Dumlupınar Üniversitesi | Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı 23, Aralık 2010 | ISSN - 1302 - 3055

GRUPOİDLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLERİN TABAN DEĞİŞTİRMESİ

Rahime ÇELİK[1], Özgün GÜRMEN[2]

[1]Kastamonu Üniversitesi, İnebolu Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Programcılığı, Kastamonu, rahime@mail.dumlupinar.edu.tr

[2]Dumlıpınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, ogurmen@dumlupinar.edu.tr

Geliş Tarihi: 13.10.2010   Kabul Tarihi: 29.11.2010

ÖZET

Bu çalışmada, grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslerin geri çekme yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Çaprazlanmış Kompleks, Çaprazlanmış Modül, Pullback, Grupoid.*

CHANGE BASE FOR CROSSED COMPLEXES OVER GROUPOIDS

ABSTRACT

In this work, we give the notion of a pullback crossed complex of groupoids.

Key Words: *Crossed Complex, Crossed Module, Pullback, Gruopoid.*

1.GİRİŞ

D_1 grupoidinin C_1 grupoidi üzerindeki etkisi, morfizmler kümesi üzerinde;

$$\begin{aligned} D_1 \times C_1 &\longrightarrow C_1 \\ (d,c) &\longrightarrow c^d \end{aligned}$$

c^d nin tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart $t(c) = s(d)$ olmalı ve doğal olarak $t\left(c^d\right) = t(d)$ olup

i. $(c_1 \circ c_2)^d = c_1^d \circ c_2^d$ ve $(e_x)^d = e_y$, $d \in D_1(x,y)$ ve $c_1 \in C_1(x,x)$ dir.

ii. $c_1^{d_1 \circ d_2} = \left(c_1^{d_1}\right)^{d_2}$, $d_1 \in D_1(x,y)$, $d_2 \in D_1(y,z)$ dir.

dır.[1]

C_1 ve D_1 aynı C_0 obje kümesi üzerinde birer grupoid, C_1 tamamen bağlantısız ve D_1 in C_1 üzerine bir grupoid etkisi var olsun. $\delta : C_1 \longrightarrow D_1$ bir grupoid morfizmi olmak üzere yani;

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & D_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \end{tikzcd}$$

$\delta(x \circ y) = \delta(x) \circ \delta(y)$ olsun. Bu durumda,

CM1) $t(c) = s(d)$ ve $c \in C_1$, $d \in D_1$ olmak üzere $\delta\left(c^d\right) = \left(d^{-1}\right) \circ \delta(c) \circ d$

CM2) $c, c' \in C(x,x); x \in C_0$ olmak üzere $c^{\delta(c')} = (c')^{-1} \circ c \circ c'$

şartları sağlanırsa δ ya grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül denir. [1]

Grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisi

Objeleri

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & D_1 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \end{tikzcd} \quad \text{ve} \quad \begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & D_2 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \end{tikzcd}$$

şeklinde çaprazlanmış modüller ve morfizmleri de

$$\begin{tikzcd} \left(C_1 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & \left(D_1 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[d, dashed, "\beta"'] \\ \left(C_2 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[r, "\delta_2"] & \left(D_2 \rightrightarrows C_0\right) \end{tikzcd}$$

diyagramını komütatif yapacak şekilde, α, β grupoid morfizmleridir. Bu kategoriyi $\boldsymbol{XMod}/\boldsymbol{C_0}$ şeklinde göstereceğiz.

1.1. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler

Çaprazlanmış kompleksler ilk olarak [2] de Brown ve Higgins tarafından tanımlanmıştır. [2] den çaprazlanmış kompleks tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$C:\ \ldots \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$$

diyagramı

1. $\delta_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$ **,** C_0 tabanlı bir grupoidler için bir çaprazlanmış modül olmalıdır.

2. Her n için $\delta_n \circ \delta_{n+1} = \textit{sıfır dönüşüm}$ olmalıdır.

3. Burada; C_2, C_0 üzerinde tamamen bağlantısız bir grupoid ve $n \geq 3$ için C_n ler de yine C_0 üzerinde tamamen bağlantısız grupoidlerdir.

4. $\left(C_1 \rightrightarrows C_0 \right)$ grupoidinin $n \geq 2$ için $\left(C_n \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$ tamamen bağlantısız grupoidleri üzerinde grupoid etkisi vardır ve $\delta_2\left(C_2\right)$, $n \geq 3$ için C_n ler üzerine birim etki ile etki eder.

5. δ_i ler ; C_0 üzerinde birim dönüşümdür. Yani;

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \arrow[r, equal] & C_0
\end{tikzcd}$$

(C_1 grupoid, C_2, C_3 tamamen bağlantısız) ve $\delta_i\left(C_0\right) = C_0$ dır.

şartları sağlanırsa C ye C_0 tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleks [2] denir. Ayrıca çaprazlanmış komplekslerin çeşitli uygulamaları için A. Tonks [5]'e bakınız.

Grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleksler kategorisi

$$\begin{tikzcd}
C:\ \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "f_2"'] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_0 \arrow[d, equal] \\
C':\ \ldots \arrow[r] & C_2' \arrow[r, "\delta_2'"'] & C_1' \arrow[r, shift left, "s'"] \arrow[r, shift right, "t'"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

$\ldots$

diyagramı komütatif ve (f_2, f_1) bir çaprazlanmış modül morfizmi (grupoidler üzerinde); $n \geq 3$ için de f_n ler birer grup homomorfizmi olmak üzere C den C' ne giden çaprazlanmış kompleks morfizmi $f = (f_1, f_2, f_{3,}, ...)$ ile tanımlanır.

C_0 tabanlı grupoidlerin çaprazlanmış kompleksler kategorisini $\mathbf{XComp}/\mathbf{C_0}$ ile göstereceğiz.

1.2. Çaprazlanmış Komplekslerin Taban Değiştirmesi

$$(C, I): \quad ... \quad C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I$$

I obje kümesi üzerinde bir grupoidler için çaprazlanmış kompleks olsun. Bu çaprazlanmış komplekse I tabanlı çaprazlanmış kompleks denir. Herhangi bir J kümesi ve $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu verildiğinde (C, I) çaprazlanmış kompleksinden yararlanarak, J tabanlı yeni bir çaprazlanmış kompleks elde edeceğiz. Önce [4] ten $C_0 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I$ grupoidinin $f : J \longrightarrow I$ dönüşümü ile pullback grupoidin nasıl oluştuğunu verelim.

$$\begin{tikzcd}
f^*(C_0) \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & & C_0 \arrow[d, shift right=2, "s"'] \arrow[d, "t"] \\
J \arrow[rr, "f"'] & & I \arrow[u, shift right=2, "e"']
\end{tikzcd}$$

şeklinde bir $f^*(C_0) \rightrightarrows J$ grupoidini oluşturacağız ve burada; $f^*(C_0)$'a $\left(C_0 \rightrightarrows I \right)$ grupoidinin $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla pullback'i (geri çekmesi) denir. Burada $\overline{f}$, $f^*(C_0)$, s' ve t', $f^*(C_0)$; $J \times C_0 \times J$ nin bir alt kümesi olmak üzere,:

$$f^*(C_0) = \left\{ \begin{array}{c} (j_1, x, j_1') : x \in C_0,\ s(x) = f(j_1),\ t(x) = f(j_1'), \\ x : f(j_1) \longrightarrow f(j_1') \ morfizm \end{array} \right\}$$

dir. $j_1, j_1' \in J$ için,

$$s'(j_1, x, j_1') = j_1$$

$$t'(j_1, x, j_1') = j_1'$$

olup; (j_1, x_1, j_1') ve (j_2, x_2, j_2') morfizmlerinin $f^*(C_0)$ içindeki kompozisyonu; $j_1' = j_2$ olmak üzere;

$$(j_1, x_1, j_1') \circ (j_2, x_2, j_2') = (j_1, x_1 \circ x_2, j_2')$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca $\overline{f}\left(j_1, x, j_1'\right) = x$ şeklinde tanımlıdır. Buradan J tabanlı bir $f^*\left(C_0\right) \overset{s'}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} J$

şeklinde yeni bir grupoid elde ederiz. Bu grupoid $Gp/_I$ kategorisinde, $\left(C_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} I\right)$ grupoidinin bir geri

çekmesidir. Yani;

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrd, "\theta"] \arrow[rdd, shift right, "s'"'] \arrow[rdd, shift left, "t'"] & & \\
& f^*\left(C_0\right) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "t_1"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}$$

diyagramında $M \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} J$ başka bir J tabanlı grupoid ve (θ, f) de ; $M \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} J$ grupoidinden $\left(C_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} I\right)$ grupoidine giden bir morfizm olmak üzere; aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir tek $\overline{\mu} : M \longrightarrow f^*\left(C_0\right)$ grupoid morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrd, "\theta"] \arrow[rd, dashed, "\overline{\mu}"] \arrow[rdd, shift right, "s'"'] \arrow[rdd, shift left, "t'"] & & \\
& f^*\left(C_0\right) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "t_1"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}$$

$\overline{f}\,\overline{\mu}(m) = \theta(m)$ olup $f^*\left(C_0\right)$ için $\overline{\mu}$ evrensellik özelliğini sağlar.

Şimdi [4] de verilen yolu kullanarak benzer durumu $\left(C_1 \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} I \right)$ grupoidi için uyarlayalım. Aynı şekilde $\left(C_1 \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} I \right)$ tamamen bağlantısız grupoidi için yaparsak,. $f : J \longrightarrow I$ fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{array}{ccc} f^*(C_1) & \xrightarrow{\overline{f_1}} & C_1 \\ s' \Big\downarrow\Big\downarrow t' & & s \Big\downarrow\Big\downarrow t \\ J & \xrightarrow[f]{} & I \end{array}$$

diyagramını oluşturacağız. $f^*(C_1)$; $J \times C_1 \times J$ nin bir alt kümesi olup, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$f^*(C_1) = \{ (j, x, j) : (\therefore C_1 \ tamamen \ bağlantısız) x \in C_1 \left(f(j) = f(j) \right) \}$

olup, $(j, x, j) : J \longrightarrow J$ bir morfizm olarak $f^*(C_1)$ de değerlendirilir. Burada $s'(j, x, j) = j = t'(j, x, j)$ dir ve

$(j, x_1, j) \circ (j, x_2, j) = (j, x_1 \circ x_2, j)$ şeklinde de kompozisyon tanımlanabilir. Böylece, $\left(C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I \right)$ tamamen bağlantısız grupoidinden $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla J tabanlı tamamen bağlantısız $f^*(C_1) \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} J$

şeklinde bir grupoid elde edilir. Dolayısıyla,

$$\delta_1 : C_1 \longrightarrow C_0 \rightrightarrows I$$

çaprazlanmış modülü yardımıyla;

$$\partial_1 : f^*(C_1) \longrightarrow f^*(C_0) \rightrightarrows J$$

çaprazlanmış modülünü oluşturacağız. Bu dönüşüm,

$$\begin{aligned} \partial_1 : f^*(C_1) &\longrightarrow f^*(C_0) \\ (j, x, j) &\longrightarrow (j, \delta_1(x), j) \end{aligned}$$

olsun. $f^*(C_0)$ ın $f^*(C_1)$ üzerindeki etkisi $\overline{x} = (j_1, x, j_1') \in f^*(C_0)$ ve $\overline{a} = (j, a, j) \in f^*(C_1)$ olmak üzere; $\overline{x}$ in $\overline{a}$ üzerindeki etkisi $t(\overline{a}) = j = j_1 = s(\overline{x})$ ile,

$$\left(\overline{a}\right)^{\overline{x}} = \left(j_1', a^x, j_1'\right) \in f^*\left(C_1\right)\left(j_1', j_1'\right)$$

dir.

$$t\left(\overline{a}\right) = s\left(\overline{x}\right) \text{ ve } t\left(\overline{a}^{\overline{x}}\right) = t\left(j_1', a^x, j_1'\right) = j_1' = t\left(\overline{x}\right)$$

olup bu etki iyi tanımlı bir grupoid etkisidir. Bu etkiye göre ∂_1 in J tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış modüldür. Gerçekten de

CM1) $\partial_1\left(\overline{a}^{\overline{x}}\right) = \partial_1\left(j_1, a, j_1\right)^{\left(j_1, x, j_1'\right)} = \partial_1\left(j_1', a^x, j_1'\right)$

$$= \left(j_1', \delta_1\left(a^x\right), j_1'\right) = \left(j_1', x^{-1} \circ \delta\left(a\right) \circ x, j_1'\right)$$

$$= \left(j_1', x^{-1}, j_1\right) \circ \left(j, \delta\left(a\right), j\right) \circ \left(j_1, x, j_1'\right)$$

$$= \left(j_1', x^{-1}, j_1\right) \circ \partial_1\left(j, a, j\right) \circ \left(j_1, x, j_1'\right)$$

$$= \left(\overline{x}\right)^{-1} \circ \partial_1\left(\overline{a}\right) \circ \left(\overline{x}\right)$$

CM2) $\overline{a_1} = \left(j, a_1, j\right)$, $\overline{a_2} = \left(j, a_2, j\right) \in f^*\left(C_1\right)$ olsun.

$$\left(\overline{a_1}\right)^{\partial_1\left(\overline{a_2}\right)} = \left(j, a_1, j\right)^{\left(j, \delta_1\left(a_2\right), j\right)} = \left(j, a_1^{\delta_1\left(a_2\right)}, j\right)$$

$$= \left(j, a_2^{-1} \circ a_1 \circ a_2, j\right)$$

$$= \left(j, a_2^{-1}, j\right) \circ \left(j, a_1, j\right) \circ \left(j, a_2, j\right)$$

$$= \left(\overline{a_2}\right)^{-1} \circ \overline{a_1} \circ \overline{a_2}$$

dir. Böylece,

$$\begin{tikzcd}
f^*\left(C_1\right) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & f^*\left(C_0\right) \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\
J \arrow[r, equal] & J
\end{tikzcd}$$

J tabanlı bir grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül olur. Sonuç olarak, $\partial_1 : (C_1) \longrightarrow (C_0) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I$ bir çaprazlanmış modül olduğunda $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla bu δ_1 çaprazlanmış modülünün pullback çaprazlanmış modülü J tabanlı

$$\partial_1 : f^*(C_1) \longrightarrow f^*(C_0) \rightrightarrows J$$

morfizm olur. Bu yapılanlara göre [4] den yararlanarak $n \geq 2$ için C_n grupoidleri üzerine uyarlayalım.

$n \geq 2$ için $\left(C_n \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$ tamamen bağlantısız grupoidleri için $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla; $f^*(C_n) \rightrightarrows J$ grupoidlerini oluşturabiliriz.

$$f^*(C_n) = \{ (j, x, j) : x \in C_n (f(j), f(j)) \}$$

için

$$\begin{aligned} \partial_n : f^*(C_n) &\longrightarrow f^*(C_{n-1}) \\ (j, a, j) &\longrightarrow (j, \delta_n(a), j) \end{aligned}$$

olmak üzere J tabanlı $f^*(C,I) : \ldots f^*(C_2) \xrightarrow{\partial_2} f^*(C_1) \xrightarrow{\partial_1} f^*(C_0) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} J$

şeklinde bir çaprazlanmış kompleks elde ederiz. Bu yapının; (C, I) çaprazlanmış kompleksinin, $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla geri çekmesi olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{tikzcd}
(C,I): & \cdots & (C_2) \arrow[r, "\delta_2"] & (C_1) \arrow[r, "\delta_1"] & (C_0) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & I \\
\left(f^*(C),J\right): & \cdots & f^*(C_2) \arrow[r, "\partial_2"] & f^*(C_1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[u, "\overline{f}_1"] & f^*(C_0) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\overline{f}"] & J \arrow[u, "f"] \\
(M,J): & \cdots & M_2 \arrow[r, "\delta_2'"] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu}_3"] & M_1 \arrow[r, "\delta_1'"] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu}_2"] \arrow[uu, bend right, "\theta_2"'] & M_0 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu}_1"] \arrow[uu, bend right, "\theta_1"'] & J \arrow[uu, bend right, "f"']
\end{tikzcd}$$

diyagramını komütatif yapacak şekilde bir tek

$$\overline{\mu} = \left(\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \ldots \right) : (M, J) \longrightarrow \left(f_*(C), J \right)$$

morfizminin var olduğunu göstermeliyiz. Pullback grupoid yapısını oluştururken Diyagram 2 nin bir pullback diyagramı ve $\overline{\mu_1}$ nin tek olduğundan. $\overline{f\,\mu_1} = \theta_1$ dir.

Benzer düşünceyle; $\left(M_1 \underset{t''}{\overset{s''}{\rightrightarrows}} J \right)$, J üzerinde başka bir tamamen bağlantısız grupoid olduğunda; $f^*\left(C_1\right)$ de bir pullback olduğundan Diyagram 3 te $\left(\theta_2, f\right)$, $\left(M_1 \rightrightarrows J \right)$ grupoidinden $\left(C_1 \rightrightarrows I \right)$ grupoidine bir grupoid homomorfizmi olmak üzere; $f^*\left(C_1\right)$ in oluşturulmasında $\overline{\mu_2} : M_1 \longrightarrow f_*\left(C_1\right)$; $\overline{f_1}\,\overline{\mu_2} = \theta_2$ olacak şekilde bir tek $\overline{\mu_2}$ morfizmi vardır ve $\partial_1\overline{\mu_2} : \overline{\mu_1}\delta_1'$ dür. Bu şekilde devam edilirse her n için

$$\overline{\mu_n} : M_n \longrightarrow f^*\left(C_n\right),\ \overline{f_n}\,\overline{\mu_n} = \theta_n \text{ ve } \overline{\partial_{n-1}\,\mu_n} = \overline{\mu_{n-1}}\delta_{n-1}'$$

olacak şekilde $\overline{\mu_n}$ homomorfizmleri vardır ve tektir. Yani,

$$\begin{tikzcd}
\left(f^*\left(C\right),J\right) \arrow[rr, "\overline{f}=\left(\overline{f_1},\overline{f_2},\ldots\right)"] & & \left(C,I\right) \\
& \left(M,J\right) \arrow[ul, dashed, "\overline{\mu}=\left(\overline{\mu_1},\overline{\mu_2},\ldots\right)"] \arrow[ur, "\theta=\left(\theta_1,\theta_2,\ldots\right)"'] &
\end{tikzcd}$$

her bir n için $\overline{f_n}\,\overline{\mu_n} = \theta_n$ olduğundan; $\overline{f} \circ \overline{\mu} = \theta$ olup, her n için $\overline{\mu_n}$ bu diyagramla komütatif yapacak bir tek homomorfizmler olduğundan $\overline{\mu}$, J tabanlı M çaprazlanmış kompleksinden $f^*\left(C\right)$ye tanımlı bir tek morfizmdir.

Sonuç olarak I tabanlı bir çaprazlanmış kompleksten $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla J tabanlı bir çaprazlanmış kompleks elde ederiz ki burada;

$$f^* : \boldsymbol{XComp}/\boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{XComp}/\boldsymbol{J}$$

şeklinde taban değiştirme funktoru tanımlamış oluruz.

KAYNAKÇA

[1] Brown, R. and Gılbert, N. D., Algebraic Models of 3-Types and types and automorphism structures for Crossed Modules, *Proc. London Math. Soc*.(3) 59, 51-73, (1989).

[2] Brown R., Higgins P.J.: Tensor Products and Homotopies for *w*-Groupoids and Crossed Complexes, J. Pure Appl. Algebra 47 (1987), no. 1, 1–33.

[3] Brown R.: Crossed complexes and homotopy groupoids as non commutative tools for higher dimensional local-to-global problems. Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories, 101–130, Fields Inst. Commun., 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004).

[4] Brown R. and Sivera R., `Algebraic colimit calculations in homotopy theory using fibred and cofibred categories', Theory and Applications of Categories, 22, 222-251,(2009)

[5] Tonks, A. P., Theory and applications of crossed complexes, PhD thesis, University of Wales, (1993)