Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı: 16 Eylül 2008 ISSN - 1302 - 3055

TÜREV DEĞERLERİNİ İÇEREN RASYONEL İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI

Bayram Ali İBRAHİMOĞLU* & Mustafa BAYRAM**

* Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü,
34210 Davutpaşa- İstanbul/ Türkiye E-mail: bibrahim@yildiz.edu.tr

** Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
34210 Davutpaşa- İstanbul/ Türkiye E-mail: msbayram@yildiz.edu.tr

Geliş tarihi: 19.06.2008 Kabul tarihi: 11.07.2008

ÖZET

Bu çalışmada, lineer olmayan interpolasyon yöntemlerinden rasyonel interpolasyon yöntemleri incelendi. Bu yöntemler ile interpolasyon polinomlarının elde edilmesi ve rasyonel interpolasyon polinomlarının hesaplanma yöntemleri açıklandı.

Anahtar kelimeler: *Rasyonel interpolasyon, Rasyonel Hermit interpolasyonu, Rasyonel interpolasyon polinomlarını hesaplama yöntemleri*

ABSTRACT

In this thesis, we have considered rational interpolation techniques, which are techniques of nonlinear type. With the help of these methods, interpolation polynomials are obtained techniques for calculating the rational interpolating polynomials are explained.

Key Words: *Rational interpolation, rational Hermit interpolation, Methods to compute rational interpolants*

1. GİRİŞ

İnterpolasyon kelimesi, elementer anlamda bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerini hesaplama işlemidir. Aynı deyim geniş anlamda, verilen fonksiyonlara yaklaşım yapmak için bir temel yöntemdir

Nümerik analizde çeşitli nümerik problemlerin çözümünde fonksiyonların yaklaşık değerlerini bulma ve interpolasyon yöntemlerinin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Kullanılan bu tekniklerden lineer olmayan yöntemlerin lineer yöntemlerden daha üstün olduğu bilinmesine rağmen bu konuda az sayıda kaynak ve çalışma vardır. Bu çalışmada lineer olmayan tekniklerden biri olan rasyonel interpolasyon yöntemi ele alındı.

Rasyonel interpolasyon konusunda H. Padé 1901 yılında rasyonel interpolasyon polinomlarının tablosunu oluşturmuştur. Padé bu çalışmasında interpolasyon polinomlarının oluşturulmasında devamlı kesirlerin kullanılabileceğini göstermiştir. Thorvald Nicolai THİELE 1906 yılında devamlı kesir temeline dayanan rasyonel interpolasyon polinomlarının hesaplanması için kendi adını taşıyan bir yöntem geliştirmiştir. [1].

Rasyonel interpolasyon yöntemi polinom tipi interpolasyon yöntemine göre daha üstündür. Çünkü rasyonel fonksiyonlar polinomların oranı olduğundan polinomlardan çok daha zengin bir fonksiyon sınıfı oluştururlar. Daha büyük olan bu fonksiyonlar sınıfı, daha doğru yaklaştırma olasılığını artırır. Özellikle kutuplara (tekil noktalara) sahip olan foksiyonlara, rasyonel interpolasyon tekniği ile yaklaşılması polinom interpolasyon tekniğine göre daha iyi cevap verir, çünkü polinomların tekilliği yoktur [2].

Rasyonel interpolasyon yöntemleri kullanılarak lineer olamayan denklem sistemleri, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemler çözülebilir. Bu çalışmada rasyonel interpolasyon polinomlarını hesaplama yöntemleri verilip, bu yöntemler yaklaşılması zor olan tekil noktaya sahip bilinen fonksiyonun ikinci mertebeye kadar türev değerlerini de kullanılarak elde edilen interpolasyon fonksiyonları gerçek fonksiyon değerleriyle karşılaştırılmıştır.

2. RASYONEL İNTERPOLASYON POLİNOMLARINI HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

2.1 Tanım f, kompleks düzlemin bir alt kümesi olan G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $\{x_i\}_{i\in N}$, G'ye ait farklı noktaların bir dizisi olsun. p polinomunun tam derecesini ∂p ile gösterelim. f nin(m,n) mertebeden rasyonel interpolasyon problemi,

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

ve

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

polinomlarını bulmaktan oluşur. Burada $p(x)/q(x)$ indirgenemez ve

$$f(x_i)=\frac{p}{q}(x_i) \quad , \qquad i=0,\ldots,m+n \tag{2.1}$$

dir. Bu problemi ((2.1)' i)çözmek yerine, buna karşılık gelen

$$f(x_i)q(x_i)-p(x_i)=0 \quad , \qquad i=0,\ldots,m+n \; (2.2)$$

lineer denklem sistemini ele alırız.

Bu (2.2) ifadesi $m+n+1$ tane denklemden oluşan bir homojen denklem sistemidir. Burada, p ve q'nun a_i ve b_i katsayılarının toplamı $m+n+2$ dir [2]. Bu nedenle (2.2)'nin her zaman en azından bir tane aşikar olmayan(nontrivial) çözümü vardır.

2.2 Tanım: a_i ve b_i reel veya kompleks sayı (veya fonksiyon) olmak üzere

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3\cdots \qquad +\cfrac{a_i}{b_i+\cdots}}}} \tag{2.3}$$

ifadesine devamlı kesir denir.Bundan sonra devamlı kesri $b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_1}+\frac{a_3|}{|b_3}+\cdots+\frac{a_i|}{|b_i}+\cdots$ (2.4)

veya

$$b_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i|}{|b_i}$$

şeklinde göstereceğiz. (2.5)

$$C_n=b_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i|}{|b_i} \quad , \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2.6}$$

ifadesine (2.5) devamlı kesrinin n. yakınsağı denir[3]. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} C_n = C$$

limit değeri mevcut ve sonlu ise devamlı kesir yakınsaktır denir. C ise devamlı kesrin değeridir. C_n nin rasyonel ifadesi

$$C_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n(b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n)}{Q_n(b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n)} \tag{2.7}$$

şeklindedir.

2.3 Teorem: Eğer

$$P_{-1} = 1, P_0 = b_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$$

ise,

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{cases} \quad , \qquad n \geq 1 \tag{2.8}$$

eşitlikleri sağlanır

2.1 Ters Farklar

G'de verilen bir *f* fonksiyonu için ters farklar

$\varphi_0\left[x\right] = f\left(x\right)$, *G*'deki her *x* için

$\varphi_1\left[x_0, x_1\right] = \dfrac{x_1 - x_0}{\varphi_0\left[x_1\right] - \varphi_0\left[x_0\right]}$, *G*'deki her x_0, x_1 için

$$\varphi_k\left[x_0, x_1, ..., x_{k-2}, x_{k-1}, x_k\right] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\varphi_{k-1}\left[x_0, ..., x_{k-2}, x_k\right] - \varphi_{k-1}\left[x_0, ..., x_{k-2}, x_{k-1}\right]}$$

şeklinde tanımlanır [3].

$\varphi_k\left[x_0, ..., x_k\right]$' ya $x_0, ..., x_k$ noktalarına göre f nin k. ters farkı diyoruz. Ters farklar, son iki noktanın sıralamasından bağımsız olmasına rağmen, genellikle $x_0, ..., x_k$ noktalarının numaralandırılmasına bağlıdır.

$$d_0 + \frac{x - x_0|}{|\ d_1} + \frac{x - x_1|}{|\ d_2} + \frac{x - x_2|}{|\ d_3} + ... \tag{2.9}$$

formunda bir devamlı kesrin interpolasyonunu hesaplamak için tablo 2.1 deki ters farkların bulunması gerekir.

Tablo 2.1 Ters farklar tablosu

$\varphi_0[x_0]$				
$\varphi_0[x_1]$	$\varphi_1[x_0, x_1]$			
$\varphi_0[x_2]$	$\varphi_1[x_0, x_2]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_2]$		
$\varphi_0[x_3]$	$\varphi_1[x_0, x_3]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\varphi_0[x_n]$	$\varphi_1[x_0, x_n]$	$\varphi_2[x_0, x_1, x_n]$	$\dots$	$\varphi_n[x_0, ..., x_n]$

2.4 Teorem:
(2.9) ‘daki devamlı kesirde $d_i = \varphi_i\left[x_0,...,x_i\right]$ ise $C_n\left(x_i\right)$ tanımlı olduğundan (2.9) için
$n.$ yakınsağı olan C_n ,
$C_n\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$, $i = 0, .., n$
eşitliğini sağlar.

İspat:
Ters farkların tanımından, $n \geq 1$ için:

$$f\left(x\right) = \varphi_0\left[x\right]$$

$$= \varphi_0\left[x_0\right] + \frac{x - x_0}{\varphi_1\left[x_0, x\right]}$$

$$= \varphi_0\left[x_0\right] + \cfrac{x - x_0}{\varphi_1\left[x_0, x_1\right] + \cfrac{x - x_1}{\varphi_2\left[x_0, x_1, x\right]}}$$

$$= \varphi_0\left[x_0\right] + \frac{x - x_0\,|}{|\varphi_1\left[x_0, x_1\right]} + \frac{x - x_1\,|}{|\varphi_2\left[x_0, x_1, x_2\right]} + ... + \frac{x - x_{n-1}\,|}{|\varphi_n\left[x_0, ..., x_{n-1}, x\right]}$$

olduğundan,
$d_i = \varphi_i\left[x_0,...,x_i\right]$ ile birlikte C_n istenen interpolasyon koşullarını sağlar.

$$\varphi_0\left[x_0\right] + \frac{x - x_0\,|}{|\varphi_1\left[x_0, x_1\right]} + \frac{x - x_1\,|}{|\varphi_2\left[x_0, x_1, x_2\right]} + ...$$

devamlı kesrine Thiele interpolasyon devamlı kesri denir.

2.2 Karşılıklı Ters Farklar
G’de verilen bir *f* fonksiyonunun karşılıklı ters farkları

$\rho_0\left[x\right] = f\left(x\right)$, *G*’deki her *x* için

$\rho_1\left[x_0, x_1\right] = \dfrac{x_1 - x_0}{\rho_0\left[x_1\right] - \rho_0\left[x_0\right]}$, *G*’deki her x_0, x_1 için

$\rho_2\left[x_0, x_1, x_2\right] = \dfrac{x_2 - x_1}{\rho_1\left[x_0, x_2\right] - \rho_1\left[x_0, x_1\right]} + \rho_0\left[x_0\right]$, *G*’deki her x_0, x_1, x_2 için

$$\rho_k\left[x_0,...,x_k\right] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}\left[x_0,...,x_{k-2}, x_k\right] - \rho_{k-1}\left[x_0,...,x_{k-2}, x_{k-1}\right]} + \rho_{k-2}\left[x_0,...,x_{k-2}\right]$$

şeklinde tanımlanır. *G*’deki her $x_0,...,x_k$ için, $\rho_k\left[x_0,...,x_k\right]$ ifadesine, *f* fonksiyonun $x_0,...,x_k$ noktalarına karşılık gelen, $k.$ karşılıklı ters farkı denir. Ters ve karşılıklı ters farklar arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki teoremdeki gibidir.

2.5 Teorem:
$k \geq 2$ için ve *G*’deki tüm $x_0,...,x_k$ ’lar için

$$\varphi_0\left[x_0\right] = \rho_0\left[x_0\right]$$

$$\varphi_1[x_0,x_1] = \rho_1[x_0,x_1]$$
$$\varphi_k[x_0,\dots,x_k] = \rho_k[x_0,\dots,x_k] - \rho_{k-2}[x_0,\dots,x_{k-2}]$$
olur.

2.3 Rasyonel Hermite İnterpolasyon Polinomları

Şimdi $s_i \in N$, $(i \geq 0)$ olmak üzere birbirinden farklı $\{x_i\}_{i\in N}$ noktalarını göz önüne alalım. *f* fonksiyonunun x_i noktasındaki $f^{(\ell)}(x_i)$ türevlerinin verildiğini kabul edelim. Burada $\ell = 0,\dots,s_i - 1$ dir. Şimdi,

$$1 \leq k \leq s_{j+1}$$

$$m + n + 1 = \sum_{i=0}^{j} s_i + k$$

sağlayan *j*, *k*, *m* ve *n* sabit tamsayılarını ele alalım.
f için (*m*, *n*) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon problemi,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i$$

ve

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i$$

polinomlarını bulmaya bağlıdır, *p*/*q* indirgenemez ve

$$\begin{cases} f^{(\ell)}(x_i) = \left(\dfrac{p}{q}\right)^{(\ell)}(x_i) & ,\ \ell = 0,\dots,s_i - 1 \text{ ve } i = 0,\dots,j \\ f^{(\ell)}(x_{j+1}) = \left(\dfrac{p}{q}\right)^{(\ell)}(x_{j+1}) & ,\ \ell = 0,\dots,k-1 \end{cases} \tag{2.10}$$

eşitliklerini sağlar. Bu interpolasyon probleminde, s_i interpolasyon noktaları x_i ile çakışmaktadır, bu yüzden s_i interpolasyon koşulları, x_i 'de sağlanmak zorundadır. Dolayısıyla, bu tip bir interpolasyon problemi çoğunlukla salınımlı(osculatory) rasyonel interpolasyon problemi olarak adlandırılır [4]. Her $i \geq 0$ için $s_i = 1$ olduğu durumda problem, (2.1) deki rasyonel interpolasyon problemi ile aynı olur.
(2.10) deki problemi çözmek yerine,

$$\begin{cases} (fq - p)^{(\ell)}(x_i) = 0 & \ell = 0,\dots,s_i\text{ -1 ve } i = 0,\dots,j \\ (fq - p)^{(\ell)}(x_{j+1}) = 0 & \ell = 0,\dots,k\text{ -1} \end{cases} \tag{2.11}$$

lineer denklem sistemini ele alabiliriz. Bu problem $m+n+1$ denklem ve $m+n+2$ bilinmeyenden oluşan homojen bir sistem olduğundan *p*(*x*) ve *q*(*x*) için her zaman aşikar olmayan bir çözümü vardır. Yine farklı çözümler aynı p_0 / q_0 indirgenemez forma sahiptir ve

$$r_{m,n} = \frac{p_0}{q_0}$$

eşitliğine *f* 'in (*m*, *n*) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon polinomu denir. Burada q_0, $q_0(x_0) = 1$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Rasyonel Hermite interpolasyon problemi, bir Newton-Padé yaklaşım problemi şeklinde yeniden formülasyonu yapılabilir. Şimdi,

$f\left[y_i,...,y_j\right]$

bölünmüş farkında noktalarının birleşimi ile birlikte,

$y_\ell = x_0 \qquad \ell = 0,...,s_0 - 1$

$y_{d(i)+\ell} = x_i \qquad \ell = 0,...,s_i - 1$ ve $d(i) = s_0 + s_1 + ... + s_{i-1} \left(i \geq 1\right)$

$c_{ij} = 0 \qquad i > j$

$c_{ij} = f\left[y_i,...,y_j\right] \qquad i \leq j$

$B_0(x) = 1$

olmak üzere,

$B_j(x) = \prod_{\ell=1}^{j} \left(x - y_{\ell-1}\right)$

alırsak

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{0i}\, B_i(x)$$

eşitliğini buluruz. Bu seriye *f*'nin Newton Serisi denir.
Böylece, (2.11)'deki problem,

$$\left(f\ q - p\right)(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i\, B_i(x) \tag{2.12}$$

olacak şekilde

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, B_i(x)$$

ve

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, B_i(x)$$

polinomlarının hesaplanması ile eşdeğerdir.

Problem (2.12) ye *f*' nin (*m*, *n*) mertebeden Newton-Padé yaklaşım problemi denir.
(2.12) ü sağlayan *p* ve *q* çözümlerini bulmak için,

$d_i = \left(f\ q - p\right)\left[y_0,...,y_i\right] \quad , \quad i = 0,\dots, m+n$

bölünmüş farkları hesaplanmalı ve sıfıra eşitlenmelidir. Fonksiyonların çarpımının türevi için kullanılan Leibniz kuralının bir genellemesi olan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 1.

$$\left(f\ q\right)\left[y_0,...,y_i\right] = \sum_{\ell=0}^{i} f\left[y_0,...,y_\ell\right] q\left[y_\ell,...,y_i\right]$$

olur [5]. Şimdi lemma 1 i kullanarak, *p* ve *q*'daki a_i ve b_i katsayılarının sağlamak zorunda olduğu doğrusal denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{cases} c_{00}b_0 = a_0 \\ c_{01}b_0 + c_{11}b_1 = a_1 \\ \vdots \\ c_{0m}b_0 + c_{1m}b_1 + ... + c_{nm}b_n = a_m \end{cases} \tag{2.13a}$$

$$\begin{cases} c_{0,m+1}b_0 + \ldots + c_{n,m+1}b_n = 0 \\ \vdots \\ c_{0,m+n}b_0 + \ldots + c_{n,m+n}b_n = 0 \end{cases} \tag{2.13b}$$

yazılır. (2.11) ve (2.12) problemleri özdeş olduğundan, $r_{m,n}$ rasyonel fonksiyonuna da f nin (m, n) mertebeden Newton-Padé yaklaşımı denir.

2.4 Rasyonel Hermite İnterpolasyon Polinomlarının Tablosu

f nin (m,n) mertebeden rasyonel Hermite interpolasyon polinomları aşağıdaki şekilde bir tablo olarak düzenlenebilir [6,7].

Tablo 2.2 Rasyonel Hermite interpolasyon polinomlarının tablosu

$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	$\cdots$
$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$\cdots$
$r_{2,0}$	$r_{2,1}$	$\cdots$	
$r_{3,0}$	$r_{3,1}$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$		

Tablo 2.2 (rasyonel Hermite interpolasyon polinomlarının tablosu) nin temsil ettiği rasyonel interpolasyon polinomlarını daha açık bir biçimde aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$r_{0,0} = \dfrac{a_0}{b_0}$	$r_{0,1} = \dfrac{a_0}{b_0 + b_1 x}$	$r_{0,2} = \dfrac{a_0}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\cdots$
$r_{1,0} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{b_0}$	$r_{1,1} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$	$r_{1,2} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\cdots$
$r_{2,0} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0}$	$r_{2,1} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x}$	$r_{2,2} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\cdots$
$r_{3,0} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0}$	$r_{3,1} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x}$	$r_{3,2} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

3. UYGULAMA

Şimdi aşağıda tanımlanan test problemini göz önüne alalım.

$f(x) = \cot(x)$ fonksiyonunun [-0.5,0.5] aralığındaki değerlerine karşılık gelen aşağıdaki tablodaki noktaları kullanarak rasyonel Hermite interpolasyon polinomunu bululalım. Bulduğumuz rasyonel Hermite interpolasyon polinomunda aralığın diğer noktalarını yazıp fonksiyonun tam değerleri ile karşılaştıralım.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	-0.5	-1.830487722		
1	-0.2	-4.933154876	-25.33601703	
2	0.1	9.966644423	-100.3340010	1999.986623
3	0.5	1.830487722		

Bu tablodaki değerleri

$$m = 3 \text{ için}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$n = 3 \text{ için}, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

ve

$$\begin{cases} r_{3,3}(x_i) = f(x_i) = \dfrac{p(x_i)}{q(x_i)} \Rightarrow f(x_i)q(x_i) - p(x_i) = 0 \quad , & i = 0,1,2,3 \\ r'_{3,3}(x_i) = f'(x_i) \Rightarrow f'(x_i)q^2(x_i) - (p'(x_i)q(x_i) - q'(x_i)p(x_i)) = 0 \quad , & i = 1,2 \\ r''_{3,3}(x_i) = f''(x_i) \Rightarrow f''(x_i)q^3(x_i) - (p''(x_i)q^2(x_i) - 2p'(x_i)q'(x_i)q(x_i) & \\ \qquad + 2p(x_i)(q'(x_i))^2 - p(x_i)q''(x_i)q(x_i)) = 0 \quad , & i = 2 \end{cases}$$

formüllerinde kullanılırsak,

$$\begin{cases} -1.830487722 + 0.9152438610\mathrm{b}_1 - 0.4576219305\mathrm{b}_2 + 0.2288109652\mathrm{b}_3 = \mathrm{a}_0 - 0.5\mathrm{a}_1 + 0.25\mathrm{a}_2 - 0.125\mathrm{a}_3 \ , \\ -4.933154876 + 0.9866309752\mathrm{b}_1 - 0.1973261950\mathrm{b}_2 + 0.3946523901\mathrm{e}{-1}\mathrm{b}_3 = \mathrm{a}_0 - 0.2\mathrm{a}_1 + 0.4\mathrm{e}{-1}\mathrm{a}_2 - 0.8\mathrm{e}{-2}\mathrm{a}_3 \ , \\ 9.966644423 + 0.9966644423\mathrm{b}_1 + 0.09966644423\mathrm{b}_2 + 0.009966644423\mathrm{b}_3 = \mathrm{a}_0 + 0.1\mathrm{a}_1 + 0.01\mathrm{a}_2 + 0.001\mathrm{a}_3 \ , \\ 1.830487722 + 0.9152438610\mathrm{b}_1 + 0.4576219305\mathrm{b}_2 + 0.2288109652\mathrm{b}_3 = \mathrm{a}_0 + 0.5\mathrm{a}_1 + 0.25\mathrm{a}_2 + 0.125\mathrm{a}_3 \ , \\ -25.33601703(1 - 0.2b_1 + 0.04b_2 - 0.008b_3)^2 = (a_1 - 0.4a_2 + 0.12a_3)(1 - 0.2b_1 + 0.04b_2 - 0.008b_3) \\ \qquad - (b_1 - 0.4b_2 + 0.12b_3)(a_0 - 0.2a_1 + 0.04a_2 - 0.008a_3) \ , \\ -100.3340010(1 + 0.1b_1 + 0.01b_2 + 0.001b_3)^2 = (a_1 + 0.2a_2 + 0.03a_3)(1 + 0.1b_1 + 0.1b_2 + 0.001b_3) \\ \qquad - (b_1 + 0.2b_2 + 0.03b_3)(a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3) \ , \\ 1999.986623(1 + 0.1b_1 + 0.01b_2 + 0.001b_3)^3 = -0.002a_2b_1b_2 + 2a_0b_1^2 + 0.00006a_1b_3^2 \\ \qquad -0.014a_2b_3 - 0.6a_0b_3 - 0.6a_1b_2 \\ \qquad -0.12a_1b_3 + 0.06a_3b_1 - 0.002a_3b_2 \\ \qquad +0.0012a_0b_3^2 - 0.06a_2b_2 + 0.002a_1b_2^2 \\ \qquad +0.002a_3b_1^2 + 0.000002a_2b_3^2 - 2a_0b_2 \\ \qquad -2a_1b_1 + 0.6a_0b_2b_1 - 0.000002a_3b_2b_3 \\ \qquad +0.06a_0b_2^2 - 0.0006a_2b_1b_3 + 0.0006a_1b_2b_3 \\ \qquad -0.00006a_3b_1b_3 + 2a_2 + 0.6a_3 - 0.0012a_3b_3 \\ \qquad -0.002\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3\mathrm{b}_1 + 0.016\mathrm{a}_0\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 + 0.06\mathrm{a}_0\mathrm{b}_3\mathrm{b}_1 \end{cases}$$

yedi denklemden oluşan lineer olmayan denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemini Maple yardımıyla çözersek $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ katsayılarını

a_0 = - 938641276.8 $b_0 = 1$
a_1 = - 10146567.09 b_1 = - 938641226.5
a_2 = 375865252.4 b_2 = - 10146043.17
a_3 = 3441868.092 b_3 = 62980620.21

elde ederiz (burada interpolasyon polinomunun $x = 0$ noktasında tanımlı olması için $b_0 = 1$ alarak normalize ettik). Buradan da rasyonel Hermite interpolasyon polinomunu

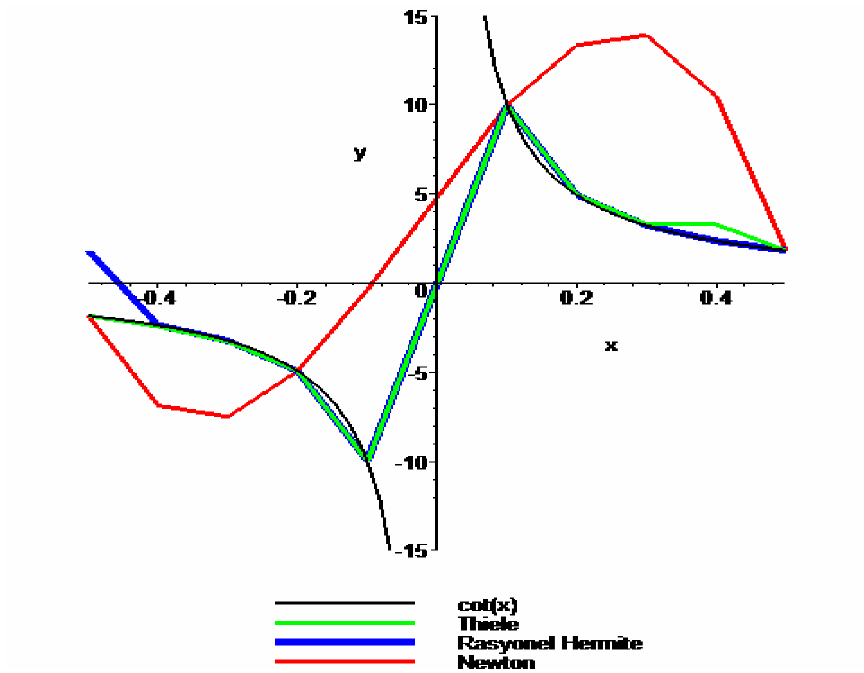
$$r_{3,3}(x) = \frac{-938641276.8-10146567.09\,x + 375865252.4\,x^2 + 3441868.092\,x^3}{1-938641226.5\,x - 10146043.17\,x^2 + 62980620.21\,x^3}$$

şeklinde elde ederiz. Elde ettiğimiz rasyonel Hermite interpolasyon polinomunda aralığın diğer noktalarını yazarak fonksiyonun bu noktalardaki değerleriyle karşılaştırarak grafiğini çizelim.

Tablo 3.1 $f(x)$ ile interpolasyon fonksiyonlarının değerleri

x	Fonksiyonun Gerçek Değeri $f(x) = \cot(x)$	Newton İnterpolasyon $r_{3,0}(x)$	Thiele Rasyonel İnterpolasyon $r_{2,1}(x)$	Rasyonel Hermite İnterpolasyon $r_{3,3}(x)$
-0.4	-2.365222420	-6.865212463	-2.435079214	-2.365221459
-0.3	-3.232728144	-7.499389186	-3.284385228	-3.232727832
-0.1	-9.966644423	-.366646518	-9.981543712	-9.966644321
0.2	4.933154876	13.33315305	4.967217298	4.933151715
0.3	3.232728144	13.89938779	3.284519233	3.232721402
0.4	2.365222420	10.46521167	3.284519233	2.365214636

	$\lvert f(x) - r_{3,0}(x)\rvert$	$\lvert f(x) - r_{2,1}(x)\rvert$	$\lvert f(x) - r_{3,3}(x)\rvert$
-0.4	4.499990043	0.069856794	0.000000961
-0.3	4.266661042	0.051657084	0.000000312
-0.1	9.599997905	0.014899289	0.000000102
0.2	8.399998174	0.034062422	0.000003161
0.3	10.66665965	0.051791089	0.000006742
0.4	8.099989250	0.069899195	0.000007784



Şekil 3.1 $f(x)$ ile interpolasyon polinomlarının grafikleri

4. SONUÇ

Bu çalışmada, rasyonel interpolasyon yöntemleri verildi. Bu yöntemler tekil noktaya sahip bir fonksiyonun ikinci mertebeden türevlerine kadar bazı noktaları alınıp bu noktalardaki değerler kullanılarak alınan fonksiyona karşılık gelen interpolasyon fonksiyonları elde edildi. Elde edilen interpolasyon fonksiyonları gerçek fonksiyon ile karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda rasyonel Hermite interpolasyon tablosunun köşegen elemanlarından birinin kullanılmasına dayanan çözümün iyi sonuç verdiği görüldü.

KAYNAKLAR

[1] Brezinski, C., History of Continued Fractions and Padé Approximants, Springer- Verlag, Berlin and Heidelberg,(1991).

[2] J. Stoer ve R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, second ed., Springer, Berlin,(1992).

[3] Cuyt, A. ve Wuytack, L., Nonlinear Methods in Numerical Analysis, Amsterdam, (1987).

[4] Warner D., Hermite interpolation with rational functions. Ph. Dr, University of California, (1974).

[5] Thiele T., Interpolationsrechnung. Teubner, Leipzig, (1909).

[6] Claessens G., Some aspects of the rational Hermite interpolation table and its applications Ph. Dr., University of Antwerp, (1976).

[7] Claessens G., A useful identity for the rational Hermite interpolation table, Numer. Math. 29, 227-231, (1978).

[8] Ibrahimoglu, B.A., Rational Interpolation Methods and Its Applications,Master Thesis,Yildiz Technical University,Institute of Sciences, 38-41, (2007)