

HİPERBOLİK DÜZLEMDE İKİ PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Muhsin ÇELİK (*mcelik@sakarya.edu.tr*)

Sakarya Üniversitesi, Adapazarı Meslek Yüksek Okulu, Sakarya, Türkiye

Mehmet Ali GÜNGÖR (*agungor@sakarya.edu.tr*)

Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye

ÖZET

Bu makalede, hiperbolik düzlemde iki parametrelİ homotetik hareketler araştırıldı. Aynı zamanda $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda iki parametrelİ hiperbolik homotetik hareketin sürüklenme hızı, pol doğruları, Hodografi ve ivme polleri çalışıldı. Son olarak homotetik sabiti h nin 1 olma durumunun bu çalışmanın özel bir hali kaldığı görülecektir.

Anahtar Kelimeler: *İki Parametrelİ Hareket, Hiperbolik Hareket, Homotetik Hareket, Düzlem Kinematiği, Robotik.*
AMS 2010 53A17, 53A35, 53A40, 68T40

A STUDY ON THE TWO PARAMETER HOMOTHETIC MOTIONS IN HYPERBOLIC PLANE

Muhsin ÇELİK (*mcelik@sakarya.edu.tr*)

Sakarya University, Vocational High School of Adapazari, Sakarya, Turkey

Mehmet Ali GÜNGÖR (*agungor@sakarya.edu.tr*)

Sakarya University, Department of Mathematics, Sakarya, Turkey

ABSTRACT

In this article, we investigate two parameter homothetic motions in the hyperbolic plane. Also, we study sliding velocity, pole lines, Hodograph and acceleration poles of two parameter hyperbolic homothetic motions at $\forall(\lambda, \mu)$ positions. Finally, the case of the homothetic scale h is equal to 1, will appear as a special case of this study.

Keywords: *Two Parameter Motion, Hyperbolic Motion, Homothetic Motion, Planar Kinematics, Robotics.*

AMS 2010 53A17, 53A35, 53A40, 68T40

1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarından bağımsız olarak hareketin geometrisini inceleyen, bu hareketin sebeplerini göz önüne almaksızın nokta veya noktalar sisteminin hareketini tanımlayan klasik mekaniğin bir alt dalıdır. Ayrıca kinematik noktalar, doğrular ve diğer geometrik objelerin yörüngeleri, onların hızı ve ivmesi gibi diferansiyel özellikleriyle ilgilenir. Kinematik, biomekanik ve astrofizik gibi birçok bilim dalında kullanım alanına sahiptir. Örneğin astrofizikte kinematik, göksel nesnelere ve sistemlerin hareketini tanımlar, [10].

Hiperbolik hareket özel görelilik kuramında sabit ivmeli bir objenin hareketidir. Burada hareketin hiperbolik olarak adlandırılmasının sebebi, uzay-zaman boyunca bir objenin izlediği yörüngenin denkleminin bir hiperbol denklemini belirtmesidir. Geometride ise hiperbolik hareketler hiperbolik uzayın izometrik otomorfizmalarıdır. Bu eşleme altında hiperbolik hareketler bir grup oluştururlar. Bu grup ise hiperbolik uzayı karakterize eder.

İki parametrelili hareketlerin matematik, fizik, mekanik ve robot kinematığında önemli uygulama alanları vardır. İki parametrelili düzlemsel hareketin türev denklemleri, hızları, ivmeleri ve pol noktaları H.R.Müller tarafından incelenmiştir, [7]. Lorentzian iki parametrelili düzlemsel hareketler M.K.Karacan tarafından çalışılmıştır, [6]. Ayrıca kompleks düzlemde iki parametrelili homotetik hareketler [9] ve Lorentzian iki parametrelili homotetik hareketler geniş bir şekilde incelenmiştir, [3]. Bir parametrelili hiperbolik düzlem hareketleri S.Yüce ve N.Kuruoğlu tarafından çalışılmıştır, [11]. S.Ersoy ve M.Akyiğit ise bir parametrelili hiperbolik düzlem hareketleri için Euler-Savary formülünü vermiştir, [5].

Bu çalışmada yukarıdaki çalışmalar göz önüne alınarak Hiperbolik düzlemde $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda iki parametrelili homotetik hareketin

sürüklenme hızı, pol doğruları, hodografi ve ivme polleri elde edildi. Ayrıca özel olarak homotetik sabitinin 1 olması halinde [2] de verilen sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmadaki amacımız hiperbolik düzlemde iki parametrelili homotetik hareketleri tanımlayarak bu alandaki çalışmalara katkı sağlamak ve hiperbolik uzayda iki parametrelili homotetik hareket çalışmalarına temel oluşturmaktır.

2. Temel Kavramlar

Öncelikle hiperbolik sayı kümesi için $j \neq \pm 1$ özelliğine sahip herhangi bir j sayısını ele alalım. j sanal birim ve x ile y reel sayılar olmak üzere standart taban $\{1, j\}$ için hiperbolik sayı kümesi

$$H = R[j] = \{z = x + jy \mid x, y \in R, j^2 = -1\}$$

olarak tanımlanır. H hiperbolik sayı kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma

$$(x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v)$$

$$(x + jy)(u + jv) = (xu + yv) + j(xv + yu)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece H hiperbolik sayı kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli bir gruptur. $\bar{z} = x - jy$ ifadesine $z = x + jy$ nin hiperbolik eşleniği denir. $z, w \in H$ olmak üzere hiperbolik iç çarpım

$$\langle z, w \rangle = Re(z\bar{w}) = Re(\bar{z}w) = xu - yv$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\langle z, w \rangle = 0$ ise z ve w sayılarına hiperbolik ortogonaldir denir. z hiperbolik sayısının modülü

$$\|z\|_h = \sqrt{|\langle z, z \rangle|} = \sqrt{|z\bar{z}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

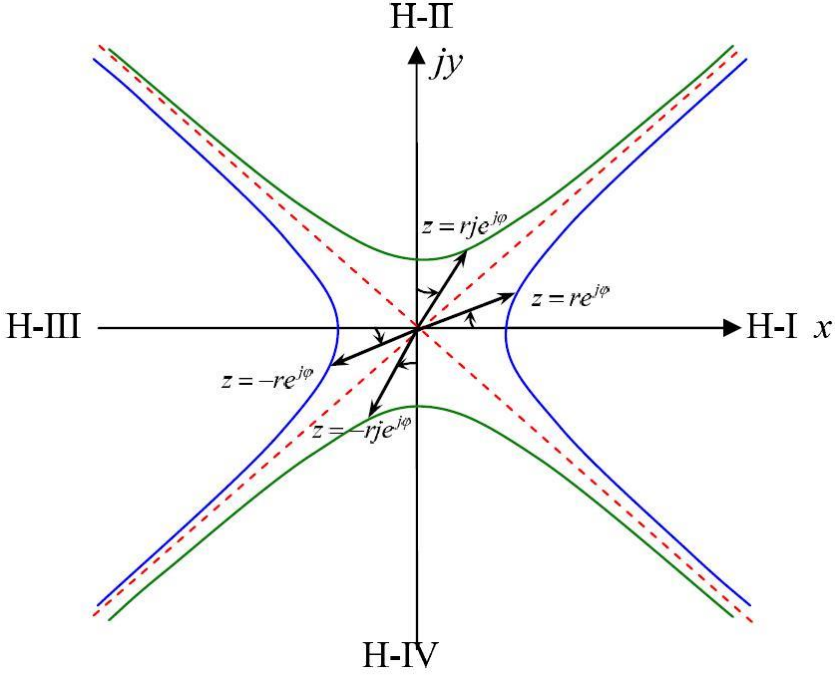
şeklinde tanımlanır, [11].

$\|z\|_h = r > 0$ denklemini sağlayan hiperbolik düzlemdeki bütün noktaların kümesi düzlemi dört bölgeye ayırır. Burada x ve y eksenlerinin ayırdığı alışılmış çeyrek düzlemlerden farklı olarak

$y = \pm x$ asimptotları ile birbirinden ayrılan H-I, H-II, H-III ve H-IV bölgeleri hiperbolik dördümler olarak adlandırılır, [8].

$z = x + jy$ hiperbolik sayısı H-I veya H-III bölgesinde ise

$$z = \pm r(\cosh\varphi + jsinh\varphi) = \pm re^{j\varphi},$$



Şekil 1. Hiperbolik Düzlem

$z = x + jy$ hiperbolik sayısı H-II veya H-IV bölgesinde ise

$$z = \pm r(\sinh\varphi + jcosh\varphi) = \pm rje^{j\varphi}$$

biçiminde yazılabilir, (Şekil 1).

$e^{j\varphi}$ tarafından tanımlanan bir hiperbolik dönme matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir, [1].

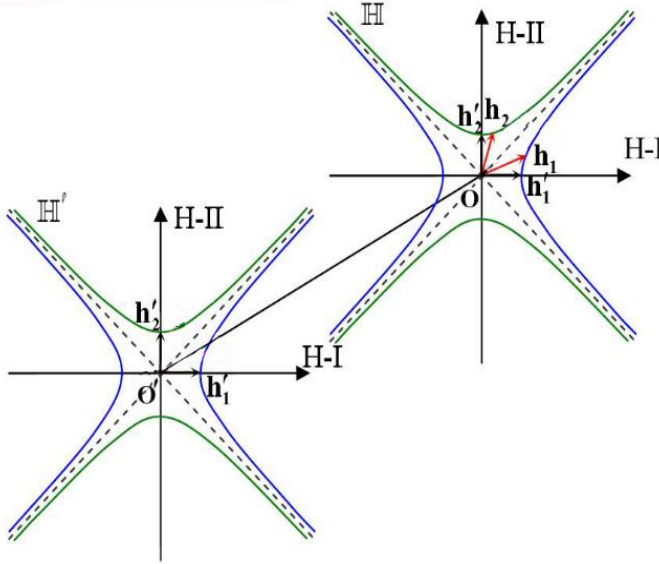
Hiperbolik iç çarpımın bir başka özelliği ise

$$\langle ze^{j\varphi}, we^{j\varphi} \rangle = \langle z, w \rangle$$

dir. Buna ek olarak j ile çarpılan bir vektör, hiperbolik ortogonal vektördür. Ayrıca bu kompleks düzlemde $i = e^{i(\pi/2)}$ çarpanına benzer bir rol oynar, [11].

3. İki Parametrelili Düzlemsel Hiperbolik Homotetik Hareket

H hareketli ve H' sabit hiperbolik düzlemlerine karşılık gelen koordinat sistemleri sırasıyla $\{O; h_1, h_2\}$ ve $\{O'; h'_1, h'_2\}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{O'O}$ vektörü $b = b_1 + jb_2$ hiperbolik sayısına göre tanımlanırsa hiperbolik iç çarpım uygulandığında $b_1^2 - b_2^2 > 0$ veya $b_1^2 - b_2^2 < 0$ durumlarında $\overrightarrow{O'O}$ vektörünün hiperbolik hareket düzlemi Şekil 2 ve Şekil 3 biçiminde gösterilebilir.



Şekil 2. $\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-I düzleminde

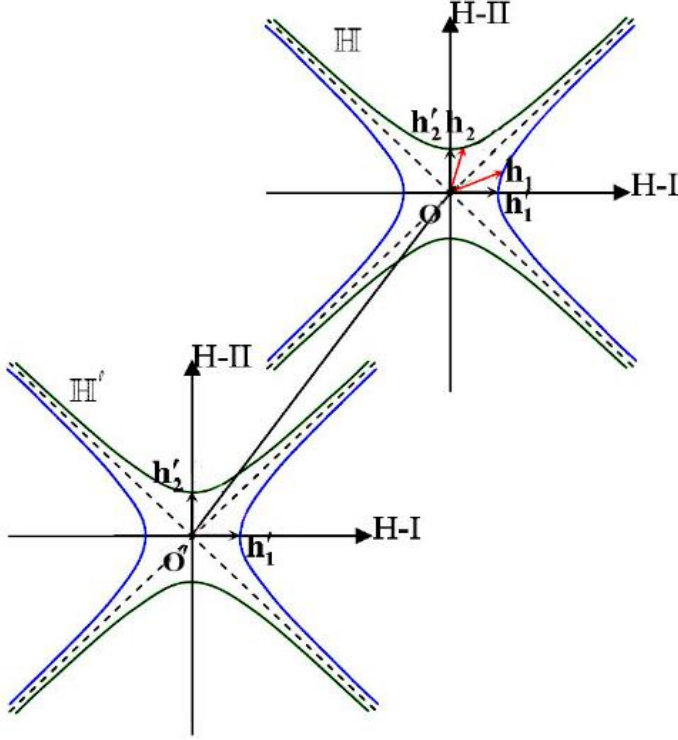
Burada $\overrightarrow{O'O} = C'(\lambda, \mu)$ ve $h(\lambda, \mu)$ homotetik sabit olmak üzere, genel iki parametrelili hiperbolik homotetik düzlem hareketi

$\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-I veya H-III hiperbolik dördülünde ise,

$$Y(\lambda, \mu) = h(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda, \mu)}X(\lambda, \mu) + C'(\lambda, \mu) \quad (1)$$

$\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-II veya H-IV hiperbolik dördülünde ise,

$$Y(\lambda, \mu) = h(\lambda, \mu)je^{j\varphi(\lambda, \mu)}X(\lambda, \mu) + C'(\lambda, \mu) \quad (2)$$



Şekil 3. $\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-II düzleminde

biçiminde iki şekilde verilir ve B_{II} ile gösterilir. Burada, $\varphi(\lambda, \mu)$ H nin H' ye göre dönme açısı ve $X(\lambda, \mu) = (X_1(\lambda, \mu), X_2(\lambda, \mu))$ ile $Y(\lambda, \mu) = (Y_1(\lambda, \mu), Y_2(\lambda, \mu))$, sırasıyla, hareketli ve sabit koordinat sistemlerine göre koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ , t zaman parametresi olmak üzere, t 'nin fonksiyonları olarak alınırsa, bir

parametrelili B_I hareketi elde edilir. Bu harekete B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketi denir. Burada,

$$Y(\lambda, \mu) = [Y_1(\lambda, \mu) Y_2(\lambda, \mu)]^T, X(\lambda, \mu) = [X_1(\lambda, \mu) X_2(\lambda, \mu)]^T \text{ ve}$$

$$C'(\lambda, \mu) = [A(\lambda, \mu) B(\lambda, \mu)]^T$$

şeklindedir. Genelliği bozmayacak şekilde $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda iki hiperbolik düzlemin çakışık olması için $\varphi(0,0) = A(0,0) = B(0,0) = 0$ alınabilir.

Biz bu çalışmada $\overrightarrow{O'O}$ vektörünün H-III hiperbolik dördülünde ve $X(\lambda, \mu)$ noktasının H-I hiperbolik dördülünde olduğunu kabul ederek (1) denklemi vasıtasıyla iki parametrelili hiperbolik homotetik hareketleri çalışacağız.

4. Hızlar ve Hızların Terkibi

$\overrightarrow{OO'} = C(\lambda, \mu)$ biçiminde alınır ve $\overrightarrow{OO'}$ vektörü H-III hiperbolik dördülünde olduğu göz önüne alınırsa,

$$C'(\lambda, \mu) = -C(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda, \mu)} \quad (3)$$

yazılabilir, (Şekil 1). (3) ifadesi (1) denklemine yerine yazılırsa,

$$Y(\lambda, \mu) = [h(\lambda, \mu)X(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu)]e^{j\varphi(\lambda, \mu)}$$

elde edilir. $X(\lambda, \mu)$ noktasının relatif hızı, $X(\lambda, \mu)$ noktasının hareketli H düzlemine göre hızıdır. Bu hız hareketli düzleme göre,

$$X_r = \dot{X}(\lambda, \mu) = X_\lambda \dot{\lambda} + X_\mu \dot{\mu} \quad (4)$$

ifadesiyle verilir. Relatif hızın sabit düzleme göre ifadesi

$$Y_r = X_r e^{j\varphi} = \dot{X}(\lambda, \mu)e^{j\varphi} = (X_\lambda \dot{\lambda} + X_\mu \dot{\mu})e^{j\varphi} \quad (5)$$

şeklindedir.

$X(\lambda, \mu)$ noktasının mutlak hızını bulmak için (1) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$Y_a = [\dot{h}(\lambda, \mu) + jh(\lambda, \mu)\dot{\varphi}(\lambda, \mu)]X(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda, \mu)}$$

$$-[\dot{C}(\lambda, \mu) + jC(\lambda, \mu)\dot{\phi}(\lambda, \mu)]e^{j\varphi(\lambda, \mu)} + h(\lambda, \mu)Y_r \quad (6)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$Y_f = [\dot{h}(\lambda, \mu) + jh(\lambda, \mu)\dot{\phi}(\lambda, \mu)]X(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda, \mu)} - [\dot{C}(\lambda, \mu) + jC(\lambda, \mu)\dot{\phi}(\lambda, \mu)]e^{j\varphi(\lambda, \mu)} \quad (7)$$

$X(\lambda, \mu)$ noktasının sürüklenme hız vektörüdür.

Eğer $X(\lambda, \mu)$ noktası H düzleminde sabit bir nokta ise $X_r = Y_r = 0$ dir. Bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

Böylece (5), (6) ve (7) denklemlerinden şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin bir $X(\lambda, \mu)$ noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızı arasındaki ilişki

$$Y_a = Y_f + h(\lambda, \mu)Y_r \quad (8)$$

şeklinde dir. Bundan sonra sırf dönme ve sırf öteleme durumundan kaçınmak için $\dot{\phi}(\lambda, \mu) = \varphi_\lambda \dot{\lambda} + \varphi_\mu \dot{\mu} \neq 0$ ve $h(\lambda, \mu) \neq \text{sabit}$ kabul edeceğiz.

Şimdi B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketinin $\forall(\lambda, \mu)$ anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalarını, yani pol noktalarını araştıralım. Sürüklenme hızı,

$$Y_f = [\dot{h} + jh\dot{\phi}]Xe^{j\varphi} - [\dot{C} + jC\dot{\phi}]e^{j\varphi} = 0$$

olduğundan, $\dot{h}^2 - h^2\dot{\phi}^2 \neq 0$ olmak üzere

$$X = P(P_1, P_2) = \frac{\dot{C}\dot{h} - Ch\dot{\phi}^2}{\dot{h}^2 - h^2\dot{\phi}^2} + j \frac{C\dot{h}\dot{\theta} - \dot{C}h\dot{\phi}}{\dot{h}^2 - h^2\dot{\phi}^2}$$

olarak bulunur. P , B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin pol noktasıdır. $X(\lambda, \mu)$ noktasının (7) denkleminde verilen sürüklenme hızını $P(P_1, P_2)$ pol noktası ile ifade etmek için

$$P = \frac{\dot{C} + jC\dot{\varphi}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}}$$

eşitliğinden \dot{C} çekilir ve (7) denkleminde yerine yazılırsa

$$Y_f = (\dot{h} + jh\dot{\varphi})(X - P)e^{j\varphi} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin hareketli düzlemdeki pol noktası $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. $P(P_1, P_2)$ pol noktası ve $C = \begin{bmatrix} -Ae^{-j\varphi} \\ -Be^{-j\varphi} \end{bmatrix}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -\dot{A}e^{-j\varphi} + j\dot{\theta}Ae^{-j\varphi} \\ -\dot{B}e^{-j\varphi} + j\dot{\theta}Be^{-j\varphi} \end{bmatrix} + \frac{j\dot{\varphi}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -Ae^{-j\varphi} \\ -Be^{-j\varphi} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde hareketli düzlemdeki pol noktası

$$P_1 = -\frac{(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu})e^{-j\varphi}}{h_\lambda \dot{\lambda} + h_\mu \dot{\mu} + jh\varphi_\lambda \dot{\lambda} + jh\varphi_\mu \dot{\mu}}$$

$$P_2 = -\frac{(B_\lambda \dot{\lambda} + B_\mu \dot{\mu})e^{-j\varphi}}{h_\lambda \dot{\lambda} + h_\mu \dot{\mu} + jh\varphi_\lambda \dot{\lambda} + jh\varphi_\mu \dot{\mu}}$$

olarak bulunur. Burada P_2 eşitliğinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ ifadesi P_1 de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (h_\lambda B_\mu + jh\varphi_\lambda B_\mu - h_\mu B_\lambda - jh\varphi_\mu B_\lambda)P_1 \\ & + (h_\mu A_\lambda + jh\varphi_\mu A_\lambda - h_\lambda A_\mu - jh\varphi_\lambda A_\mu)P_2 = (A_\mu B_\lambda - A_\lambda B_\mu)e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

şeklinde bir doğru denklemini elde edilir.

Sonuç 4.1. $h(\lambda, \mu) = 1$ olması durumunda

$$(B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda)P_1 + (A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu)P_2 = je^{-j\varphi}(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda)$$

doğru denklemi elde edilir, [2].

Sonuç 4.2. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda yani, $A(0,0) = B(0,0) = \varphi(0,0) = 0$ iken hareketli düzlemin pol noktaları

$$\begin{aligned} (B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda)P_1 + (A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu)P_2 \\ = j(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda) \end{aligned} \quad (10)$$

doğrusu üzerinde bulunur, [2].

Teorem 4.3. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin sabit düzlemdeki pol noktası $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. $P(P_1, P_2)$ pol noktası (1) denkleminde yerine yazılırsa sabit düzlemin $\bar{P}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ pol noktası bulunur. Dolayısıyla pol noktasının bileşenleri

$$\bar{P}_1 = -\frac{h(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu})}{h_\lambda \dot{\lambda} + h_\mu \dot{\mu} + jh\varphi_\lambda \dot{\lambda} + jh\varphi_\mu \dot{\mu}} + A(\lambda, \mu)$$

$$\bar{P}_2 = -\frac{h(B_\lambda \dot{\lambda} + B_\mu \dot{\mu})}{h_\lambda \dot{\lambda} + h_\mu \dot{\mu} + jh\varphi_\lambda \dot{\lambda} + jh\varphi_\mu \dot{\mu}} + B(\lambda, \mu)$$

dir. Burada \bar{P}_2 eşitliğinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ ifadesi \bar{P}_1 de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} (-h_\lambda h B_\mu + h_\mu h B_\lambda + -jh^2 \varphi_\lambda B_\mu + jh^2 \varphi_\mu B_\lambda)\bar{P}_1 + (-h_\mu h A_\lambda + \\ h_\lambda h A_\mu - jh^2 \varphi_\mu A_\lambda + jh^2 \varphi_\lambda A_\mu)\bar{P}_2 = h^2 A_\lambda B_\mu - h_\mu h A_\lambda B - \\ jh^2 \varphi_\mu A_\lambda B - h_\lambda h A B_\mu - jh^2 \varphi_\lambda A B_\mu - h^2 A_\mu B_\lambda + h_\mu h A B_\lambda + \\ jh^2 \varphi_\mu A B_\lambda + h_\lambda h A_\mu B + jh^2 \varphi_\lambda A_\mu B \end{aligned}$$

şeklinde bir doğru denklemi bulunur.

Sonuç 4.3. $h(\lambda, \mu) = 1$ olması durumunda

$$(B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda)\bar{P}_1 + (A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu)\bar{P}_2$$

$$= A(B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda) + B(A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu) + j(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda)$$

doğru denklemi elde edilir, [2].

Sonuç 4.4. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda yani, $A(0,0) = B(0,0) = \varphi(0,0) = 0$ iken sabit düzlemin pol noktaları

$$\begin{aligned} (B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda) \bar{P}_1 + (A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu) \bar{P}_2 \\ = j(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

doğrusu üzerinde bulunur, [2].

Sonuç 4.5. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin hareketli ve sabit düzlemdeki pol doğruları (10) ve (11) denklemlerinden görüldüğü gibi $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda çakışmıştır.

B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin pol doğrusunu hareketli düzlemdeki Oy –ekseni seçersek $\dot{A}(\lambda, \mu) = A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} = 0$ olmalıdır. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ bağımsız hareket parametreleri olduklarından sıfırdan farklıdır. O halde $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda $A_\lambda = A_\mu = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -\frac{\dot{B}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}}$$

dır. Bu özel durum $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda sabit düzlemin pol doğrusu ile sabit düzlemin Oy –ekseninin çakışmasını gerektirir. O halde

$$\bar{P}_1 = 0$$

$$\bar{P}_2 = hP_2$$

dır. Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $Q(X_1, X_2)$ noktasının $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy –ekseni seçtiğimiz yani $A_\lambda = A_\mu = 0$ durumunda sürüklenme hızı mutlak hıza eşit olur.

Teorem 4.4. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketleri $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy –ekseni seçilirse yani $A_\lambda = A_\mu = 0$ durumunda $P(P_1, P_2)$ pol noktasının $Q(X_1, X_2)$ noktasına giden pol ışını, $\overrightarrow{PQ} = (Q - P)e^{j\varphi}$ ile Q noktasının Y_f sürüklenme hızı arasında

$$\langle \overrightarrow{Y_f}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \dot{h}[X_1^2 - (X_2 - P_2)^2] \quad (12)$$

bağıntısı vardır.

İspat. Sürüklenme hızının P pol noktasıyla ifadesi ve $P_1 = 0$ durumunu göz önünde bulundurarak yazarsak

$$\overrightarrow{Y_f} = [\dot{h}X_1 + h\dot{\varphi}(X_2 - P_2), \dot{h}(X_2 - P_2) + h\dot{\varphi}X_1] \quad (13)$$

bulunur. O halde

$$\langle \overrightarrow{Y_f}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle (\dot{h}X_1 + h\dot{\varphi}(X_2 - P_2), \dot{h}(X_2 - P_2) + h\dot{\varphi}X_1), (X_1, X_2 - P_2) \rangle$$

ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında (12) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.6. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy –ekseni seçtiğimiz yani $A_\lambda = A_\mu = 0$ durumunda, $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $P = (P_1, P_2)$ pol noktasının $Q(X_1, X_2)$ noktasına giden pol ışını, $\overrightarrow{PQ} = (X - P)e^{j\varphi}$, Q noktasının Y_f sürüklenme hızına diktir.

İspat. $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit ise $\dot{h}(\lambda, \mu) = 0$ olacağından (13) ifadesi

$$\langle \overrightarrow{Y_f}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$$

halini alır ki bu da sürüklenme hızının pol ışınına dik olduğunu gösterir.

Teorem 4.5. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin Y_f sürüklenme hız vektörünün boyu $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\|\vec{Y}_f\| = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}\|\vec{PQ}\|$$

dır.

İspat. (9) denklemini ile verilen \vec{Y}_f sürüklenme hızının normu hesaplanırsa

$$\|\vec{Y}_f\| = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}\sqrt{(X_1 - P_1)^2 - (X_2 - P_2)^2}$$

bulunur.

Teorem 4.6. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi için $P(P_1, P_2)$ pol noktasından $Q(X_1, X_2)$ noktasına giden $\vec{PQ} = (X - P)e^{j\varphi}$ pol ışını ile \vec{Y}_f sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Ψ olmak üzere, $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\sinh \Psi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h}}{\sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\vec{Y}_f = [\dot{h}(X_1 - P_1) + h\dot{\varphi}(X_2 - P_2), \dot{h}(X_2 - P_2) + h\dot{\varphi}(X_1 - P_1)]e^{j\varphi}$ ve $\vec{PQ} = [e^{j\varphi}(X_1 - P_1), e^{j\varphi}(X_2 - P_2)]$ olduğundan

$$\langle \vec{PQ}, \vec{Y}_f \rangle = \dot{h}\|\vec{PQ}\|^2$$

dır. Diğer taraftan

$$\langle \vec{PQ}, \vec{Y}_f \rangle = \|\vec{PQ}\|\|\vec{Y}_f\| \sinh \Psi(\lambda, \mu)$$

dır. Bu iki ifadeyi eşitlersek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.7. Eğer $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olarak alınırsa,

$$\Psi(\lambda, \mu) = k\pi, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak bulunur.

Tanım 4.1. Sabit bir noktanın sürüklenme hız vektörleri, kendilerine paralel kalmak üzere başlangıç noktasına taşındığında, bu vektörlerin uç noktalarının geometrik yeri eğri olup bu eğriye hodograf denir, [4].

Şimdi de B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi için bir (X_1, X_2) noktasının hodografinin geometrik yerini $\forall (X_1, X_2)$ için araştıralım. Bunun için $\lambda^2 - \mu^2 = 1$ alalım. (1) denkleminin λ ve μ ye göre türevi alınıp $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ ye göre düzenlenirse,

$$Y_f = [(\dot{h} + jh\dot{\varphi})X_1 e^{j\varphi} + \dot{A}, (\dot{h} + jh\dot{\varphi})X_2 e^{j\varphi} + \dot{B}]$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= (h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} + A_\lambda)\dot{\lambda} \\ &\quad + (h_\mu X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} + A_\mu)\dot{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_2 &= (h_\lambda X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} + B_\lambda)\dot{\lambda} \\ &\quad + (h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_2 e^{j\varphi} + B_\mu)\dot{\mu} \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\Gamma = \begin{vmatrix} h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} + A_\lambda & h_\mu X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} + A_\mu \\ h_\lambda X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} + B_\lambda & h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_2 e^{j\varphi} + B_\mu \end{vmatrix}$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned} \Gamma &= A_\lambda h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jA_\lambda h\varphi_\mu X_2 e^{2j\varphi} + B_\mu h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jB_\mu h\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} \\ &\quad + A_\lambda B_\mu - A_\mu h_\lambda X_2 e^{j\varphi} - jA_\mu h\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} \\ &\quad - B_\lambda h_\mu X_1 e^{j\varphi} - jB_\lambda h\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} - A_\mu B_\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ durumunda Cramer metodu uygulanır ve $\lambda^2 - \mu^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu)^2 - (h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2 \right] \dot{Y}_1^2 \\ & + \left[(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu)^2 - (h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2 \right] \dot{Y}_2^2 \end{aligned}$$

$$-2[(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu)(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu) - (h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2 \quad (14)$$

denklemini elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde herhangi bir (X_1, X_2) noktasının $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda hodografı bir hiperboldür.

İspat. Genel konik denklemi

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

olmak üzere, (14) denkleminde A , B ve C katsayıları vasıtasıyla

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} A & B \\ B & C \end{array} \right| &= -[(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu)(h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda) \\ &\quad - (h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu)]^2 < 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ durumunda elde edilen (14) denkleminin bir hiperbol denklemi olduğu görülür.

Sonuç 4.8. Eğer $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olarak alınırsa $h_\lambda = h_\mu = 0$ olacağından (14) denklemi

$$\begin{aligned} &[(jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu)^2 - (jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2]\dot{Y}_1^2 \\ &\quad + [(jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu)^2 - (jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2]\dot{Y}_2^2 \\ &\quad - 2[(jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu)(jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu) \\ &\quad - (jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2 \end{aligned}$$

şeklinde bir hiperbol denklemdir.

Sonuç 2.9. Eğer $h(\lambda, \mu) = 1$ olarak alınırsa (14) denkleminde

$$\begin{aligned} &[(j\varphi_\mu X_2 + B_\mu)^2 - (j\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2]\dot{Y}_1^2 \\ &\quad + [(j\varphi_\mu X_1 + A_\mu)^2 - (j\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2]\dot{Y}_2^2 \end{aligned}$$

$$-2[(j\varphi_\mu X_2 + B_\mu)(j\varphi_\mu X_1 + A_\mu) - (j\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(j\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2$$

elde edilir, [2].

5. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

H hareketli düzlem üzerinde alınan bir $X(\lambda, \mu)$ noktasının H hareketli ve H' sabit düzlemine göre meydana getirdiği B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin ivmelerini araştıralım. $X(\lambda, \mu)$ noktasının H düzlemine göre relatif ivme vektörünü b_r ile gösterelim. O halde (4) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$b_r = \ddot{X}_r = \ddot{X}(\lambda, \mu) = X_{\lambda\lambda}\dot{\lambda} + X_{\lambda\mu}\dot{\mu} + X_{\mu\lambda}\dot{\lambda} + X_{\mu\mu}\dot{\mu} + X_{\lambda\lambda}\ddot{\lambda} + X_{\mu\mu}\ddot{\mu}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre

$$b'_r = b_r e^{j\varphi} = \ddot{X} e^{j\varphi}$$

ile ifade edilir. $X(\lambda, \mu)$ noktasının mutlak ivme vektörü $X(\lambda, \mu)$ noktasının sabit düzleme göre olan ivme vektörüdür. Bu ivme vektörü (8) denkleminde verilen,

$$Y_a = Y_f + hY_r = (\dot{h} + jh\dot{\varphi})(X - P)e^{j\varphi} + h\ddot{X}e^{j\varphi}$$

mutlak hızının (λ, μ) parametrelerine göre türevi alınarak bulunur. O halde,

$$b'_a = [\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})](X - P)e^{j\varphi} - (\dot{h} + jh\dot{\varphi})\dot{P}e^{j\varphi} + 2\dot{X}(\dot{h} + jh\dot{\varphi})e^{j\varphi} + hb'_r \quad (15)$$

dir. Burada

$$b'_f = [\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})](X - P)e^{j\varphi} - (\dot{h} + jh\dot{\varphi})\dot{P}e^{j\varphi} \quad (16)$$

vektörüne $X(\lambda, \mu)$ noktasının sürüklenme ivme vektörü ve

$$b'_c = 2\dot{X}(\dot{h} + jh\dot{\varphi})e^{j\varphi} \quad (17)$$

vektörüne de $X(\lambda, \mu)$ noktasının Coriolis-ivme vektörü denir.

O halde sürüklenme ivme vektörü hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir. O halde (15), (16) ve (17) denklemlerinden ivmelerin terkibi şu teoremle verilebilir.

Teorem 5.1. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde $\forall(\lambda, \mu)$ noktanın mutlak ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ve relatif ivme vektörü arasındaki ilişki,

$$b'_a = b'_f + b'_c + hb'_r$$

şeklindedir.

Teorem 5.2. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde açısal hızı sıfır olmayan ve $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda sürüklenme ivmesi sıfır olan nokta yani ivme polü

$$X = P + \frac{(\dot{h} + jh\dot{\varphi})\dot{P}}{\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. (16) denklemden ispat kolayca görülür.

Sonuç 5.1. Burada özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa iki parametrelili düzlemsel hareketler için verilen

$$X = P + \frac{j\dot{\varphi}\dot{P}}{j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2}$$

ivme polü elde edilir, [2].

Teorem 5.3. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin ivme polleri $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması halinde,

$$\begin{aligned} & (h_\lambda B_\mu + jh\varphi_\lambda B_\mu - jh\varphi_\mu B_\lambda - h_\mu B_\lambda)P_{i_1} \\ & + (h_\mu A_\lambda + jh\varphi_\mu A_\lambda - jh\varphi_\lambda A_\mu - h_\lambda A_\mu)P_{i_2} \quad (18) \\ & = A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda \end{aligned}$$

doğrusu üzerinde bulunur.

İspat. (6) denkleminde türev alınır

$$b'_f = (\ddot{h} + j\dot{h}\dot{\varphi} + jh\ddot{\varphi})Xe^{j\varphi} + j\dot{\varphi}(\dot{h} + jh\dot{\varphi})Xe^{j\varphi} \\ - (\ddot{C} + j\dot{\varphi}C + j\dot{\varphi}\dot{C})e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}(\dot{C} + j\dot{\varphi}C)e^{j\varphi}$$

elde edilir. Burada $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumları göz önüne alınır,

$$b'_f = -\ddot{C} + (\ddot{h} + jh\ddot{\varphi})X$$

bulunur. Böylece ivme polü,

$$P_{i_1} = \frac{-A_\lambda \ddot{\lambda} - A_\mu \ddot{\mu}}{h_\lambda \ddot{\lambda} + h_\mu \ddot{\mu} + jh(\varphi_\lambda \ddot{\lambda} + \varphi_\mu \ddot{\mu})}$$

$$P_{i_2} = \frac{-B_\lambda \ddot{\lambda} - B_\mu \ddot{\mu}}{h_\lambda \ddot{\lambda} + h_\mu \ddot{\mu} + jh(\varphi_\lambda \ddot{\lambda} + \varphi_\mu \ddot{\mu})}$$

şeklinde elde edilir. Burada P_{i_2} eşitliğinde $\frac{\ddot{\lambda}}{\ddot{\mu}}$ ifadesi P_{i_1} de yerine yazılırsa (18) denklemini elde ederiz.

Sonuç 5.2. Eğer $h(\lambda, \mu) = 1$ alınır ivme polü sabit ve hareketli düzlemin (10) ve (11) de verdiğimiz pol doğruları ile çakışır.

6. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma kapsamında hiperbolik düzlemde $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda iki parametrelili homotetik hareketlerin sürüklenme hızı, pol doğruları, hodografi ve ivme polleri elde edilmiştir. Bu çalışmanın robot kinematiği gibi çeşitli uygulama alanlarında kullanılabileceği düşünülmektedir. Buradaki amacımız hiperbolik düzlemde iki parametrelili homotetik hareketleri tanımlayarak bu alandaki çalışmalara katkı sağlamaktır. Ayrıca bu çalışma hiperbolik uzaya genişletilerek iki parametrelili hareketlerin uygulama alanlarına daha fazla katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Birman, G.S., Nomizu, K. (1984), ‘Trigonometry in Lorentzian geometry’, Amer. Math. Mon-thly 91 (9), 543–549.
- [2] Çelik, M., Güngör, M.A., Two Parameter Hyperbolic Motions, 2st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia And Herzegovina 2013.
- [3] Çelik, M. Ünal, D ve Güngör, M.A. (2014) ‘On the Two Parameter Lorentzian Homothetic Motions’, Advances in Difference Equations 2014:42.
- [4] Erdoğan S.Ş. (1981) ‘Rijid Cisimler Dinamiği’, İst. Tek. Üniv. Kütüphanesi Sayı:1175. Fatih Yayınevi Matbaası.
- [5] Ersoy, S., Akyiğit, M. (2011) ‘One-Parameter Homothetic Motion in the Hyperbolic Plane and Euler-Savary Formula’, Adv. Appl. Clifford Algebras, 21, 297-313.
- [6] Karacan, M.K. (2004) ‘İki Parametrelili Hareketlerin Kinematik Uygulamaları’, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [7] Müller, H.R. (1963) ‘Kinematik Dersler’i, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 2.
- [8] Sobczyk, G., (2013) ‘New Foundation in Mathematics: The Geometric Concept of Number’, New York.
- [9] Ünal, D., Çelik, M. ve Güngör, M.A. (2013) ‘On the Two Parameter Homothetic Motions in the Complex Plane’, TWMS J. Pure Appl. Math., V. 4, N. 2, pp. 204-214.
- [10] Whittaker, E.T. (1904) ‘A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies’ Cambridge University Press.
- [11] Yüce, S., Kuruoğlu, N. (2008) ‘One-Parameter Plane Hyperbolic Motions’, Adv. Appl. Clifford Algebras, 18, 279-285.