BEYKENT ÜNİVERSİTESİ FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ

Sayı 7(2) 2014, 61 – 80

EISENMAN'DA DIYAGRAMIN OLUŞUMUNA ZAMANIN ETKISI

İbrahim Yalın AKIN *(yalinakin@gmail.com)*
Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mimarlık Tezli Yüksek Lisans Öğrencisi

Levent ARIDAĞ *(leventaridag@yahoo.com)*
Beykent Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Mimarlık Bölümü

ÖZET

Eisenman'ın diyagram aracılığıyla altını çizdiği belirsizleştirme işlemi, günümüz temsil ortamında zamanın niteliğinin anlaşılabilirliği bakımından oldukça büyük bir önem taşır. Sözü edilen belirsizleştirme işlemi aynı zamanda tasarım sürecindeki operasyonel süreçlere ve gerçeğin sanal kavramı içerisinde eş zamanlı hareket ettiği operasyonel bir diyagramın varlığına işaret eder. Bu diyagram tasarım sürecinde kartografik ve kompleks sistemlerin yapısını ortaya çıkarır.

Araştırmada mimari tasarım sürecinde problematize edilen temsil ile düşünce arasındaki diyalog, Eisenman'ın diyagramı belirsizleştirici, operasyonel, soyut aracılar olarak kullanması üzerinden ele alınmıştır. Mimari tasarımda kullanılan geometrik dilin, diyagramlar aracılığıyla operasyonel olarak işleyen süreçlerde mekan-zaman ilişkisini nasıl ortaya çıkardığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Mimari tasarım, mekan-zaman, diyagram, operasyonel süreç, soyut aracılar*

BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

Volume 7(2) 2014, 61 – 80

IN EISENMAN THE AFFECT OF TIME TO THE FORMATION OF DIAGRAM

İbrahim Yalın AKIN *(yalinakin@gmail.com)*
Beykent University, Graduate School of Sciences and Engineering,
MSc Student in Architecture Department

Levent ARIDAĞ *(leventaridag@yahoo.com)*
Beykent University, Department of Architecture

ABSTRACT

Eisenman through the diagram that he underlines the process of the interstitial, conveys a quite important in the today's reprasantational era of the intellegilibility of the attribution of time. The mentioned process of the interstitial points at the same time the operational diagrtams exists int the operational processes in design and the reality which behave simultaneously abstract norm. This operational diagram in the design process generates the configuration of cartographic and complex systems.

In the research the problematized of the object dialogue between the idea in the architectural design process have been held over according to the Eisenman's use of diagram as interstitial, operational and abstract agents. The geometrical language used in architectural design have been searched through diagram as in how they have emerged the relationship between space and time as ongoing processes as operational.

Keywords: *Architectural design, space-time, diagram, operational process, abstract agents*

1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarından bağımsız olarak hareketin geometrisini inceleyen, bu hareketin sebeplerini göz önüne almaksızın nokta veya noktalar sisteminin hareketini tanımlayan klasik mekaniğin bir alt dalıdır. Ayrıca kinematik noktalar, doğrular ve diğer geometrik objelerin yörüngeleri, onların hızı ve ivmesi gibi diferansiyel özellikleriyle ilgilenir. Kinematik, biomekanik ve astrofizik gibi birçok bilim dalında kullanım alanına sahiptir. Örneğin astrofizikte kinematik, göksel nesneleri ve sistemlerin hareketini tanımlar, [10].

Hiperbolik hareket özel görelilik kuramında sabit ivmeli bir objenin hareketidir. Burada hareketin hiperbolik olarak adlandırılmasının sebebi, uzay-zaman boyunca bir objenin izlediği yörüngenin denkleminin bir hiperbol denklemi belirtmesidir. Geometride ise hiperbolik hareketler hiperbolik uzayın izometrik otomorfizmalarıdır. Bu eşleme altında hiperbolik hareketler bir grup oluştururlar. Bu grup ise hiperbolik uzayı karakterize eder.

İki parametreli hareketlerin matematik, fizik, mekanik ve robot kinematiğinde önemli uygulama alanları vardır. İki parametreli düzlemsel hareketin türev denklemleri, hızları, ivmeleri ve pol noktaları H.R.Müller tarafından incelenmiştir, [7]. Lorentzian iki parametreli düzlemsel hareketler M.K.Karacan tarafından çalışılmıştır, [6]. Ayrıca kompleks düzlemde iki parametreli homotetik hareketler [9] ve Lorentzian iki parametreli homotetik hareketler geniş bir şekilde incelenmiştir, [3]. Bir parametreli hiperbolik düzlem hareketleri S.Yüce ve N.Kuruoğlu tarafından çalışılmıştır, [11]. S.Ersoy ve M.Akyiğit ise bir parametreli hiperbolik düzlem hareketleri için Euler-Savary formülünü vermiştir, [5].

Bu çalışmada yukarıdaki çalışmalar göz önüne alınarak Hiperbolik düzlemde $\forall(\lambda,\mu)$ konumunda iki parametreli homotetik hareketin sürüklenme hızı, pol doğruları, hodografı ve ivme polleri elde edildi. Ayrıca özel olarak homotetik sabitinin 1 olması halinde [2] de verilen sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmadaki amacımız hiperbolik düzlemde iki parametreli homotetik hareketleri tanımlayarak bu alandaki çalışmalara katkı sağlamak ve hiperbolik uzayda iki parametreli homotetik hareket çalışmalarına temel oluşturmaktır.

2. Temel Kavramlar

Öncelikle hiperbolik sayı kümesi için $j \neq \pm 1$ özelliğine sahip herhangi bir j sayısını ele alalım. j sanal birim ve x ile y reel sayılar olmak üzere standart taban $\{1, j\}$ için hiperbolik sayı kümesi

$$H = R[j] = \{z = x + jy \mid x, y \in R \,, j^2 = 1\}$$

olarak tanımlanır. H hiperbolik sayı kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma

$$(x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v)$$

$$(x + jy)(u + jv) = (xu + yv) + j(xv + yu)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece H hiperbolik sayı kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli bir gruptur. $\bar{z} = x - jy$ ifadesine $z = x + jy$ nin hiperbolik eşleniği denir. $z, w \in H$ olmak üzere hiperbolik iç çarpım

$$\langle z, w \rangle = Re(z\bar{w}) = Re(\bar{z}w) = xu - yv$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\langle z, w \rangle = 0$ ise z ve w sayılarına hiperbolik ortogonaldir denir. z hiperbolik sayısının modülü

$$\|z\|_h = \sqrt{|\langle z, z \rangle|} = \sqrt{|z\bar{z}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

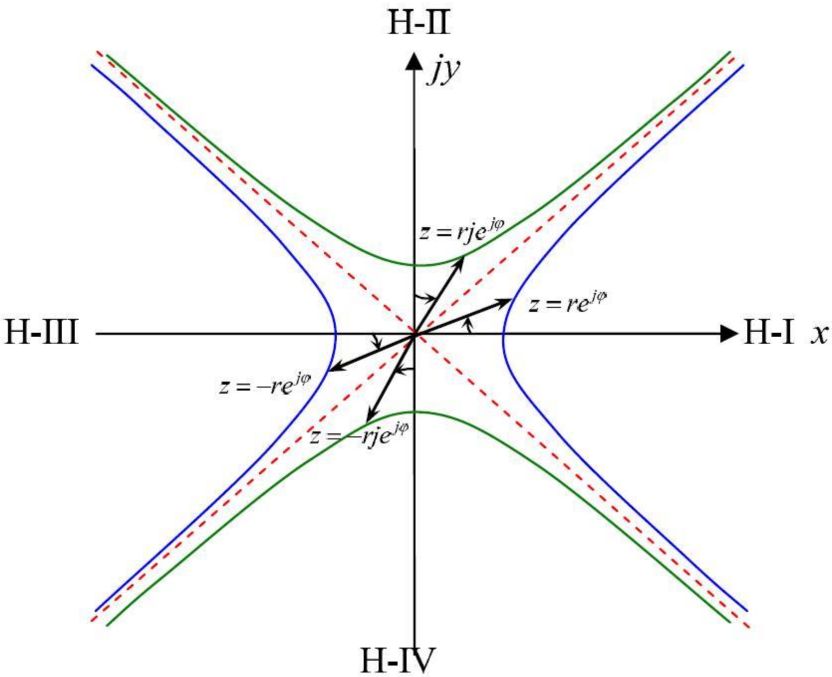
şeklinde tanımlanır, [11].

$\|z\|_h = r > 0$ denklemini sağlayan hiperbolik düzlemdeki bütün noktaların kümesi düzlemi dört bölgeye ayırır. Burada x ve y eksenlerinin ayırdığı alışılagelmiş çeyrek düzlemlerden farklı olarak

$y = \pm x$ asimptotları ile birbirinden ayrılan H-I, H-II, H-III ve H-IV bölgeleri hiperbolik dördüller olarak adlandırılır, [8].

$z = x + jy$ hiperbolik sayısı H-I veya H-III bölgesinde ise

$z = \pm r(cosh\varphi + jsinh\varphi) = \pm re^{j\varphi}$,



Şekil 1. *Hiperbolik Düzlem*

$z = x + jy$ hiperbolik sayısı H-II veya H-IV bölgesinde ise

$z = \pm r(sinh\varphi + jcosh\varphi) = \pm rje^{j\varphi}$

biçiminde yazılabilir, (Şekil 1).

$e^{j\varphi}$ tarafından tanımlanan bir hiperbolik dönme matrisi

$$A = \begin{bmatrix} cosh\varphi & sinh\varphi \\ sinh\varphi & cosh\varphi \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir, [1].

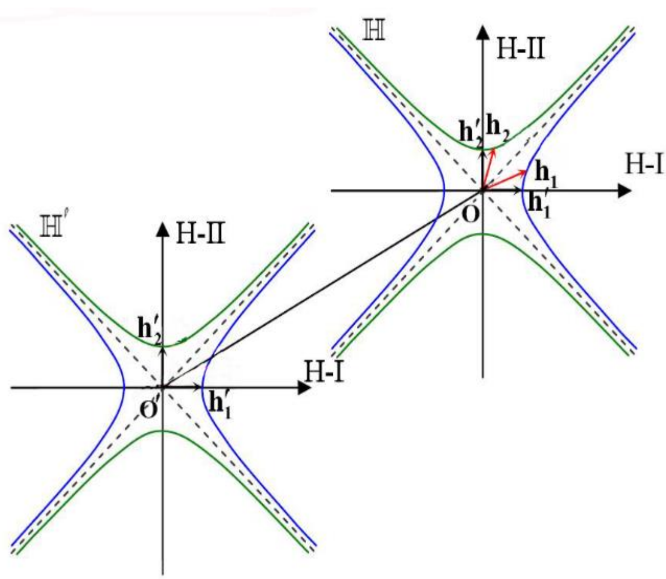
Hiperbolik iç çarpımın bir başka özelliği ise

$$\langle ze^{j\varphi}, we^{j\varphi}\rangle = \langle z, w\rangle$$

dir. Buna ek olarak j ile çarpılan bir vektör, hiperbolik ortogonal vektördür. Ayrıca bu kompleks düzlemde $i = e^{i(\pi/2)}$ çarpanına benzer bir rol oynar, [11].

3. İki Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Homotetik Hareket

H hareketli ve H' sabit hiperbolik düzlemlerine karşılık gelen koordinat sistemleri sırasıyla $\{O\ ;\ h_1, h_2\}$ ve $\{O';\ h_1', h_2'\}$ olsun. Eğer $\overrightarrow{O'O}$ vektörü $b = b_1 + jb_2$ hiperbolik sayısına göre tanımlanırsa hiperbolik iç çarpım uygulandığında $b_1^2 - b_2^2 > 0$ veya $b_1^2 - b_2^2 < 0$ durumlarında $\overrightarrow{O'O}$ vektörünün hiperbolik hareket düzlemi Şekil 2 ve Şekil 3 biçiminde gösterilebilir.



Şekil 2. *$\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-I düzleminde*

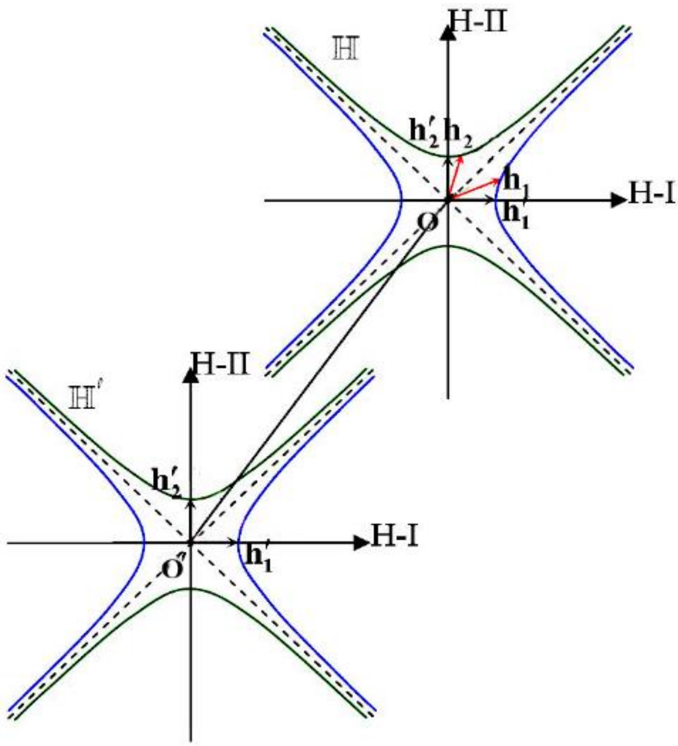
Burada $\overrightarrow{O'O} = C'(\lambda, \mu)$ ve $h(\lambda, \mu)$ homotetik sabit olmak üzere, genel iki parametreli hiperbolik homotetik düzlem hareketi

$\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-I veya H-III hiperbolik dördülünde ise,

$$Y(\lambda,\mu) = h(\lambda,\mu)e^{j\varphi(\lambda,\mu)}X(\lambda,\mu) + C'(\lambda,\mu) \quad (1)$$

$\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-II veya H-IV hiperbolik dördülünde ise,

$$Y(\lambda,\mu) = h(\lambda,\mu)\, je^{j\varphi(\lambda,\mu)}X(\lambda,\mu) + C'(\lambda,\mu) \quad (2)$$



***Şekil 3.** $\overrightarrow{O'O}$ vektörü H-II düzleminde*

biçiminde iki şekilde verilir ve B_{II} ile gösterilir. Burada, $\varphi(\lambda,\mu)$ H nin H' ye göre dönme açısı ve $X(\lambda,\mu) = (X_1(\lambda,\mu), X_2(\lambda,\mu))$ ile $Y(\lambda,\mu) = (Y_1(\lambda,\mu), Y_2(\lambda,\mu))$, sırasıyla, hareketli ve sabit koordinat sistemlerine göre koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ, t zaman parametresi olmak üzere, t'nin fonksiyonları olarak alınırsa, bir parametreli B_I hareketi elde edilir. Bu harekete B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketi denir. Burada,

$Y(\lambda, \mu) = [Y_1(\lambda, \mu)\ Y_2(\lambda, \mu)]^T, X(\lambda, \mu) = [X_1(\lambda, \mu)\ X_2(\lambda, \mu)]^T$ ve

$C'(\lambda, \mu) = [A(\lambda, \mu)\ B(\lambda, \mu)]^T$

şeklindedir. Genelliği bozmayacak şekilde $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda iki hiperbolik düzlemin çakışık olması için $\varphi(0,0) = A(0,0) = B(0,0) = 0$ alınabilir.

Biz bu çalışmada $\overrightarrow{O'O}$ vektörünün H-III hiperbolik dördülünde ve X(λ,μ) noktasının H-I hiperbolik dördülünde olduğunu kabul ederek (1) denklemi vasıtasıyla iki parametreli hiperbolik homotetik hareketleri çalışacağız.

4. Hızlar ve Hızların Terkibi

$\overrightarrow{OO'} = C(\lambda, \mu)$ biçiminde alınır ve $\overrightarrow{OO'}$ vektörü H-III hiperbolik dördülünde olduğu göz önüne alınırsa,

$$C'(\lambda, \mu) = -C(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda,\mu)} \tag{3}$$

yazılabilir, (Şekil 1). (3) ifadesi (1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Y(\lambda, \mu) = [h(\lambda, \mu)X(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu)\ ]e^{j\varphi(\lambda,\mu)}$$

elde edilir. $X(\lambda, \mu)$ noktasının relatif hızı, $X(\lambda, \mu)$ noktasının hareketli H düzlemine göre hızıdır. Bu hız hareketli düzleme göre,

$$X_r = \dot{X}(\lambda, \mu) = X_\lambda \dot{\lambda} + X_\mu \dot{\mu} \tag{4}$$

ifadesiyle verilir. Relatif hızın sabit düzleme göre ifadesi

$$Y_r = X_{\mathrm{r}} e^{j\varphi} = \dot{X}(\lambda, \mu)e^{j\varphi} = \left(X_\lambda \dot{\lambda} + X_\mu \dot{\mu}\right)e^{j\varphi} \tag{5}$$

şeklindedir.

$X(\lambda, \mu)$ noktasının mutlak hızını bulmak için (1) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$Y_a = \left[\dot{h}(\lambda, \mu) + jh(\lambda, \mu)\dot{\varphi}(\lambda, \mu)\right]X(\lambda, \mu)e^{j\varphi(\lambda,\mu)}$$

$$-\left[\dot{C}(\lambda,\mu) + jC(\lambda,\mu)\dot{\varphi}(\lambda,\mu)\right]e^{j\varphi(\lambda,\mu)} + h(\lambda,\mu)Y_r \tag{6}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$Y_f = \left[\dot{h}(\lambda,\mu) + jh(\lambda,\mu)\dot{\varphi}(\lambda,\mu)\right]X(\lambda,\mu)e^{j\varphi(\lambda,\mu)} - \left[\dot{C}(\lambda,\mu) + jC(\lambda,\mu)\dot{\varphi}(\lambda,\mu)\right]e^{j\varphi(\lambda,\mu)} \tag{7}$$

$X(\lambda,\mu)$ noktasının sürüklenme hız vektörüdür.

Eğer $X(\lambda,\mu)$ noktası H düzleminde sabit bir nokta ise $X_r = Y_r = 0$ dır. Bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

Böylece $(5), (6)$ ve (7) denklemlerinden şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin bir $X(\lambda,\mu)$ noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızı arasındaki ilişki

$$Y_a = Y_f + h(\lambda,\mu)Y_r \tag{8}$$

şeklindedir. Bundan sonra sırf dönme ve sırf öteleme durumundan kaçınmak için $\dot{\varphi}(\lambda,\mu) = \varphi_\lambda\dot{\lambda} + \varphi_\mu\dot{\mu} \neq 0$ ve $h(\lambda,\mu) \neq sabit$ kabul edeceğiz.

Şimdi B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketinin $\forall(\lambda,\mu)$ anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalarını, yani pol noktalarını araştıralım. Sürüklenme hızı,

$$Y_f = \left[\dot{h} + jh\dot{\varphi}\right]Xe^{j\varphi} - \left[\dot{C} + jC\dot{\varphi}\right]e^{j\varphi} = 0$$

olduğundan, $\dot{h}^2 - h^2\dot{\varphi}^2 \neq 0$ olmak üzere

$$X = P(P_1,P_2) = \frac{\dot{C}\dot{h} - Ch\dot{\varphi}^2}{\dot{h}^2 - h^2\dot{\varphi}^2} + j\frac{C\dot{h}\dot{\theta} - \dot{C}h\dot{\varphi}}{\dot{h}^2 - h^2\dot{\varphi}^2}$$

olarak bulunur. P, B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin pol noktasıdır. $X(\lambda,\mu)$ noktasının (7) denkleminde verilen sürüklenme hızını $P(P_1,P_2)$ pol noktası ile ifade etmek için

$$P = \frac{\dot{C} + jC\dot{\varphi}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}}$$

eşitliğinden $\dot{C}$ çekilir ve (7) denkleminde yerine yazılırsa

$$Y_f = \left(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\right)(X - P)e^{j\varphi} \tag{9}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin hareketli düzlemdeki pol noktası $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. $P(P_1, P_2)$ pol noktası ve $C = \begin{bmatrix} -Ae^{-j\varphi} \\ -Be^{-j\varphi} \end{bmatrix}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -\dot{A}e^{-j\varphi} + j\dot{\theta}Ae^{-j\varphi} \\ -\dot{B}e^{-j\varphi} + j\dot{\theta}Be^{-j\varphi} \end{bmatrix} + \frac{j\dot{\varphi}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -Ae^{-j\varphi} \\ -Be^{-j\varphi} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde hareketli düzlemdeki pol noktası

$$P_1 = -\frac{(A_\lambda\dot{\lambda} + A_\mu\dot{\mu})e^{-j\varphi}}{h_\lambda\dot{\lambda} + h_\mu\dot{\mu} + jh\varphi_\lambda\dot{\lambda} + jh\varphi_\mu\dot{\mu}}$$

$$P_2 = -\frac{(B_\lambda\dot{\lambda} + B_\mu\dot{\mu})e^{-j\varphi}}{h_\lambda\dot{\lambda} + h_\mu\dot{\mu} + jh\varphi_\lambda\dot{\lambda} + jh\varphi_\mu\dot{\mu}}$$

olarak bulunur. Burada P_2 eşitliğinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ ifadesi P_1 de yerine yazılırsa;

$$\left(h_\lambda B_\mu + jh\varphi_\lambda B_\mu - h_\mu B_\lambda - jh\varphi_\mu B_\lambda\right)P_1$$
$$+\left(h_\mu A_\lambda + jh\varphi_\mu A_\lambda - h_\lambda A_\mu - jh\varphi_\lambda A_\mu\right)P_2 = \left(A_\mu B_\lambda - A_\lambda B_\mu\right)e^{-j\varphi}$$

şeklinde bir doğru denklemi elde edilir.

Sonuç 4.1. $h(\lambda, \mu) = 1$ olması durumunda

$$\left(B_\lambda\varphi_\mu - B_\mu\varphi_\lambda\right)P_1 + \left(A_\mu\varphi_\lambda - A_\lambda\varphi_\mu\right)P_2 = je^{-j\varphi}\left(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda\right)$$

doğru denklemi elde edilir, [2].

Sonuç 4.2. $(\lambda,\mu) = (0,0)$ konumunda yani, $A(0,0) = B(0,0) = \varphi(0,0) = 0$ iken hareketli düzlemin pol noktaları

$$\begin{aligned}\left(B_\lambda\varphi_\mu - B_\mu\varphi_\lambda\right)P_1 + \left(A_\mu\varphi_\lambda - A_\lambda\varphi_\mu\right)P_2 \\ = j\left(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda\right)\end{aligned} \tag{10}$$

doğrusu üzerinde bulunur, [2].

Teorem 4.3. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin sabit düzlemdeki pol noktası $\forall(\lambda,\mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. $P(P_1,P_2)$ pol noktası (1) denkleminde yerine yazılırsa sabit düzlemin $\bar{P}(\bar{P}_1,\bar{P}_2)$ pol noktası bulunur. Dolayısıyla pol noktasının bileşenleri

$$\bar{P}_1 = -\frac{h(A_\lambda\dot{\lambda} + A_\mu\dot{\mu})}{h_\lambda\dot{\lambda} + h_\mu\dot{\mu} + jh\varphi_\lambda\dot{\lambda} + jh\varphi_\mu\dot{\mu}} + A(\lambda,\mu)$$

$$\bar{P}_2 = -\frac{h(B_\lambda\dot{\lambda} + B_\mu\dot{\mu})}{h_\lambda\dot{\lambda} + h_\mu\dot{\mu} + jh\varphi_\lambda\dot{\lambda} + jh\varphi_\mu\dot{\mu}} + B(\lambda,\mu)$$

dir. Burada $\bar{P}_2$ eşitliğinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ ifadesi $\bar{P}_1$ de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}&(-h_\lambda hB_\mu + h_\mu hB_\lambda + -jh^2\varphi_\lambda B_\mu + jh^2\varphi_\mu B_\lambda)\bar{P}_1 + \left(-h_\mu hA_\lambda + \right.\\ &\left. h_\lambda hA_\mu - jh^2\varphi_\mu A_\lambda + jh^2\varphi_\lambda A_\mu\right)\bar{P}_2 = h^2A_\lambda B_\mu - h_\mu hA_\lambda B - \\ &jh^2\varphi_\mu A_\lambda B - h_\lambda hAB_\mu - jh^2\varphi_\lambda AB_\mu - h^2A_\mu B_\lambda + h_\mu hAB_\lambda + \\ &jh^2\varphi_\mu AB_\lambda + h_\lambda hA_\mu B + \ jh^2\varphi_\lambda A_\mu B\end{aligned}$$

şeklinde bir doğru denklemi bulunur.

Sonuç 4.3. $h(\lambda,\mu) = 1$ olması durumunda

$$\left(B_\lambda\varphi_\mu - B_\mu\varphi_\lambda\right)\bar{P}_1 + \left(\ A_\mu\varphi_\lambda - A_\lambda\varphi_\mu\right)\bar{P}_2$$

$$= A\left(B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda\right) + B\left(A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu\right) + j\left(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda\right)$$

doğru denklemi elde edilir, [2].

Sonuç 4.4. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda yani, $A(0,0) = B(0,0) = \varphi(0,0) = 0$ iken sabit düzlemin pol noktaları

$$\begin{aligned}\left(B_\lambda \varphi_\mu - B_\mu \varphi_\lambda\right)\bar{P}_1 + \left(A_\mu \varphi_\lambda - A_\lambda \varphi_\mu\right)\bar{P}_2 \\ = j\left(A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda\right)\end{aligned} \tag{11}$$

doğrusu üzerinde bulunur, [2].

Sonuç 4.5. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin hareketli ve sabit düzlemdeki pol doğruları (10) ve (11) denklemlerinden görüldüğü gibi $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda çakışıktır.

B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin pol doğrusunu hareketli düzlemdeki Oy −ekseni seçersek $\dot{A}(\lambda, \mu) = A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} = 0$ olmalıdır. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ bağımsız hareket parametreleri olduklarından sıfırdan farklıdırlar. O halde $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda $A_\lambda = A_\mu = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -\frac{\dot{B}}{\dot{h} + jh\dot{\varphi}}$$

dır. Bu özel durum $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda sabit düzlemin pol doğrusu ile sabit düzlemin Oy −ekseninin çakışmasını gerektirir. O halde

$$\bar{P}_1 = 0$$

$$\bar{P}_2 = hP_2$$

dır. Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $Q(X_1, X_2)$ noktasının $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy −ekseni seçtiğimiz yani $A_\lambda = A_\mu = 0$ durumunda sürüklenme hızı mutlak hıza eşit olur.

Teorem 4.4. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketleri $(\lambda,\mu)=(0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy −ekseni seçilirse yani $A_\lambda=A_\mu=0$ durumunda $P(P_1,P_2)$ pol noktasının $Q(X_1,X_2)$ noktasına giden pol ışını, $\overrightarrow{PQ}=(Q-P)e^{j\varphi}$ ile Q noktasının Y_f sürüklenme hızı arasında

$$\langle\overrightarrow{Y_f},\overrightarrow{PQ}\rangle=\dot{h}\left[{X_1}^2-(X_2-P_2)^2\right] \tag{12}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Sürüklenme hızının P pol noktasıyla ifadesi ve $P_1=0$ durumunu göz önünde bulundurarak yazarsak

$$\overrightarrow{Y_f}=\left[\dot{h}X_1+h\dot{\varphi}(X_2-P_2),\dot{h}(X_2-P_2)+h\dot{\varphi}X_1\right] \tag{13}$$

bulunur. O halde

$$\langle\overrightarrow{Y_f},\overrightarrow{PQ}\rangle=\langle\left(\dot{h}X_1+h\dot{\varphi}(X_2-P_2),\dot{h}(X_2-P_2)+h\dot{\varphi}X_1\right),(X_1,X_2-P_2)\rangle$$

ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında (12) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.6. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi $(\lambda,\mu)=(0,0)$ konumunda ve pol eksenini Oy −ekseni seçtiğimiz yani $A_\lambda=A_\mu=0$ durumunda, $h(\lambda,\mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $P=(P_1,P_2)$ pol noktasının $Q(X_1,X_2)$ noktasına giden pol ışını, $\overrightarrow{PQ}=(X-P)e^{j\varphi}$, Q noktasının Y_f sürüklenme hızına diktir.

İspat. $h(\lambda,\mu)$ sıfırdan farklı bir sabit ise $\dot{h}(\lambda,\mu)=0$ olacağından (13) ifadesi

$$\langle\overrightarrow{Y_f},\overrightarrow{PQ}\rangle=0$$

halini alır ki bu da sürüklenme hızının pol ışınına dik olduğunu gösterir.

Teorem 4.5. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin Y_f sürüklenme hız vektörünün boyu $\forall(\lambda,\mu)$ konumunda

$$\left\|\overrightarrow{Y_f}\right\| = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

dır.

İspat. (9) denklemi ile verilen $\overrightarrow{Y_f}$ sürüklenme hızının normu hesaplanırsa

$$\left\|\overrightarrow{Y_f}\right\| = \sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}\sqrt{(X_1 - P_1)^2 - (X_2 - P_2)^2}$$

bulunur.

Teorem 4.6. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi için $P(P_1, P_2)$ pol noktasından $Q(X_1, X_2)$ noktasına giden $\overrightarrow{PQ}=(X-P)e^{j\varphi}$ pol ışını ile $\overrightarrow{Y_f}$ sürüklenme hız vektörü arasındaki açı Ψ olmak üzere, $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\sinh\Psi(\lambda, \mu) = \frac{\dot{h}}{\sqrt{\dot{h}^2 + h^2\dot{\varphi}^2}}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\overrightarrow{Y_f} = \left[\dot{h}(X_1 - P_1) + h\dot{\varphi}(X_2 - P_2)\,,\, \dot{h}(X_2 - P_2) + h\dot{\varphi}(X_1 - P_1)\right]e^{j\varphi}$ ve $\overrightarrow{PQ} = \left[e^{j\varphi}(X_1 - P_1)\,,\, e^{j\varphi}(X_2 - P_2)\right]$ olduğundan

$$\langle\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{Y_f}\rangle = \dot{h}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2$$

dır. Diğer taraftan

$$\langle\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{Y_f}\rangle = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\left\|\overrightarrow{Y_f}\right\|\sinh\Psi(\lambda, \mu)$$

dır. Bu iki ifadeyi eşitlersek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.7. Eğer $h(\lambda, \mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olarak alınırsa,

$$\Psi(\lambda, \mu) = \mathrm{k}\pi, (\mathrm{k} = 0,1,2, \ldots)$$

olarak bulunur.

Tanım 4.1. Sabit bir noktanın sürüklenme hız vektörleri, kendilerine paralel kalmak üzere başlangıç noktasına taşındığında, bu vektörlerin uç noktalarının geometrik yeri eğri olup bu eğriye hodograf denir, [4].

Şimdi de B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketi için bir (X_1, X_2) noktasının hodografının geometrik yerini $\forall(X_{1,}X_2)$ için araştıralım. Bunun için $\dot{\lambda}^2 - \dot{\mu}^2 = 1$ alalım. (1) denkleminin λ ve μ ye göre türevi alınıp $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ ye göre düzenlenirse,

$$Y_f = \left[\left(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\right)X_1 e^{j\varphi} + \dot{A}, \left(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\right)X_2 e^{j\varphi} + \dot{B}\right]$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\dot{Y}_1 = \left(h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} + A_\lambda\right)\dot{\lambda} + \left(h_\mu X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} + A_\mu\right)\dot{\mu}$$

$$\dot{Y}_2 = \left(h_\lambda X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} + B_\lambda\right)\dot{\lambda} + \left(h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_2 e^{j\varphi} + B_\mu\right)\dot{\mu}$$

bulunur ve

$$\Gamma = \begin{vmatrix} h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} + A_\lambda & h_\mu X_1 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} + A_\mu \\ h_\lambda X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} + B_\lambda & h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jh\varphi_\mu X_2 e^{j\varphi} + B_\mu \end{vmatrix}$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned}\Gamma = A_\lambda h_\mu X_2 e^{j\varphi} + jA_\lambda h\varphi_\mu X_2 e^{2j\varphi} + B_\mu h_\lambda X_1 e^{j\varphi} + jB_\mu h\varphi_\lambda X_1 e^{j\varphi} \\ + A_\lambda B_\mu - A_\mu h_\lambda X_2 e^{j\varphi} - jA_\mu h\varphi_\lambda X_2 e^{j\varphi} \\ - B_\lambda h_\mu X_1 e^{j\varphi} - jB_\lambda h\varphi_\mu X_1 e^{j\varphi} - A_\mu B_\lambda\end{aligned}$$

elde edilir. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ durumunda Cramer metodu uygulanır ve $\dot{\lambda}^2 - \dot{\mu}^2 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left[\left(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu\right)^2 - (h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2\right]\dot{Y_1}^2 + \left[\left(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu\right)^2 - (h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2\right]\dot{Y_2}^2$$

$$-2\big[\big(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)\big(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big) -$$
$$(h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)\big]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2 \qquad (14)$$

denklemi elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde herhangi bir (X_1, X_2) noktasının $(\lambda,\mu) = (0{,}0)$ konumunda hodografı bir hiperboldür.

İspat. Genel konik denklemi

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

olmak üzere, (14) denkleminde A, B ve C katsayıları vasıtasıyla

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = -\big[\big(h_\mu X_2 + jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)(h_\lambda X_1 + jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)$$
$$-(h_\lambda X_2 + jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)\big(h_\mu X_1 + jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big)\big]^2 < 0$$

dır. Böylece $(\lambda,\mu) = (0{,}0)$ durumunda elde edilen (14) denkleminin bir hiperbol denklemi olduğu görülür.

Sonuç 4.8. Eğer $h(\lambda,\mu)$ sıfırdan farklı bir sabit olarak alınırsa $h_\lambda = h_\mu = 0$ olacağından (14) denklemi

$$\Big[\big(jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)^2 - (jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2\Big]\dot{Y}_1^{\,2}$$
$$+\Big[\big(jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big)^2 - (jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2\Big]\dot{Y}_2^{\,2}$$
$$-2\big[\big(jh\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)\big(jh\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big)$$
$$-(jh\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(jh\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)\big]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2$$

şeklinde bir hiperbol denklemidir.

Sonuç 2.9. Eğer $h(\lambda,\mu) = 1$ olarak alınırsa (14) denkleminden

$$\Big[\big(j\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)^2 - (j\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)^2\Big]\dot{Y}_1^{\,2}$$
$$+\Big[\big(j\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big)^2 - (j\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)^2\Big]\dot{Y}_2^{\,2}$$

$$-2\big[\big(j\varphi_\mu X_2 + B_\mu\big)\big(j\varphi_\mu X_1 + A_\mu\big) - (j\varphi_\lambda X_1 + A_\lambda)(j\varphi_\lambda X_2 + B_\lambda)\big]\dot{Y}_1\dot{Y}_2 = \Gamma^2$$

elde edilir, [2].

5. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

H hareketli düzlem üzerinde alınan bir $X(\lambda,\mu)$ noktasının H hareketli ve H' sabit düzlemine göre meydana getirdiği B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin ivmelerini araştıralım. $X(\lambda,\mu)$ noktasının H düzlemine göre relatif ivme vektörünü b_r ile gösterelim. O halde (4) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$b_r = \dot{X}_r = \ddot{X}(\lambda,\mu) = X_{\lambda\lambda}\dot{\lambda} + X_{\lambda\mu}\dot{\mu} + X_{\mu\lambda}\dot{\lambda} + X_{\mu\mu}\dot{\mu} + X_\lambda\ddot{\lambda} + X_\mu\ddot{\mu}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre

$$b'_r = b_r e^{j\varphi} = \ddot{X}e^{j\varphi}$$

ile ifade edilir. $X(\lambda,\mu)$ noktasının mutlak ivme vektörü $X(\lambda,\mu)$ noktasının sabit düzleme göre olan ivme vektörüdür. Bu ivme vektörü (8) denkleminde verilen,

$$Y_a = Y_f + hY_r = (\dot{h} + jh\dot{\varphi})(X-P)e^{j\varphi} + h\dot{X}e^{j\varphi}$$

mutlak hızının (λ,μ) parametrelerine göre türevi alınarak bulunur. O halde,

$$b'_a = \big[\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j\big(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi}\big)\big](X-P)e^{j\varphi}$$

$$-\big(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\big)\dot{P}e^{j\varphi} + 2\dot{X}\big(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\big)e^{j\varphi} + hb'_r \qquad (15)$$

dir. Burada

$$b'_f = \big[\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})\big](X-P)e^{j\varphi} - \big(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\big)\dot{P}e^{j\varphi} \qquad (16)$$

vektörüne $X(\lambda,\mu)$ noktasının sürüklenme ivme vektörü ve

$$b'_c = 2\dot{X}\big(\dot{h} + jh\dot{\varphi}\big)e^{j\varphi} \qquad (17)$$

vektörüne de $X(\lambda, \mu)$ noktasının Coriolis-ivme vektörü denir.

O halde sürüklenme ivme vektörü hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir. O halde (15), (16) ve (17) denklemlerinden ivmelerin terkibi şu teoremle verilebilir.

Teorem 5.1. . B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde $\forall(\lambda, \mu)$ noktanın mutlak ivme vektörü, Coriolis ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ve relatif ivme vektörü arasındaki ilişki,

$$b'_a = b'_f + b'_c + hb'_r$$

şeklindedir.

Teorem 5.2. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinde açısal hızı sıfır olmayan ve $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda sürüklenme ivmesi sıfır olan nokta yani ivme polü

$$X = P + \frac{(\dot{h} + jh\dot{\varphi})\dot{P}}{\ddot{h} + h\dot{\varphi}^2 + j(h\ddot{\varphi} + 2\dot{h}\dot{\varphi})}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. (16) denkleminden ispat kolayca görülür.

Sonuç 5.1. Burada özel olarak $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa iki parametreli düzlemsel hareketler için verilen

$$X = P + \frac{j\dot{\varphi}\dot{P}}{j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2}$$

ivme polü elde edilir, [2].

Teorem 5.3. B_{II} homotetik hareketinden elde edilen B_I homotetik hareketinin ivme polleri $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması halinde,

$$\begin{aligned}(h_\lambda B_\mu + jh\varphi_\lambda B_\mu - jh\varphi_\mu B_\lambda - h_\mu B_\lambda)P_{i_1} \\ + (h_\mu A_\lambda + jh\varphi_\mu A_\lambda - jh\varphi_\lambda A_\mu - h_\lambda A_\mu)P_{i_2} \\ = A_\lambda B_\mu - A_\mu B_\lambda\end{aligned} \qquad (18)$$

doğrusu üzerinde bulunur.

İspat. (6) denkleminden türev alınırsa

$$b_f' = \left(\ddot{h} + j\dot{h}\dot{\varphi} + jh\ddot{\varphi}\right)Xe^{j\varphi} + j\dot{\varphi}(\dot{h} + jh\dot{\varphi})Xe^{j\varphi} - \left(\ddot{C} + j\ddot{\varphi}C + j\dot{\varphi}\dot{C}\right)e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}\left(\dot{C} + j\dot{\varphi}C\right)e^{j\varphi}$$

elde edilir. Burada $(\lambda, \mu) = (0,0)$ ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumları göz önüne alınırsa,

$$b_f' = -\ddot{C} + \left(\ddot{h} + jh\ddot{\varphi}\right)X$$

bulunur. Böylece ivme polü,

$$P_{i_1} = \frac{-A_\lambda\ddot{\lambda} - A_\mu\ddot{\mu}}{h_\lambda\ddot{\lambda} + h_\mu\ddot{\mu} + jh\left(\varphi_\lambda\ddot{\lambda} + \varphi_\mu\ddot{\mu}\right)}$$

$$P_{i_2} = \frac{-B_\lambda\ddot{\lambda} - B_\mu\ddot{\mu}}{h_\lambda\ddot{\lambda} + h_\mu\ddot{\mu} + jh\left(\varphi_\lambda\ddot{\lambda} + \varphi_\mu\ddot{\mu}\right)}$$

şeklinde elde edilir. Burada P_{i_2} eşitliğinde $\frac{\ddot{\lambda}}{\ddot{\mu}}$ ifadesi P_{i_1} de yerine yazılırsa (18) denklemini elde ederiz.

Sonuç 5.2. Eğer $h(\lambda, \mu) = 1$ alınırsa ivme polü sabit ve hareketli düzlemin (10) ve (11) de verdiğimiz pol doğruları ile çakışır.

6. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma kapsamında hiperbolik düzlemde $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda iki parametreli homotetik hareketlerin sürüklenme hızı, pol doğruları, hodografı ve ivme polleri elde edilmiştir. Bu çalışmanın robot kinematiği gibi çeşitli uygulama alanlarında kullanılabileceği düşünülmektedir. Buradaki amacımız hiperbolik düzlemde iki parametreli homotetik hareketleri tanımlayarak bu alandaki çalışmalara katkı sağlamaktır. Ayrıca bu çalışma hiperbolik uzaya genişletilerek iki parametreli hareketlerin uygulama alanlarına daha fazla katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Birman, G.S., Nomizu, K. (1984), ‘Trigonometry in Lorentzian geometry’, Amer. Math. Mon–thly 91 (9), 543–549.

[2] Çelik, M., Güngör, M.A., Two Parameter Hyperbolic Motions, 2st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia And Herzegovina 2013.

[3] Çelik, M. Ünal, D ve Güngör, M.A. (2014) ‘On the Two Parameter Lorentzian Homothetic Motions’, Advances in Difference Equations 2014:42.

[4] Erdoğan S.Ş. (1981) ‘Rijid Cisimler Dinamiği’, İst. Tek. Üniv. Kütüphanesi Sayı:1175. Fatih Yayınevi Matbaası.

[5] Ersoy, S., Akyiğit, M. (2011) ‘One-Parameter Homothetic Motion in the Hyperbolic Plane and Euler-Savary Formula’, Adv. Appl. Clifford Algebras, 21, 297-313.

[6] Karacan, M.K. (2004) ‘İki Paramatreli Hareketlerin Kinematik Uygulamaları’, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[7] Müller, H.R. (1963) ‘Kinematik Dersler’i, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 2.

[8] Sobczyk, G., (2013) ‘New Foundation in Mathematics: The Geometric Concept of Number’, New York.

[9] Ünal, D., Çelik, M. ve Güngör, M.A. (2013) ‘On the Two Parameter Homothetic Motions in the Complex Plane’, TWMS J. Pure Appl. Math., V. 4, N. 2, pp. 204-214.

[10] Whittaker, E.T. (1904) ‘A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies’ Cambridge University Press.

[11] Yüce, S., Kuruoğlu, N. (2008) ‘One-Parameter Plane Hyperbolic Motions’, Adv. Appl. Clifford Algebras, 18, 279-285.