BEYKENT ÜNİVERSİTESİ FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ

Cilt 7(1) 2014, 37 – 54

BÜKEYLİĞİ OLMAYAN DURUM FONKSİYONLU BİRİNCİ BASAMAKTAN DENKLEM İÇİN RİEMANN PROBLEMİ

Özgür ULAŞ *(ozgur_ulas78@hotmail.com)*
Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Öğrencisi

Mahir RASULOV *(mresulov@beykent.edu.tr)*
Beykent Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

ÖZET

Makalede, bükeyliği olmayan durum fonksiyonlu birinci basamaktan nonlineer hiperbolik tür denklem için Riemann probleminin gerçek çözümleri elde edilmiştir. Bunun için bazı durumda esas probleme bilinen anlamda denk olan ve özel yolla kurulmuş yardımcı problem dahil edilmiştir. Bazı durumlarda ise problemin karakterine uygun olarak aşağı veya yukarı konveks katmanlar kurulmuş ve bunların yardımıyla gerçek çözümler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: *1.Basamaktan kısmi türevli nonlinear denklemler, Riemann problemi, karakteristikler, zayıf çözüm, darbe dalgası, aşağı ve yukarı konveks katman, entropi*

BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

Volume 7(1) 2014, 37 – 54

THE RIEMANN PROBLEM FOR FIRST – ORDER EQUATION WITHOUT THE CONVESITY OF STATE FUNCTION

Özgür ULAŞ *(ozgur_ulas78@hotmail.com)*
Beykent University, Institute of Science, Department of Mathematics and Computer, Department of Applied Mathematics, MSc Student

Mahir RASULOV *(mresulov@beykent.edu.tr)*
Beykent University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics and Computing

ABSTRACT

In this paper the exact solutions of the Riemann problem for first-order nonlinear equation with non-convex state function are obtained. For this, when it is necessary the auxiliary problem which is equivalent to the main problem is introduced. The solution of the proposed problem permit to construct the weak solution of the main problem. In some cases depending on the nature of investigated problem a convex or concave hull is constructed. Thus, the exact solutions are founded by using these functions.

Keywords: *First order nonlinear partial differential equations, Riemann problem, characteristics, weak solution, shock wave, convex and concave hull, entropy*

1. GİRİŞ

Mekaniğin, özellikle de gaz dinamiğinin birçok problemlerinin çözümü nonlineer denklemlerin süreksiz çözümlerinin incelenmesine indirgenmektedir. Hiperbolik tür denklemlerin süreksiz çözümleri lineer denklemlerin süreksiz çözümlerinin özelliklerine has olmayan bazı özelliklere sahiptir. Bilindiği üzere kuvvetli heyecanlanmanın sürekli ortamlardaki dağılımı nonlineer, zayıf heyecanlanma ise lineer hiperbolik denklemlerle ifade edilmektedir. Ayrıca, lineer denklemlerle ifade edilen denklemlerin çözümlerinde başlangıç profilde bulunan sıçrayış dalganın evrim sürecinde korunmaktadır.

Nonlineer hiperbolik tür denklemlerin süreksiz çözümlerinin incelenmesinde çok önemli teorik sonuçlar, kronolojik olarak O.A. Oleinik, A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, P. Lax ve İ.M. Gelfand tarafından elde edilmiştir. Bükeyliği olmayan durum fonksiyonlu birinci basamaktan nonlineer hiperbolik tür denklemlerin gerçek çözümlerinin bulunması hem pratik açıdan, hem de teorik açıdan önem taşımaktadır.

Bu makalede bükeyliği olmayan durum fonksiyonlu birinci basamaktan nonlineer denklem için Riemann probleminin gerçek çözümleri elde edilmiştir.

2. KONVEKS DURUM FONKSİYONLU PROBLEM

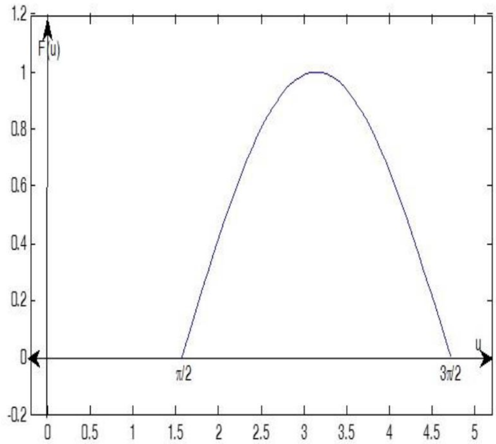
Her zaman olduğu gibi R^2 ile (x,t) düzleminde Euclid uzayını gösterelim. Burada x yer, t ise zaman değişkeni olmaktadır. $Q_T = \{(x,t) | x \in I = (-\infty,\infty), t \in [0,T)\} \subset R^2$ olmak üzere Q_T de aşağıdaki

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, x < 0 \\ u_2, x > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

problemini göz önüne alalım. Burada $F \in C^2(Q_T)$ ve $F'(u), F''(u)$ fonksiyonları işaret değiştirmektedir, yani $F(u)$ aşağı ve yukarı konveks kısımlara sahip fonksiyondur. $F''(u) \leq 0$ (veya $F''(u) \geq 0$) olduğu durumlarda (1), (2) problemi literatürde iyice öğrenilmiştir, **[2]**, **[3]**, **[5]**, **[6-8]**. (1), (2) problemine özellikle petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması sürecinin matematiksel modelinin yazılımında rastlanmaktadır, **[3]**, **[4]**, **[10]**.

Bu makalede (1), (2) problemi özel olarak $F(u) = -\cos u\, , u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ve u_1, u_2 nin bilinen sabitler olduğu durumda incelenmiştir. $F(u)$ durum fonksiyonunun grafiği Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. *Durum fonksiyonu,* $F(u) = -\cos u\, , u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Sıçrayışın mevcut olma koşulundan görüldüğü gibi $F''(u) < 0$ olduğundan problemin çözümündeki sıçrayış $u_1 < u_2$ durumda oluşur ve sıçrayış hemen koordinat başlangıcından itibaren oluşur.

Önce $u_1 = \frac{3\pi}{2}, u_2 = \frac{\pi}{2}$ durumunu inceleyelim. Açıktır ki, bu durumda çözümü darbe dalgası şeklinde ifade edemeyiz, çünkü sıçrayış entropinin artma koşulunu korumamaktadır.

Karakteristikler yönteminin genel yapısına göre (1), (2) probleminin çözümünü yazmak için $u = \frac{x}{t}, u = u_1$ ve $u = u_2$ doğrularını çözümün sürekliliğini sağlamak ve başlangıç koşulunu korumak suretiyle birleştirmek gerekir. Bundan dolayı söz konusu çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2}, & \frac{x}{t} < -1 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{x}{t}\right), & -1 < \frac{x}{t} < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{x}{t} > 1 \end{cases} \tag{3}$$

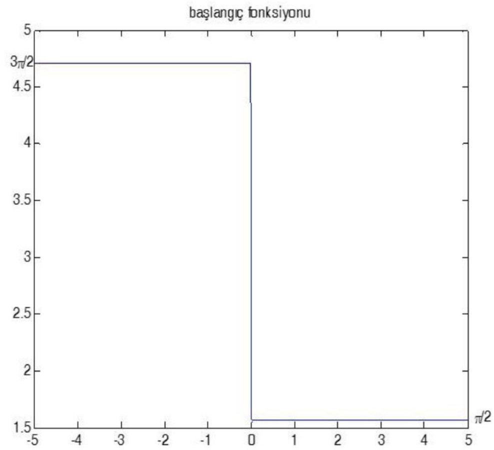
şeklinde yazılır. Başlangıç fonksiyon ve (3) formülü ile tanımlanan çözümün grafiği sırasıyla Şekil 2 ve Şekil 3 de gösterilmiştir.

Şimdi, (3) ifadesi ile tanımlanan fonksiyonun (1), (2) probleminin zayıf çözümü olduğunu ispatlayalım. Bunun için $D = \{(-a,a) \times (0,T)\} \subset Q_T$ bölgesinin sınırlarında sıfır değerini alan, diğer yerlerde negatif olmayan, her iki değişkene göre sürekli diferansiyellenebilir olan ve D de sonlu taşıyıcıya sahip herhangi bir $\varphi(x,t)$ test fonksiyonu için

$$\iint_D \{u(x,t)\,\varphi_t(x,t) - \cos u(x,t)\varphi_x\}\,dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x,t)\varphi(x,0)dx = 0$$

ifadesinin gerçekleştiğini gösterelim. Sonuncu eşitlikte $u(x,t)$ fonksiyonunun (3) deki ifadesini kullanırsak

$$\int_0^T\int_{-a}^{a} u(x,t)\,\varphi_t(x,t) - \cos u(x,t)\varphi_x\,dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x,t)\varphi(x,0)dx$$

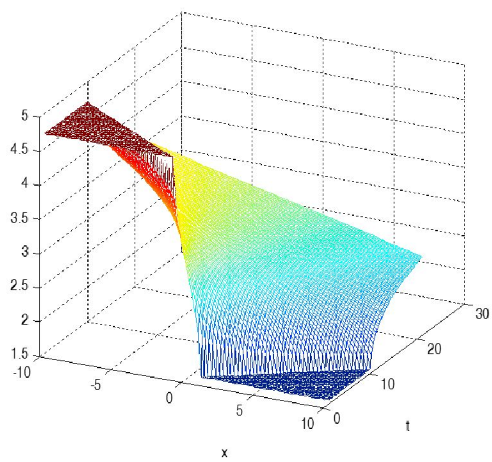


Şekil 2. *Başlangıç fonksiyonun grafiği,* $u_1 > u_2$

$$= \int_0^T \int_{-a}^{-t} \frac{3\pi}{2}\varphi_t(x,t) - \cos\frac{3\pi}{2}\varphi_x\, dxdt + \int_0^T \int_{-t}^{t} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_t(x,t)$$

$$- \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_x\, dxdt + \int_0^T \int_{t}^{a} \frac{\pi}{2}\varphi_t(x,t) - \cos\frac{\pi}{2}\varphi_x\, dxdt$$

$$+ \int_{-a}^{0} \frac{3\pi}{2}\varphi(x,0)dx + \int_0^a \frac{\pi}{2}\varphi(x,0)dx$$



Şekil 3. *(1), (2) probleminin çözümü*

$$= \int_0^T\int_{-a}^{-t} \frac{3\pi}{2}\varphi_t(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{-t}^{t} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_t(x,t)$$

$$- \int_0^T\int_{-t}^{t} \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_x\, dxdt$$

$$+ \int_0^T\int_{t}^{a} \frac{\pi}{2}\varphi_t(x,t)dxdt + \int_{-a}^{0}\frac{3\pi}{2}\varphi(x,0)dx + \int_0^a \frac{\pi}{2}\varphi(x,0)dx$$

buluruz. İntegralleme sırasını değiştirirsek

$$\frac{3\pi}{2}\int_{-a}^{-T}\int_0^T \varphi_t(x,t)dtdx + \frac{3\pi}{2}\int_{-T}^{0}\int_0^{-x} \varphi_t(x,t)dtdx$$

$$+ \int_{-T}^{0}\int_{-x}^{T} \left(\pi - \operatorname{asin}\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_t(x,t)dtdx$$

$$\int_0^T\int_x^T \left(\pi - \operatorname{asin}\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_t(x,t)dtdx$$

$$+ \int_0^T\int_{-t}^{t} cos\left(\pi - \operatorname{asin}\left(\frac{x}{t}\right)\right)\varphi_x(x,t)dxdt$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_0^T\int_0^x \varphi_t(x,t)dtdx$$

$$\frac{\pi}{2}\int_T^a\int_0^T \varphi_t(x,t)dtdx + \frac{3\pi}{2}\int_{-a}^{0}\varphi(x,0)dx + \frac{\pi}{2}\int_0^a\varphi(x,0)dx$$

$$= -\frac{3\pi}{2}\int_{-a}^{-T}\varphi(x,0)dx + \frac{3\pi}{2}\int_{-T}^{0}\varphi(x,-x)dx$$

$$-\frac{3\pi}{2}\int_{-T}^{0}\varphi(x,0)dx - \int_{-T}^{0}(\pi - \operatorname{asin}(-1))\varphi(x,-x)dx$$

$$\int_{-T}^{0}\int_{-x}^{T} \varphi(x,t)\frac{x}{t^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}dtdx - \int_{0}^{T}(\pi - \operatorname{asin}(1))\varphi(x,x)dx$$

$$-\int_{0}^{T}\int_{x}^{T} \varphi(x,t)\frac{x}{t^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}dtdx$$

$$\int_{0}^{T}\int_{-t}^{t} \varphi(x,t)\frac{x}{t^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}dxdt$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_{-a}^{T}\varphi(x,x)dx - \frac{\pi}{2}\int_{-T}^{0}\varphi(x,0)dx - \frac{\pi}{2}\int_{T}^{a}\varphi(x,0)dx$$

$$+\frac{3\pi}{2}\int_{-a}^{-T}\varphi(x,0)dx + \frac{3\pi}{2}\int_{-T}^{0}\varphi(x,-x)dx = 0$$

elde ederiz.

Şimdi $u_1 = \frac{\pi}{2}$, $u_2 = \frac{3\pi}{2}$ olması durumda (1), (2) probleminin çözümünü inceleyeceğiz. Sıçrayışın mevcut olma koşuluna göre **[4]**, **[9]**, bu durumda problemin çözümü sıçrayışa maruz kalır. **[1]**, **[10]** takip ederek aşağıdaki yardımcı problemi içerelim.

$A(\cdot)$ ile $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ operatörünü gösterelim. Bu notasyonda (1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(-\cos u) = 0$$

şeklini alır. A^{-1} ile A operatörün tersini gösterelim. Denklemin her iki tarafına A^{-1} i uygularsak

$$\frac{\partial A^{-1}u}{\partial t} + (-\cos u) = A^{-1}(0) \qquad \textbf{(4)}$$

alırız.

$A^{-1}(0) = h$

ile gösterirsek, buradan $A\,h = 0$ ve böylece $h(t) \in \ker A$ olur. $h_1(t) \in \ker A$ olmak suretiyle (4) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial t}[A^{-1}.u + h_1] - \cos u = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $h'(t) = -h_1(t)$ dir.

$$\boldsymbol{A^{-1}.u + h_1 = w(x,t)} \qquad \textbf{(5)}$$

alırsak, (5) ifadesinden

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}} \qquad \textbf{(6)}$$

elde ederiz. (5) ve (6) ifadelerini birlikte dikkate alırsak (4) denklemini

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} - \cos\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0} \qquad \textbf{(7)}$$

biçiminde yazabiliriz. (6) denklemi için başlangıç koşulu

$$\boldsymbol{w(x,0) = w_0(x)} \qquad \textbf{(8)}$$

olur. Burada

$$\boldsymbol{\frac{dw_0(x)}{dx} = u_0(x)} \qquad \textbf{(9)}$$

dir. (7), (8) problemine yardımcı problem denir. Görüldüğü gibi yardımcı problem tek değildir.

Şimdi, yardımcı problemi çözebilmek için aşağıdaki notasyonları içerelim

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p\,, \frac{\partial w}{\partial x} = q.$$

Bu notasyonda (7) denklemi $\pi(p,q) = p - \cos q = 0$ haline gelir. π denklemini x e ve t ye göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sin q \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} + \sin q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

alırız. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$ olduğundan sonuncu denklemler

$$\boldsymbol{\frac{\partial p}{\partial t} + \sin q \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial q}{\partial t} + \sin q \frac{\partial q}{\partial x} = 0} \qquad \textbf{(10)}$$

şekline dönüşür. Önce (10) denklemlerine karşılık gelen

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{\sin q}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dw}{p-\cos q}=ds \qquad (11)$$

karakteristik denklemini yazalım. Karakteristik denklemin çözümünü tek olarak bulmak için aşağıdaki başlangıç koşullarını ekleyelim:

$$t|_{s=0}=0, x|_{s=0}=\xi, q|_{s=0}=\left.\frac{\partial w_0}{\partial x}\right|_{s=0}, \qquad p|_{s=0}=\cos\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\Big|_{s=0},$$

$$w|_{s=0}=w_0(\xi)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\xi, \xi<0\\ \frac{3\pi}{2}\xi, \xi>0.\end{cases} \qquad (12)$$

s parametre olmak üzere (11) denklemler sisteminden

$t=s+c_1, p=c_2, q=c_3, x=s\sin c_3+c_4, w=(c_2-\cos c_3)s+c_5$

alırız. Burada $c_i, (i=1,2,3,4,5)$ ler herhangi integralleme sabitleridir. Söz konusu sabitler (12) koşullarından

$$c_1=0, c_2=\cos\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right), c_3=\frac{\partial w}{\partial\xi}, \ c_4=\xi, c_5=w_0(\xi)$$

olarak bulunur. Elde edilen sabitler yerine konursa (11), (12) probleminin çözümünü

$$w(x,t)=\begin{cases}w_-, \xi<0\\ w_+, \xi>0\end{cases} \qquad (13)$$

şeklinde elde ederiz. Burada $w_-=(\cos u_1-u_1\sin u_1)t+\frac{\pi}{2}x, w_+=(\cos u_2-u_2\sin u_2)t+\frac{3\pi}{2}x$ ve $\xi=x-t\sin u$ olmaktadır. $w_-=w_+$ koşulundan $W=\frac{dx}{dt}=-2$ alırız. Dolayısıyla bu durumda problemin gerçek çözümü

$$w(x,t)=\begin{cases}w_-, \frac{x}{t}<-2,\\ w_+, \frac{x}{t}>-2\end{cases} \qquad (14)$$

olur. Şekil 4 ve Şekil 5 de sırasıyla dalganın başlangıç profili ve zamana göre değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi bu durumda başlangıçta bulunan sıçrayış $W = 2$ hızıyla ox ekseninin negatif yönüne doğru hareket etmektedir.

3. BÜKEYLİĞİ OLAN DURUM FONKSİYONLU PROBLEM

Yukarıdaki bölümde (1), (2) problemini $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığında incelemiştik. Bu bölümde problemi $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ aralığında inceleyeceğiz.

1.Durum Önce (1) denkleminin çözümünü

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{5\pi}{2}, x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, x > 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde ele alalım.

[4] ve **[10]** takip ederek, $F(u) = -\cos u$ fonksiyonunun $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ aralığında yukarı konveks katmanını kuralım.

Şekil 6 dan görüldüğü gibi $F(u) = -\cos u$ fonksiyonunun yukarı konveks katmanı fonksiyonun grafiğinin $D\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ile $B(u_1, -\cos u_1)$ aralığında kalan parçası ile BC doğrusundan oluşur. u_1 noktasının değerini bulmak için $C\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$ noktasından çıkan teğetin denklemi

$$m = f'(u_1) = \frac{f(u_1) - f\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{u_1 - \frac{5\pi}{2}}$$

veya

$$g(u_1) \equiv u_1 - \frac{5\pi}{2} + \cot u_1 = 0$$

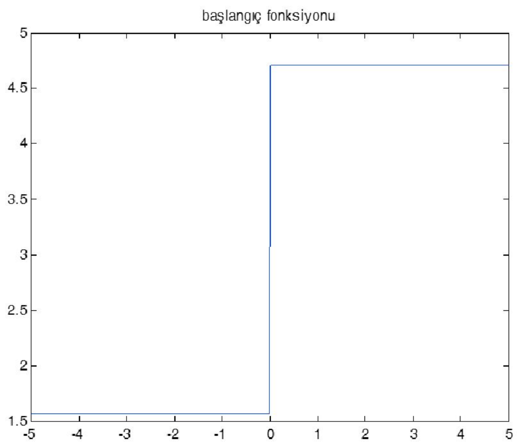
kullanalım. Analizden bildiğimiz ara değer teoremine göre $g(\pi)g\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$ olduğundan bu denklemin $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığında bir kökü vardır. Söz konusu kökü bulmak için

$$x_{n+1} = x_n + \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad (n = 0,1,2, \dots .)$$

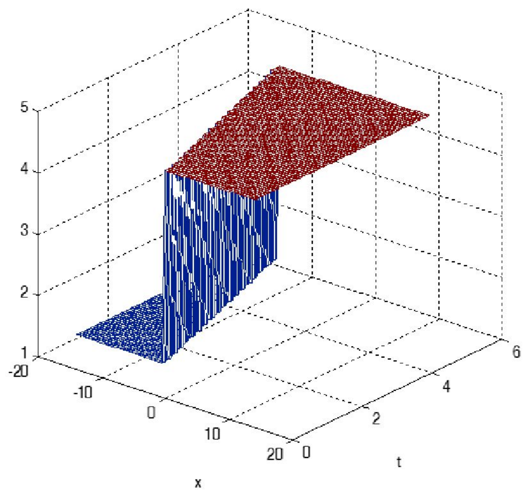
Newton iterasyon yöntemini kullanalım.

$g(x) = -x + \frac{5\pi}{2} - \cot x, \qquad g'(x) = -1 + \frac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x$ olduğunu

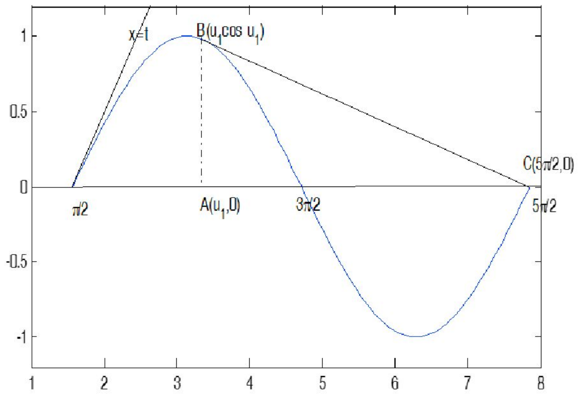
dikkate alarak denklemin kökünü $x_6 = 3.36$ olarak buluruz.



Şekil 4. *Başlangıç fonksiyonun grafiği,* $u_1 < u_2$



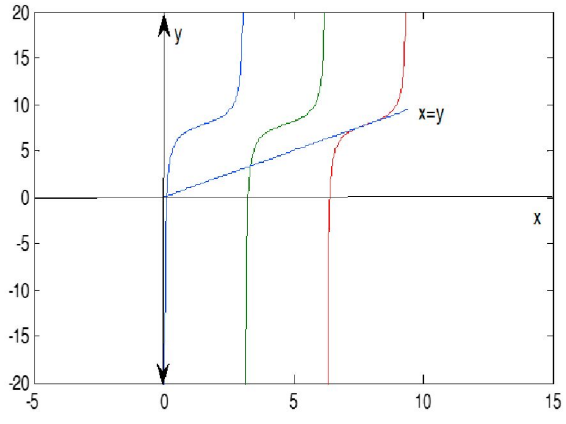
Şekil 5. *Darbe dalgası*



Şekil 6. *$F(u) = -\cos u$ fonksiyonunun yukarı konveks katmanı* $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

Genel teoriye göre denklemin çözümü zayıf çözümü olmaktadır (Şekil 8). xou sisteminde çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{5\pi}{2}, x < Kt \\ \pi - \arcsin\frac{x}{t}, Kt < x < t \\ \frac{\pi}{2}, t < x \end{cases} \tag{15}$$



Şekil 7. $g(u_1) = 0$ *denkleminin çözümü*

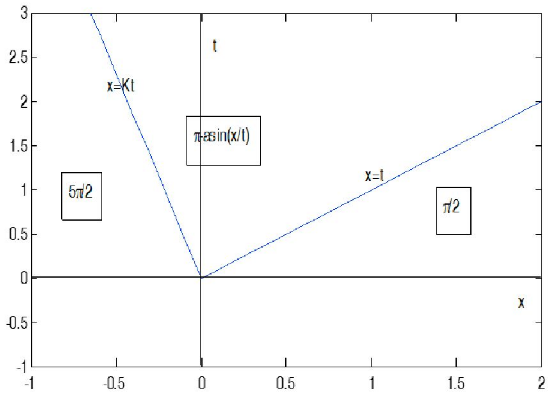
şeklinde yazılır (Şekil 10). Burada $F'(\mathrm{u}) = \sin 3.36 = -0.2167 = K$ olmaktadır.

2.Durum Bu bölümde (1) denklemini

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, x<0\\ \dfrac{5\pi}{2}, x>0\end{cases}$$

koşulu çerçevesinde inceleyeceğiz. Bunun için $F(u)=-\cos u$ fonksiyonunun $u\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ aralığında aşağı konveks katmanını kuralım.

Şekil 10 dan görüldüğü gibi, $F(u)=-\cos u$ fonksiyonunun aşağı konveks katmanı, AB doğrusu ve fonksiyonun grafiğinin $B(u_2,-\cos u_2)$ noktası ile $D\left(\frac{5\pi}{2},0\right)$ aralığında kalan parçasından oluşur. $-\cos u$ fonksiyonunun aşağı ve yukarı konveks katmanları simetrik olduğundan u_2 noktasının değeri $u_{2}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-u_1$ denkleminden $u_2\cong 1.93\pi$ olarak bulunur.

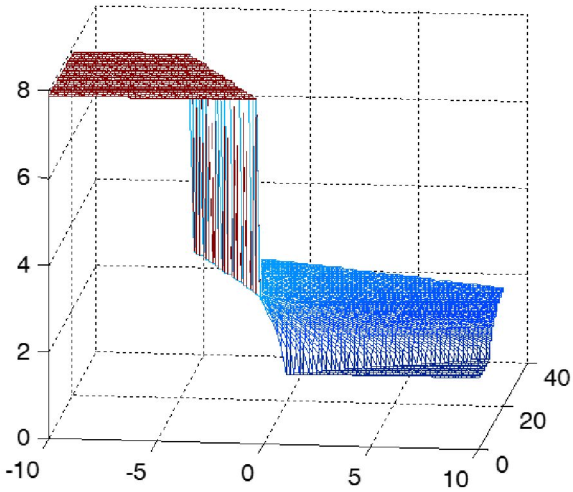


***Şekil 8.** Problemin zayıf çözümü*

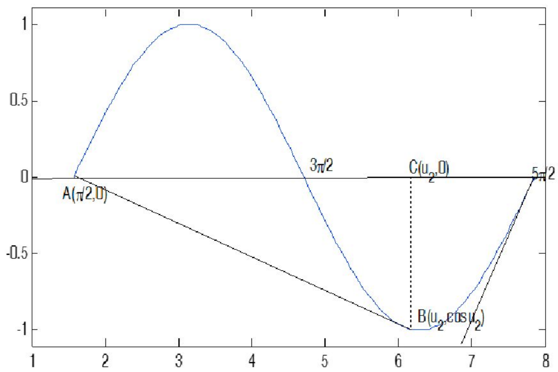
Bu durumda aranan kök $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ noktasına göre simetrik noktalardır. O halde

$\sin u_2\cong\sin 1.93\pi=-0.217=K$

olur. $\left(\frac{5\pi}{2},0\right)$noktasından çıkan teğet $x = f'(u)|_{u=\frac{5\pi}{2}}.t = \sin\frac{5\pi}{2}\ t = t$ olmaktadır.



Şekil 9. *Dalganın zamana göre değişimi*

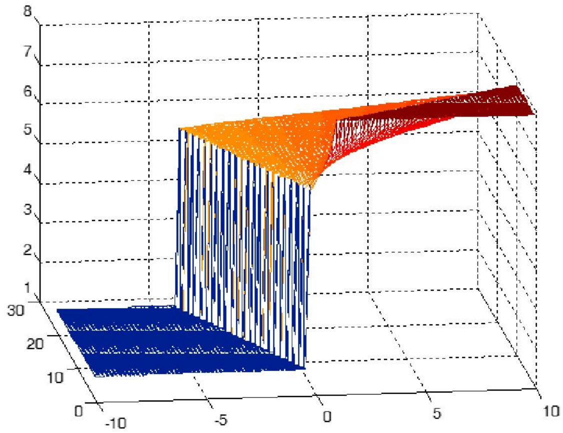


Şekil 10. $F(u) = -\cos u$ *fonksiyonunun aşağı konveks katmanı* $u \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

Benzer şekilde burada da sıçrayış $\xi = x - Kt$ ve $\xi = x - t$ doğrusu üzerinde gerçekleşecektir ve bu sıçrayış $\frac{\pi}{2}$ den u_2 ye kadar olacaktır. Bu halde çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, x < Kt \\ 2\pi + \arcsin\frac{x}{t},\ Kt < x < t \\ \frac{5\pi}{2}, t < x \end{cases}$$

olur.



Şekil 11. *Dalganın zamana göre değişimi*

4. SONUÇLAR

- Bükeyliği olmayan durum fonksiyonuna sahip 1.basamaktan nonlineer hiperbolik tür denklem için Riemann probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümleri bulunmuştur.
- Çözümdeki sıçrayış noktasının yerini belirlemek için özel yardımcı problem içerilmiştir.
- Elde edilen çözümün zayıf çözüm olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Abasov, M.T., Rasulov, M.A., Ibrahimov, T.M., Ragimova, T.A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok., 43, No.1, pp.150-153, 1991.

[2] Gelfand, I. M., Some Problems in the Theory of Quasi Linear

Equations, Amer. Math. Soc. Trans., 29, pp. 295-381, 1963.

[3] Godlewski, E., Raviart, P.A., Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Ellipses, Paris, 1991.

[4] Goritski, A.Y., Kruzhkov, S.N., Chechkin, G.A., Quasi Linear First Order Partial Differential Equations, Moscow State University Press, Moscow, 1997.

[5] Kruzhkov, S.N., First Order Quasi Linear Equation in Several Independent Variables, Math. USSR Sb., 10:2, pp. 217-243, 1970.

[6] Lax, P.D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. of Pure and App. Math, Vol. VII, pp. 159-193, 1954.

[7] Lax, P., The Formation and Decay of Shock Waves, Amer. Math. Monthly, 79, pp.227-241, 1972.

[8] Lax, P.D., Development of Singularities of Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations, J. Math. Phys., v.5, No 5, pp.611-613, 1964 .

[9] Oleinik, O.A., Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, Uspekhi Mat. Nauk, 12, pp.3-73, 1957.

[10] Rasulov, M.A., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul, 2011.