiyon olarak hız zaman grafiği verilen bir arabanın hareketini düşünelim) eş zamanlı değişim (kovaryasyon) üzerinden anlayabilmeleri daha sonraki kavramları, (türev ve integral kavramlarını) anlayabilmelerini de kolaylaştıracaktır (Dubinksy, Schoenfeld & Kaput, 1994).

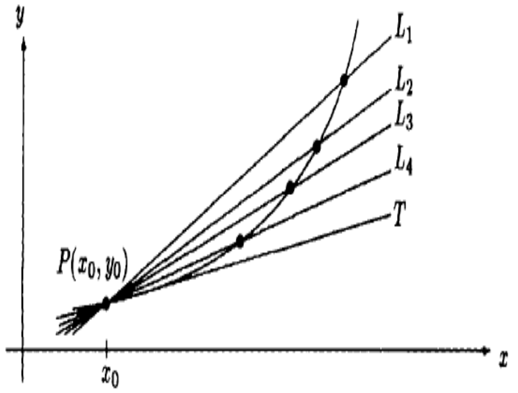
Yani diğer bir deyişle, matematik öğretmenlerinin bilmeleri gereken matematiğin doğası kavramların salt matematiksel ifadelerinden de öteye, özellikle lise seviyesinde temel matematik kavramlarının farkındalığında olmaları ve bu temel kavramların disiplinler arası anlamlarını da kullanabilmeleri demektir. Örneğin, türevi ifade edebilmek için ortalama hız, sabit hız ve anlık hız kavramlarının arasındaki ilişkiyi tanımlayabilmeleri gerekmektedir (Thompson, 2008). Anlık hızın tanımı zaman aralığı sıfır değerine yaklaşırken ortalama hızın limitine eşittir (Passow, 1996) Aynı şekilde, türevin tanımı ise şöyledir: "Bir f fonksiyonu belli bir aralıkta tanımlı olsun. Bu fonksiyonun aynı aralıktaki bir "x_0"noktasındaki limiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

belli bir değere eşit çıkıyor ise, bu limit değerine f fonksiyonunun $x_0$noktasındaki türevi” denir (Dabbah, Nurlu & Önder, 1992, s. 87). Bu ifadeyi, x değerlerindeki değişim miktarı sıfıra yaklaşırken, f fonksiyonunun görüntüsündeki değişimin x değerlerindeki değişime göre limitinin değeri, f fonksiyonunun görüntüsündeki değişimin hızına tekabül eder şeklinde ifade edebilmektir. Daha öncesinde de belirttiğimiz üzere, bilimsel anlamda, fen edebiyat fakültesi matematik bölüm mezunu veya eğitim fakültesi matematik eğitimi bölüm mezunu öğretmenlerin, diğer bir deyişle matematiği anlamış olduğu kabul edilen ve öğretim yapmasına izin verilen kişilerin, bu yetkinliklerin farkında olabilmeleri beklenir. Yalnız, burada asıl önemli olan öğretmenlerin matematik kavramlarını öğrenciye nasıl kazandırılabileceği noktasında bilgi sahibi olabilmeleridir. Yani, türevin anlık hızın tanımı ile verilmesinden öteye (bir matematikçinin bu bilgiyi kendisi için ve bilim için kavramsallaştırmasından öteye), yukarıda değindiğimiz üzere, değişim oranları düşündürtülerek öğrenciye kazandırılmasıdır (Bingölbalı, 2008). Yani, öğretmenlerimiz matematik öğretimi için hazırlanmış özel donanımlı paket programların yardımı ile aşağıda verilen gösterimleri öğrencilerle paylaşarak bu kavramı kavratabilmelidirler.



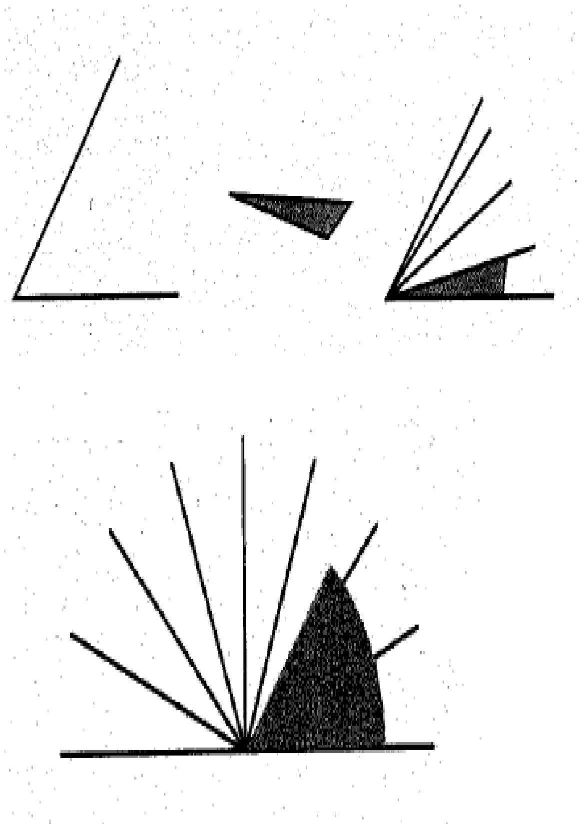
Şekil 4. Sekantların grafiği



Şekil 5. Sekantların teğete dönüşümü (asağıdaki grafik)

Şekillerde ifade edilen, bir x_0 noktasındaki türev, bir eğriye bir nokta etrafındaki farklı noktalardan çizilen sekantların içerisinde o noktaya en yakın uzaklıkta çizilen sekanta denk gelmektedir. Bu uzaklık o kadar yakındır ki, o noktadan teğet ile eğri arasında başka bir doğru çizebilmek nerdeyse imkansızdır. Bu yüzden teğet haline gelmektedir (Eski Yunan Matematiği). Bahsedilen paket programların olmaması durumunda ise, fonksiyonların tablo değerleri yardımı ile de bu kavram öğrenciler ile paylaşılabilir. Önemli olan öğretmenlerin öğrencilerinin bilgi seviyeleri ve farklı öğrenme şekillerini tanıyabilmeleri ve bunu yapabilmek için de onları dinleyebilmeleridir. Yani öğretmenlerin bu kavramlar üzerinde öğrencilerin nasıl düşünebileceklerini tasavvur edebilmeleri ve bunun üzerinden öğrencilerine ulaşmayı sağlayabilmeleridir.

Son olarak geometriden bir örnek vermek istersek, "açı" kavramı ilköğretimden ortaöğretime kadar hemen hemen her seviyede verilmektedir. Açı "başlangıç noktaları aynı olan iki ışın üzerindeki noktaların kümesidir" (MEB, Talim Terbiye Kurulu, 9. Sınıf geometri ders öğretim programı, s.39). Bu tanımlamayı konuşurken öğretmenlerimizin öğrencilerine açıya statik olarak değilde özellikle dinamik olarak bakıldığını fark ettirmeleri gerekmektedir. Açının dinamik yapısının konuşulmasının önemi daha sonraki dönemlerde trigometri öğretimi yapılırken ve pre-analiz konuları işlenirken özellikle fark edilecektir. O halde, öğretmenlerimiz ilköğretim düzeyinden başlayarak ortaöğretim düzeyine kadar dinamik anlamda açı kavramını işlemek durumdadırlar. Dinamiklikten kasıt nedir? Açı ölçümünün bir nokta etrafındaki dönme miktarına eşit olduğudur. Bu dönme miktarının değeri "derece" ile ifade edilmektedir (Van de Walle, 2000). Öğretmenlerimizin işte bu kavramı verebilmeleri için en temel anlamda öğrencilerine ister geometri çizimlerini baz alan paket programlar yardımı ile ister kağıt katlamalar ile isterse de iletki (açıölçer) yardımı ile aşağıda verilmeye calışıldığı üzere açının dönme miktarı kavramını verebilmeleri gerekmektedir. Bu gösterimler ve öğrencilerin kendi çıkarımları sadece açı kavramının oturmasına değil kavram yanılgılarının giderilmesine de yardımcı olacaktır. Zira araştırmalar göstermektedirki statik anlamda ve sadece tanımsal olarak açı kavramı verilmiş öğrenciler, iki ışın arasında kalan açıklık büyüdükçe açının da büyüdügü ve açıklık küçüldükçe açının da küçüldüğü yanılsamasına sahip olabilmektedirler. Oysaki aynı iki ışın arasındaki açıklık miktarı, iki ışının kesiştiği noktadaki dönme miktarına eşit olduğu için açının değeri ile açıklığın arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Bu sadece gorsel anlamda bir yanılsamadır. Tanımda bahsedilen "iki ışın üzerindeki noktaların kümesi" ifadesi bu yüzden çok önem kazanmaktadır çünkü ışınların üzerindeki noktalar birbirinden bağımsız olarak hareket etmemekledirler ve dolayısı ile de dönme miktarı açıklığa bağlı kalmamaktadır.



Şekil 5. Açı'nın dönme miktarı olarak gösterimi (Van de Walle, 2000, s.349)

Açı kavramını dönme miktarının büyüklüğü olarak öğrenen öğrenciler daha sonra örneğin ortaöğretim matematik eğitiminde öğrenecekleri esas ölçü ve Reel Sayılarda tanımlı trigonometrik fonksiyonların anlaşılmasında da zorluk çekmeyeceklerdir. Zira, dönüşlerin (açıların) sadece 30, 45, 60, 90, vs. belirli değerlerden oluşmadığını aslında 0 ile 360 derece arasındaki tüm reel sayıları içerdiğinin farkına varabileceklerdir.

Bu çalışma içerisinde sadece belli temel kavramlara değinebildik. Bu temel kavramlar gibi ilköğretimden başlayarak ortaöğretim ve hatta üniversite yıllarına dayanan eğitim sürecinde bir çok temel kavram bulunmaktadır. Matematik öğretmenlerinin bu temel kavramların farkında olmaları ile birlikte, bu temel kavramları öğrencilere nasıl öğretebileceklerinin bilgisi, öğrencilerin belli yaş ve sınıf düzeylerinde nasıl düşünebildikleri bilgisi, bu temel kavramları en iyi şekilde ifade edebilecek etkinlikler-materyaller ve teknoloji bilgisi, bu temel kavramların tüm eğitim süreci içerisinde birbirleri ile aralarındaki ilişki (farklılıklar ve benzerlikler açısından), bu temel kavramları öğrencilere verebilmek için sınıf içerisinde ne tür sorular sorulması gerektiği bilgisi, işlemlerin ve kavramların birbirlerini nasıl tamamladıkları bilgisi, sınıf içi öğretmen ve öğrencilerin matematiksel olarak nasıl davranmaları gerektiği bilgisi, hangi durumlarda grup calışmaları ve hangi durumlarda kişisel çalısmalar yaptırılması gerektiği bilgisi, ölçme ve değerlendirmenin öğrenim süreci içerisindeki yeri, çesitleri ve nasıl uygulanması gerektiğinin bilgisine ihtiyaçları vardır. Bu bağlamda, bu bilgileri alabilecekleri ve onları 21. yüzyıla donanımlı birer yetişkin olarak eğitebilecek ve 21. yüzyıla donanımlı kişiler yetiştirmelerine yardımcı olabilecek eğitim kurumlarında yetiştirilmeleri gerekmektedir. Bu kurumlar ise, tüm bu bahsedilen bilgilerin öğretmenlere kazandırılması gerektiği noktasında bilince sahip akademisyenleri barındıran eğitim fakülteleridir.

Kaynaklar

Adams, T. (1998). Prospective elementary teachers' mathematics subject matter knowledge: The real number system. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 35-48.

Alacacı, C. (2010). Öğrencilerin kesir konusundaki kavram yanılgıları, *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*, E. Bingölbalı & F.M. Özmantar, (Haz.) (s.63-95). Ankara: Pegem Yayıncılık

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Ball, D. (1990). The mathematical understandings that preservice teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*. 449-466.

Ball, D.L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40-48.

Bingölbalı, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler, *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri*, M.F. Özmantar, E. Bingolbalı, & H.Akkoç (Haz.) (s. 223-255). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D., & Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 194-222.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Dabbah, M., Nurlu, Z., & Önder, H.A. (1992). *Calculus 1 for math students*.Ankara: Middle East Technical University.

Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. (1994). *Research in collegiate mathematics education I.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Ferguson, R. F., & Womack, S. T. (1993). The impact of subject matter and education coursework on teaching performance. *Journal of Teacher Education.* 44(1), 55-63.

Flores, A. (2008). The mean as the balance point: thought experiments with measuring sticks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (6), 741 – 748.

Graeber, A.O., Tirosh, D., Glover, R. (1989). Preservice teachers' mistconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 95-102.

Guyton, E., & Farokhi, E. (1987). Relationships among acadernic performance, basic skills, subject matter knowledge and teaching skills of teacher educalion graduates. *Journal of Teacher Education, 38*,37-42.

Heinz, K. R. (2000). *Conceptions of ratio in a class or preservice and practicing Teachers.* Yayınlanmamış doktora tezi, Penn State University, State College.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. In James, H (Haz.). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum.

Kamii, C., Lewis, B. A. & Kirkland, L. D. (2001). Fluency in subtraction compared with addition. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 33-42.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. G. Harel & J. Confrey (Haz.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 235-187). Albany: State University of New York.

Karagöz Akar, G. (2007). *Conceptions of between ratios and within ratios*. Yayınlanmamış doktora tezi. The Pennsylvania State University.

Karagöz Akar, G. (2010). Oran konusunun kavramsal öğreniminde öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklar, olası kavram yanılgıları ve çözüm önerileri, *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri*, E. Bingölbalı & F. M. Özmantar (Haz.) (s.267-289). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Labinovicz, E. (1985). *Learning from children: New beginnings for teaching numerical thinking*. Addison & Westly: Menlo Park, California.

Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. J.S.a.B.Schappelle (Haz.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades.* (s. 167-198). Albany: State University of New York.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. H. James & B. Merlyn (Haz.), *Number concepts and operations in the middle grades* (s. 93- 119). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MEB,Talim Terbiye Kurulu. (2010). '9. Sınıf geometri dersi öğretim programı', s.39. ttkb.meb.gov.tr adresinden alınmıştır.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125–145.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA:Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Passow, E. (1996). *Understanding calculus concepts.* ABD: McGraw-Hill Company.

Shulman, L. S. (1987) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 183-197.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 233-254.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningson, M. A., & Silver, E. A. (1999). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 229-274.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts or rate. G. Harel & J. Confrey (Haz.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 179-234). New York, Albany: New York Press.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Haz.), *Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Cilt 1, s. 45-64). Morélia, Mexico: PME.

Wilson, S., Floden, R., & Ferrini-Mundy, J. (2001). Teacher preparation research: Current knowledge, gaps, and recommendations. A research report prepared for the U.S. Department of Education. University of Washington, Center for the Study of Teaching and Policy, Seattle.

Van de Walle, J.A. (2008). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* Boston: Pearson Custom Publishing.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

What Should a Mathematics Teacher Know? The Difference between Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge

Abstract

In the 1980s, research in the education field has shown both theoretically and empirically that content knowledge and pedagocical content knowledge need to be taken into consideration separately from each other. Findings have pushed the department of education in different fields to take serious reforms in their administration in terms of the means to provide teachers for future challenges. The purpose of this study is to discuss the qualitative and the quantitative characteristics of the nature of the knowledge that a mathematics teacher candidate needs to hold prior to his/her field experience. The discussion will be based on both the national and international research on content knowledge and pedagocical content knowledge of mathematics teachers. Research findings prove that in todayds world education departments are to be given a core role in the education of mathematics teachers of future generations.

Keywords: Mathematics content knowledge, mathematics pedagogical knowledge