Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı: 17 Aralık 2008 ISSN - 1302 - 3055

KONTROL EDİLEBİLİRLİK İLE KARARLILIK ARASINDAKİ İLİŞKİ

Ali BOZKURT*

*Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 42070 Konya, Türkiye, alibzkrt@gmail.com

Geliş Tarihi:13.03.2008 *Kabul Tarihi: 27.10.2008*

ÖZET

Bu çalışmada; kontrol edilebilirlik ile kararlılık arasındaki ilişki ele alınmıştır.[2]'de verilen ve kontrol edilebilirlik ile kararlılık arasındaki ilişkiyi ortaya koyan teorem, güncel kavramlara uygun hale getirilmeye çalışılmıştır.

Anahtar kelimeler: *Kontrol edilebilirlik, Kararlılık,* μ^* *-regüler matris,* ρ *-kontrol edilebilir çift*

RELATION BETWEEN CONTROLLABILITY AND STABILITY

ABSTRACT

In this study, relation between controllability and stability has been taken up. The theorem given in [2], presented relation between controllability and stability, has been composed based on up to date concept.

Key Words: *controllability, stability,* μ^* *-regular matrix,* ρ *-controllable pair*

1. GİRİŞ

Literatürde kontrol edilebilirlik ile kararlılık arasındaki ilişki birçok çalışmada ele alınmıştır, [2],[3],[6],[8],[9],[10],[11],[12]. Bu çalışmada, güncel kavramlar yardımı ile bu ilişki ele alınmıştır.

N boyutlu, karesel reel bir A matrisinin regüler olup olmadığını araştırmak için $\mu(A)$ şart sayısını kullanılmaktadır, [7]. $\mu^* \geq 1$ olmak üzere sıfırdan yeterince uzak olan matrisler için $\mu(A) < \mu^*$ ise bu taktirde Formata yerleşim hataları göz önüne alınarak yapılan yerleştirme sırasında matris regüler matrisler kısmında kalır. Bu durumda A matrisi, μ^*-regüler bir matristir. Literatürde $\mu^* \geq 1$ sayısı pratik regülerliğin şart sayısı olarak adlandırılır, [5].

(A,B) matris çifti için $W(N) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \Lambda & A^{N-1}B \end{pmatrix}$ olmak üzere $Y = W(N) \cdot W(N)^T$ matrisinin en küçük öz değeri $\lambda_1(Y)$ olsun. $\lambda_1(Y) > \rho$, $\rho > 0$ ise (A,B), ρ-kontrol edilebilir bir çifttir (Örneğin bak. [4]).

2. TEOREMLER

Teorem 2.1. N boyutlu, karesel, reel A matrisi; m sütunlu, N satırlı, reel B matrisi ve N boyutlu keyfi α ve β vektörleri verilsin. (A,B) kontrol edilebilir bir çift ise bu taktirde (A,B) kararlı hale getirilebilen bir çifttir, [6].

İspat: N boyutlu, karesel, reel A matrisi, m sütunlu, N satırlı, reel B matrisi ve α ile β N boyutlu keyfi vektörleri verilsin. (A,B) kontrol edilebilir bir çift ise

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),\ n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklem sistemi için $x(0)=\alpha$'dan başlayıp T'inci (T > 1) adımda verilen $x(T)=\beta$ vektöründe çözüm tamamlanabilir, [3],[10],[11]. Bu durumda (2.1) fark denklem sistemi için

$$n \to \infty,\quad \| x(n) \| \to 0 \tag{2.2}$$

şartını sağlayan bir $\{u(n)\}, n = 0,1,2,...$ kontrol dizisi seçilebilir. (2.1) sisteminin (2.2) şartını sağlaması durumunda Schur kararlı bir sistem olur. Bu ise iddiayı ispat eder.

Teorem 2. 2. A, N boyutlu karesel bir matris ve B, N satır m sütunlu bir matris ve (A,B) kontrol edilebilir bir çift olsun.

$$AHA^T - H = -BB^T \tag{2.3}$$

denkleminin pozitif tanımlı bir H matrisine sahip olması için gerek ve yeter şart, A matrisinin Schur kararlı bir matris olmasıdır, ([2], Discrete Lyapunov Teoremi).

[2]'de verilen teorem 2'yi çalışmamıza uygun bir şekilde düzenleyerek verelim.

Teorem 2.3. A, μ^*-regüler bir matris; α pozitif bir reel sayı; (A,B), ρ-kontrol edilebilir bir çift; αA^{-1} Schur kararlı bir matris ve $H = H^T > 0$ matrisi

$$AHA^T = \alpha^2 H + 2BB^T \tag{2.4}$$

denkleminin çözümü olsun. Bu taktirde

$$K = -B^T(BB^T + H)^{-1}A \tag{2.5}$$

matrisi için $A + BK$ matrisi Schur kararlıdır.

İspat: A, μ^*- regüler bir matris olduğundan (2.4) denklemi

$$(\alpha A^{-1})H(\alpha A^{-1})^T - H = -(\sqrt{2}A^{-1}B)(\sqrt{2}A^{-1}B)^T$$

biçiminde yazılabilir. (A,B), ρ-kontrol edilebilir bir çift ise $(\alpha A^{-1}, \sqrt{2}A^{-1}B)$ ρ-kontrol edilebilir bir çifttir. Ayrıca αA^{-1} matrisi, Schur kararlı bir matristir. Bu yüzden (2.4) eşitliğini sağlayacak bir $H = H^T > 0$ matrisi bulunur, [2]. Literatürde Sherman–Morrison–Woodbury formülü olarak bilinen (bak. [7])

$$(I + BB^T H^{-1})^{-1} = I - BB^T(H + BB^T)^{-1}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} A + BK &= A - BB^T(BB^T + H)^{-1}A \\ &= [I - BB^T(BB^T + H)^{-1}]A \\ &= [(I + BB^T H^{-1})A \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$H - (A + BK)H(A + BK)^T = H - (I + BB^T H^{-1})^{-1} AHA^T [(I + BB^T H^{-1})^{-1}]^T$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &(A + BK)H(A + BK)^T - H \\ &= -(I + BB^T H^{-1})^{-1}[(1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T](I + H^{-1}BB^T)^{-1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

olur.

Literatürde verilen bir A matrisinin fark kararlılığının şart sayısı $w(A)$ ve w^*-pratik Schur kararlılık parametresi tanıtılmıştır, [5]. (2.6)'da keyfi seçilen μ^*- regüler bir A matrisi için $w(\alpha A^{-1}) < w^*$, $(w^* > 1)$

olacak şekilde bir α pozitif reel sayısı vardır. Bu α sayısını bulmak için $\alpha = \frac{1}{2^k}$, $(k = 1,2,...,s)$ seçilebilir. (2.6), α seçimi ve $H = H^T > 0$ dan

$$H - (A + BK)H(A + BK)^T > 0 \tag{2.7}$$

dır. $A + BK$ matrisinin Schur kararlı bir matris olduğu görülmektedir. Sonuç olarak Sherman–Morrison–Woodbury formülünün bir versiyonu olan

$$(I + BB^T H^{-1})^{-1} = I - BB^T (H + BB^T)^{-1}$$

eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} K &= -(I + B^T H^{-1} B)^{-1} B^T H^{-1} A \\ &= -[I - B^T (BB^T + H)^{-1} B]^{-1} B^T H^{-1} A \\ &= -B^T (BB^T + H)^{-1} A \end{aligned}$$

olacak şekilde seçilecek bir K matrisi için $A + BK$ matrisi w^*-Schur kararlı bir matris olur. Bu ise iddiayı ispat eder. Teoremde α seçimi öz değerlere bağlı olmadan seçilmiş oldu, [4].

(2.3) sistemini alalım. $A + BK$ matrisinin fark kararlı olması için gerek ve yeter şart (2.6) Lyapunov fark matris denklem sisteminin pozitif tanımlı, simetrik bir $H = H^T > 0$ çözümünün var olmasıdır.

$$(A + BK)Y(A + BK)^T - Y = -I$$

eşitliği için $A + BK$ matrisinin fark asimtotik kararlılığının şart sayısı

$$w((A + BK)^T) = \| Y \| \tag{2.8}$$

dır [1,syf. 123].

$\sigma_1(I + BB^T H^{-1})$, $I + BB^T H^{-1}$ matrisinin en küçük singüler değeri olsun. (2.6)'da verilen eşitlik ve fark asimtotik kararlılığının şart sayısı tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \| H \| &\le \| (I + BB^T H^{-1})^{-1} [(1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T](I + H^{-1} BB^T)^{-1} \| \cdot \| Y \| \\ &= \| (I + BB^T H^{-1})^{-1} \| \cdot \| [(1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T] \| \cdot \| (I + H^{-1} BB^T)^{-1} \| \cdot \| Y \| \\ &= \sigma_1(I + BB^T H^{-1}) \cdot \| (1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T \| \cdot \sigma_1(I + H^{-1} BB^T) \cdot \| Y \| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sigma_1(I + BB^T H^{-1}) = \sigma_1(I + H^{-1} BB^T) = 1$$

olduğundan

$$\| H \| \le \| (1-\alpha^2)H + BB^T H^{-1} BB^T \| \cdot \| Y \|$$

elde edilir.

YAZARIN NOTU

Bu çalışma "Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Kararlı Hale Getirilmesi için Bir Algoritma" isimli doktora çalışmasından derlenmiştir.

KAYNAKÇA

[1] Akın, Ö. Bulgak, H. (1998), *Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi*, Sel- Ün. yayınları, Konya.

[2] Armstrong E.S., Rublein G.T., *A Stabilization Algorithm for Linear Discrete Constant Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, (1976), pp.629-631.

[3] Barnett, S., *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, (1975).

[4] Bozkurt A., *Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Kararlı Hale Getirilmesi İçin Bir Algoritma,* Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, (2007).

[5] Bulgak H., *Matrix Computations with Guaranteed Accuracy in Stability Theory,* Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi yayınları, Konya, (1995).

[6] Elaydi S.N., *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, (1996).

[7] Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, The John Hopkins University Pres, (1983).

[8] Kuo, B.C., (çeviren ve uyarlayan Prof. Dr. Atilla Bir), *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Yedinci Baskı, Literatür Yayınları, İstanbul (2002).

[9] Kleinman D.L., *Stabilizing a Discrete, Constant, Linear System with Application to Iterative Methods for Solving the Riccati Equation*, IEEE Trans. Automat. Control, vol AC-19, (1974), pp. 252- 254.

[10] Kwakernak H.,Sivan R.,*Lineear Optimal Control Systems*, New York ,1972.

[11] La Salle J.P., *The Stability and Control of Discrete Processes*, Springer-Verlag , (1986).

[12] Son Y.I., Shim H., Park K., Seo J. H., *Stabilization of Linear Systems via Low Order Dynamic Output Feedback: A Passification Approach, Proceeding of the American Cont. Conf,*, (2000), pp. 3822-3826.