Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı:10 Mayıs 2006 ISSN - 1302 - 3055

A COMMUTATIVE MULTIPLICATION OF DUAL NUMBER TRIPLETS

L.KULA* & Y.YAYLI*

*Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
06100 Tandoğan-Ankara, Türkiye

ABSTRACT

Pfaff [1] using quaternion product gave some properties of commutative multiplication of number triplets or IR^3. Yaylı [2] gave a new explanation of multiplication of number triplets by representation matrix. In this paper, we obtain, using dual quaternion product, a commutative multiplication of dual number triplets. Moreover, we investigate some properties of the commutative multiplication.

Keywords: *Dual quaternion, dual leaf*

TDUAL SAYI ÜÇLÜLERİNİN DEĞİŞMELİ ÇARPIMI

ÖZET

Pfaff [1] kuaterniyon çarpımını kullanarak IR^3 de sayı üçlülerinin değişmeli çarpımının bazı özelliklerini verdi. Yaylı [2] sayı üçlülerinin çarpımının yeni bir ifadesini matris gösterimi ile elde etmiştir. Biz bu çalışmada, dual kuaterniyonların çarpımını kullanarak, dual sayı üçlülerinin değişmeli çarpımını elde ettik. Ayrıca, bu çarpımın bazı özeliklerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: *Dual kuaterniyon, dual yaprak*

1. Giriş

William Rowan Hamilton 1830 lu yıllarında , kompleks sayıların çarpımına benzer bir çarpmayı, IR^3 deki üçlüler için araştırdı. Fakat normun korunması mümkün olmuyordu.

13 yıl sonra bu işin IR^4 de mümkün olabileceğini gördü ve kuaterniyonları keşfetti. Daha sonraları IR^8 de Cayley sayıları için kompleks sayıların benzer özelikleri araştırıldı. Cayley sayıları üzerindeki çarpmanın birleşme ve değişme özelliklerinin mevcut olmadığı görüldü.

Bu çalışmada, ID^3 deki orjinden geçen düzlemler üzerinde değişmeli çarpma tanımlandı ve bu çarpmanın özelikleri incelendi.

2. DUAL KUATERNİYONLAR

$$IH_{ID}=\left\{ Q=De_0+Ae_1+Be_2+Ce_3 \left| \begin{array}{l} A,B,C,D\in ID, e_i^2=-1, e_0^2=1, S_Q=D, V_D=Ae_1+Be_2+Ce_3 \\ e_1e_2=-e_2e_1=e_3, e_2e_3=-e_3e_2=e_1, e_3e_1=-e_1e_3=e_2 \end{array} \right. \right\}$$

S_Q : Q nun skalar kısmı, V_Q : Q nun vektörel kısmı olmak üzere $Q=S_Q+V_Q$ yazılabilir. Bu durumda iki dual kuaterniyonun çarpımı

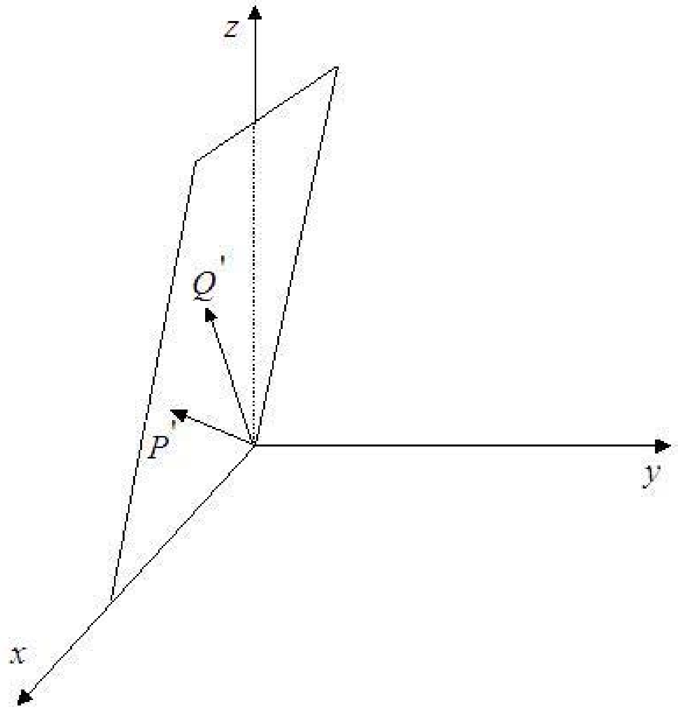
$$Q_1Q_2=S_{Q_1}S_{Q_2}-\left\langle V_{Q_1},V_{Q_2}\right\rangle+S_{Q_1}V_{Q_2}+S_{Q_2}V_{Q_1}+V_{Q_1}\wedge V_{Q_2}$$

şeklinde verilebilir. Eğer ID^4 de V_{Q_1} ile V_{Q_2} lineer bağımlı ise $V_{Q_1}\wedge V_{Q_2}=0$ dır. Yani $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ olup dual kuterniyon çarpımı değişimli olur.

Şimdi aşağıdaki formda dördüncü bileşeni sıfır olan dual kuaterniyonların kümesini ele alalım;

$$Q_1=D_1e_0+A_1e_1+B_1e_2$$
$$Q_2=D_2e_0+A_2e_1+B_2e_2$$

Bu şekilde tanımlanan tüm dual kuaterniyonların kümesi dual kuaterniyonlar uzayının 3-boyutlu bir alt uzayıdır. Bu alt uzayı ID^3 ile göstereceğiz. Q_1 ve $Q_2\in ID^3$ olmak üzere eğer $V_{Q_1}//V_{Q_2}$ ise Q_1 ve Q_2, *Ox* eksenini içine alan orijinden geçen ID^3 deki düzlemler içinde bulunurlar. Bu düzlemleri *dual yaprak* olarak adlandıracağız. Bu durum Şekil 1 de gösterilmiştir.



Şekil 1. ID^3 de dual yaprak.

3. BİR DUAL YAPRAK ÜZERİNDE ÇARPMA

A_1 ve B_1 her ikisi birden sıfır olmayan iki dual sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} Q_1 &= D_1e_0 + A_1e_1 + B_1e_2 \\ &= (D_1, A_1, B_1) \\ &= (D_1,0,0) + (0, A_1, B_1) \\ &= (D_1,0,0) + U \end{aligned}$$

vektörünü ele alalım. Burada $U = (0, A_1, B_1)$, *yOz* düzleminde sıfırdan farklı bir vektördür. Böylece Q_1 bir dual yaprak ifade eder. $V = (0, A_2, B_2)$ olmak üzere bir

$$Q_2 = D_2e_0 + A_2e_1 + B_2e_2 = (D_2,0,0) + (0, A_2, B_2) = (D_2,0,0) + V \ ,$$

vektörünün Q_1 ile aynı dual yaprakta bulunması için gerek ve yeter koşul

$$Q_2 = (D_2, A_2, B_2) = (D_2, M.A_1, M.B_1)$$

olacak şekilde bir *M* dual sayısının var olmasıdır. O halde

$$Q = De_0 + Ae_1 + Be_2 \text{ ve } P = Ee_0 + (M.A)e_1 + (M.B)e_2$$

olmak üzere *Q* ve *P* vektörlerinin kuaterniyon çarpımı, $D, A, B, M \in ID$ olmak üzere

$$R = Q \times P = \left(D.E - M.A^2 - M.B^2\right)e_0 + \left((M.D + E).A\right)e_1 + \left((M.D + E).B\right)e_2 \qquad (1)$$

şeklindedir.

Aynı Dual Yapraktaki Dual Sayı Üçlülerinin Çarpımı Aşağıdaki Özeliklere Sahiptir:

(1) Aynı yaprakta yer alan *Q* ve *P* dual vektörlerinin çarpımı olan $R = Q \times P$ dual vektörü de yine aynı yapraktadır. Yani her dual yaprak bu çarpma işlemine göre kapalıdır.

(2) $\times$ çarpma işlemi değişmelidir.

(3) $\times$ çarpma işlemi dual kuaterniyon çarpımının özel bir durumu olduğundan aynı dual yaprak üzerinde birleşme ve dual vektörlerin toplamı üzerine dağılma özeliklerine sahiptir.

(4) $Q = De_0 + Ae_1 + Be_2$ dual vektörünün eşleniği olan $Q^* = De_0 - Ae_1 - Be_2$ dual vektörü de *Q* ile aynı yapraktadır ve $Q \times Q^* = D^2 + A^2 + B^2 = \|Q\|^2$ dir.

(5) *Q* nun tersi $Q^{-1} = \dfrac{Q^*}{\|Q\|^2}$ dual vektörü *Q* ile aynı dual yapraktadır.

(6) Aynı dual yaprakta yer alan *Q* ve *R* dual vektörleri için, $Q \times P = R$ denklemi $P = Q^{-1} \times R$ olacak şeklinde aynı dual yaprakta yer alan bir tek *P* dual vektör çözümüne sahiptir.

Sonuç olarak ID^3 de her bir yaprak $\times$ çarpma işlemine göre bir cisimdir.

4 . BİR DUAL YAPRAKTA KOMPLEKS YAPI

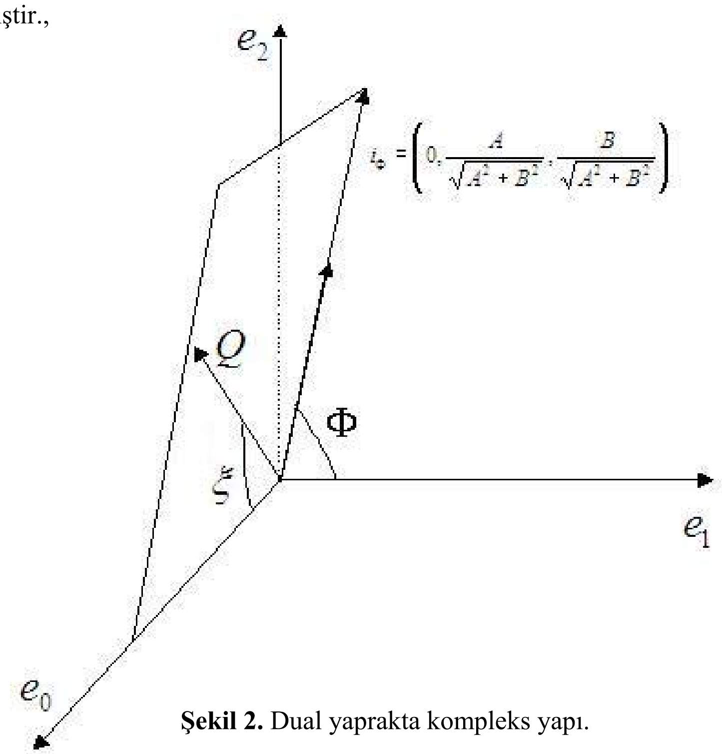
A ve B her ikisi birden sıfır olmayan iki dual sayı olmak üzere

$$Q = De_0 + Ae_1 + Be_2 = (D,0,0) + U$$

vektörünü ele alalım. Q ve $(0, A, B)$ bir yaprak belirtir. O halde

$$\begin{aligned} Q &= (D,0,0) + (0,A,B) \\ &= D(1,0,0) + \|U\| \frac{U}{\|U\|} \\ &= D(1,0,0) + \|U\|.i_\Phi \\ &= \|Q\| \left(\frac{D}{\|Q\|}(1,0,0) + \frac{\|U\|}{\|Q\|} i_\Phi \right) \\ &= \|Q\| \left(\cos\xi \, e_0 + \sin\xi . i_\Phi \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $i_\Phi = \dfrac{U}{\|U\|}$ vektörü için, $i_\Phi \times i_\Phi = -1$ dir. Bu durum Şekil 2 de gösterilmiştir.,



Şekil 2. Dual yaprakta kompleks yapı.

Böylece $Q = De_0 + Ae_1 + Be_2 \in ID^3$ vektörü e_0 ve i_Φ nin gerdiği düzlemde yer alacaktır. Dolayısıyla

$$e^{i_\Phi \xi} = \cos\xi . e_0 + \sin\xi . i_\phi$$

olmak üzere $Q = \|Q\| e^{i_\Phi \xi}$ ve $\arg Q = \xi$ yazılabilir. Şayet $P = (E, V)$, Q ile aynı yaprakta bir diğer vektör ise $P = \|P\| e^{i_\Phi \eta}$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q \times P &= \|Q\| \|P\| e^{i_\Phi \xi} e^{i_\Phi \eta} \\ &= \|Q\| \|P\| e^{i_\Phi (\xi + \eta)} \end{aligned}$$

ve

$$\arg(Q \times P) = \arg Q + \arg P$$

dir. Ayrıca

$$Q^{-1} = \frac{1}{\|Q\|} e^{-i_\Phi \xi}$$

ile verilebilir.

Böylece, i_Φ yardımıyla herhangi bir dual yaprak üzerinde kompleks yapı ifade edilmiş olur.

5. FARKLI DUAL YAPRAKLAR ÜZERİNDEKİ DUAL SAYI ÜÇLÜLERİNİN ÇARPMASI

Q ve $P \in ID^3$ farklı yapraklar üzerinde bulunsun. $Sp\{Q, P\} = N$ orijinden geçen bir düzlemdir. $L = (\cos\Theta, \sin\Theta, 0)$; N düzlemi ile xOy düzleminin arakesiti olan ve x-ekseni ile Θ açısı yapan doğruyu göstermek üzere, N üzerindeki çarpmayı,

$$\begin{aligned} \otimes : N \times N &\to N \\ (Q, P) &\to Q \otimes P = \mathrm{A}^{-1}(\Theta)\left[\mathrm{A}(\Theta)Q \times \mathrm{A}(\Theta)P\right] \end{aligned} \tag{2}$$

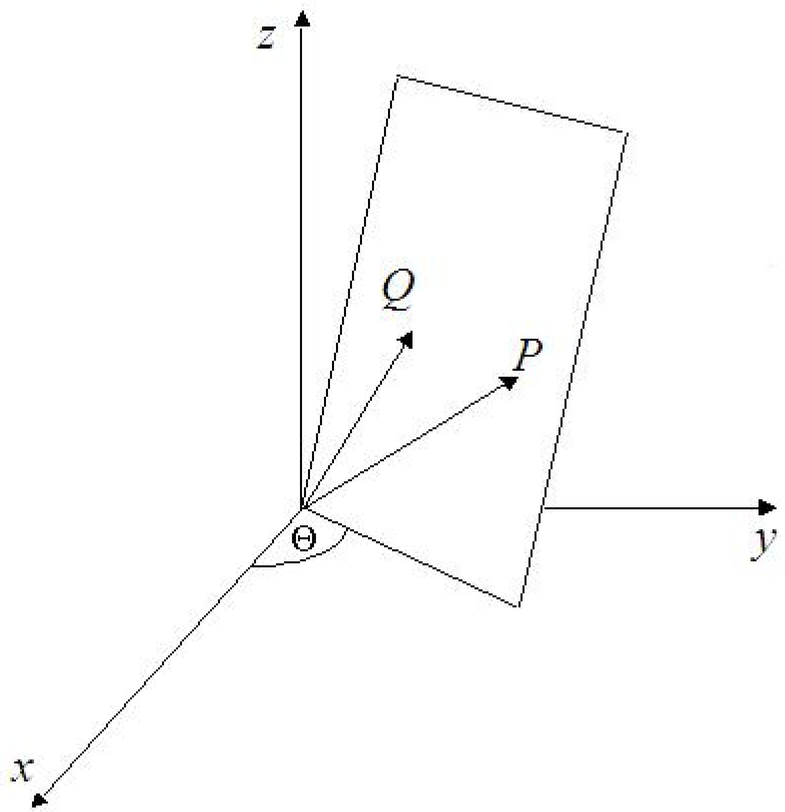
şeklinde verebiliriz. Bu durum Şekil 3 de gösterilmiştir. Burada $\mathrm{A}(\Theta)$ z-ekseni etrafında dönme yaptıran matristir. (2) ile ifade edilen $Q \otimes P$ işlemi

$$\begin{aligned} R = Q \otimes P = \{ & \left[(D\cos\Theta + A\sin\Theta)E + (D\sin\Theta - A\cos\Theta)F - (B\cos\Theta)G \right] e_0 + \\ & \left[-(D\sin\Theta - A\cos\Theta)E + (D\cos\Theta + A\sin\Theta)F - (B\sin\Theta)G \right] e_1 + \\ & \left[(B\cos\Theta)E + (B\sin\Theta)F + (D\cos\Theta + A\sin\Theta)G \right] e_2 \} \\ = (L \wedge Q) \wedge P + \langle L, Q \rangle P & \end{aligned} \tag{3}$$

veya matris formunda

$$R = \mathrm{A}_Q P = \begin{bmatrix} D\cos\Theta + A\sin\Theta & D\sin\Theta - A\cos\Theta & -B\cos\Theta \\ -D\sin\Theta + A\cos\Theta & D\cos\Theta + A\sin\Theta & -B\sin\Theta \\ B\cos\Theta & B\sin\Theta & D\cos\Theta + A\sin\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix} \tag{4}$$

olarak elde edilir. (3) denkleminde ki $\wedge$ ve $\langle\ ,\ \rangle$, sırasıyla, ID^3 deki vektörel ve iç çarpım operatörleridir.



Şekil 3. Farklı dual yapraklardaki elemanların çarpımı.

Şimdi dual kuaterniyonların skalar kısmı sıfır alınarak elde edilen dual sayı üçlülerini kullanarak orijinden geçen herhangi bir düzlem üzerindeki $\otimes$ işleminin geometrik yorumunu vereceğiz.

6. $\otimes$ ÇARPMASININ GEOMETRİK YORUMU

ID^3 de orijinden geçen herhangi bir düzlem *N* olsun. $Q, P \in N$ için

$$\begin{aligned} Q \otimes P &= Q \times L^* \times P \\ &= \left(\langle L, Q\rangle + L \wedge Q\right) \times P \end{aligned}$$

veya

$$Q \otimes P = \left(\cos\Theta . e_0 + \sin\Theta \vec{S}\right) \times P, \ \|Q\| = 1.$$
$$Q \otimes P = Q_L \times P$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\|Q \otimes P\| = \|P\|$$

olduğundan

$$Q_L = \cos\Theta . e_0 + \sin\Theta \vec{S}$$

birim dual kuaterniyonu, *P* dual vektörünü *N* düzleminde $\vec{S}$ ekseni etrafında Θ kadar döndürüyor diyebiliriz. Burada $\vec{S} = \dfrac{L \wedge Q}{\|L \wedge Q\|}$ ve $\Theta = \theta + \theta^*$ dır.

KAYNAKLAR

[1] Frank R. Pfaff, *A Commutative Multiplication of Number Triplets,* Amer. Math. Montly. 107 (2000) , 156-162.

[2] Yayli Y, Hacısalihoğlu H.H and Kula L, *Quaternions and Lie Groups on* S^2, Kragujevac J. Math. 25, (2003), 201-208.