Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı:9 Aralık 2005

CONTINUOUS DEPENDENCE SOLUTIONS OF PHASE FIELD EQUATIONS ON INITIAL AND BOUNDARY VALUES

Ş.GÜR*

*Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi , Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye
sgur@sakarya.edu.tr

ABSTRACT
In this paper, continuous dependence of solutions of phase-field equations on initial and boundary value is investigated.

Keywords.: Phase field equation, Continuous dependence

FAZ ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞERLERİNE SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

ÖZET
Bu çalışmada Faz Alan denklemlerinin çözümlerinin başlangıç ve sınır değerlerine sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Faz alan denklemi, Sürekli bağımlılık.

1.GİRİŞ

$$\tau\phi_t(x,t)-\xi^2\Delta\phi(x,t)+f(x,\phi)==2u(x,t)+h_1(x,t) \qquad (x,t)\in Q_T \tag{1}$$

$$u_t(x,t)+\tfrac{l}{2}\phi_t(x,t)=K\Delta u(x,t)+h_2(x,t) \qquad (x,t)\in Q_T \tag{2}$$

$$\phi\big|_\Gamma=\phi_\partial(x,t)\,,\ u\big|_\Gamma=u_\partial(x,t) \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T] \tag{3}$$

$$\phi(x,0)=\phi_0(x)\,,\ u(x,0)=u_0(x) \qquad x\in\Omega \tag{4}$$

problemini ele alalım. Burada $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subset R^n$ $n \geq 1$ yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $\Gamma = \partial\Omega \times (0,T]$, $\phi_0, u_0, \phi_\partial$, u_∂, h_1, h_2 ve f ise verilmiş fonksiyonlardır.
ξ, τ, l ve K ise incelenen materyalin özelliğine bağlı olarak değişen pozitif parametreler olup, sırasıyla uzunluk ''skalası'' nı, ''dinlenme'' zamanını, erime ya da donma ısısını ve ısı iletkenliğini karakterize etmektedirler.

Faz geçişleri teorisinin esas modellerinden biri olan faz alan denklem sistemi ile ilgili çalışmalar çok uzun yıllardan beri devam etmektedir. Bu çalışmada gözönüne aldığımız matematiksel model ile ilgili çalışmalar ise 1980 li yıllarda başlamıştır. [1] de G.Çağınalp problemin matematiksel modelini bulmuş ve problemin çözümünü elde etmiştir. [2] de Brochet, Hilhorst ve Chen (1)-(2) yi homogen, (3) sınır koşulunu homogen Neumann koşulu olarak almışlar ve $(\phi_0, u_0) \in (L_2(\Omega))^2$ olması durumunda problemin iyi konulmuş olduğunu ispat etmişlerdir. [3] de Kalantarov (3) ve (4) sınır koşullarını homogen olarak almış ayrıca h_1 ve h_2 fonksiyonlarını sadece x'e bağlı olarak alarak problemin çözümünün varlığını ,tekliğini, başlangıç verilerine sürekli bağımlılığını ve attractorun varlığını göstermiştir.

Bu çalışmada ise (1)-(4) probleminin başlangıç ve sınır değerlerinde meydana gelen değişikliklerin çözümü nasıl etkilediği incelenmiştir.

2. SÜREKLİ BAĞIMLILIK

TEOREM . (1)-(4) probleminin

$$V(Q_T) = W_2^1(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap$$
$$\cap \{v(x,t) | v(x,0) = v_0(x), v|_\Gamma = v_\partial\}$$

olmak üzere $V(Q_T) \times V(Q_T)$ sınıfından olan çözümü ([4],[5],[6])

$$|f(x,s_1) - f(x,s_2)| \leq c(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda başlangıç ve sınır değerlerine sürekli bağımlıdır. Burada $n = 1,2$ ise $p \in [1,\infty]$, $n \geq 3$ ise $p \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right]$ dir.

İSPAT. Farklı başlangıç ve sınır değerleri için (1)-(4) probleminin çözümlerini $\{\phi_1, u_1\}$ ve $\{\phi_2, u_2\}$ olarak alalım. Bu durumda $\phi_1 - \phi_2 = \varphi$ ve $u_1 - u_2 = u$, $\widetilde{h}_1 = h_1 - h_1', \widetilde{h}_2 = h_2 - h_2'$, $\varphi_\partial = (\phi_1)_\partial - (\phi_2)_\partial$

$\varphi_0(x) = (\phi_1)_0(x) - (\phi_2)_0(x), u_\partial = (u_1)_\partial - (u_2)_\partial \quad u_0(x) = (u_1)_0(x) - (u_2)_0(x)$
olmak üzere $\{\varphi, u\}$ için

$$\tau\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi + f(x,\phi_1) - f(x,\phi_2) = 2u + \widetilde{h}_1 \tag{5}$$
$$u_t + \tfrac{l}{2}\varphi_t = K\Delta u + \widetilde{h}_2 \tag{6}$$
$$\varphi\big|_\Gamma = \varphi_\partial, \quad u\big|_\Gamma = u_\partial \tag{7}$$
$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), u(x,0) = u_0(x) \tag{8}$$

problemini alabiliriz. (5)-(8) problemine $\varphi = w + \widetilde{\varphi}$ ve $u = v + \widetilde{u}$ dönüşümlerini uygulayalım. Böylece (5)-(8) problemi

$$\tau\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi + f(x,\phi_1) - f(x,\phi_2) = 2u + \widetilde{h}_1 \tag{9}$$
$$u_t + \tfrac{l}{2}\varphi_t = K\Delta u + \widetilde{h}_2 \tag{10}$$
$$w\big|_\Gamma = v\big|_\Gamma = 0 \tag{11}$$
$$w(x,0) = v(x,0) = 0 \tag{12}$$

problemine dönüşmüş olur. Burada $w = w_1 - w_2$, $v = v_1 - v_2$, $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\phi}_1 - \widetilde{\phi}_2$, $w\big|_\Gamma = v\big|_\Gamma = 0$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$ ve $w(x,0) = v(x,0) = 0$ dır.

(9) u $w_t + w$ ile (10) ise $\dfrac{4}{l}v + \dfrac{2\tau}{l^2}v_t$ ile çarpıp, Ω üzerinde integral alalım ve elde edilen terimleri taraf tarafa toplayalım:

$$\left|\int_\Omega (f(x,\phi_1) - f(x,\phi_2))w_t\, dx\right| \le c\|\varphi\|\|\varphi_t\| + c\|\varphi\|\|\widetilde{\varphi}_t\| + cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\varphi_t\| +$$
$$+ cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\widetilde{\varphi}_t\|$$

ve

$$\left|b\int_\Omega (f(x,\phi_1) - f(x,\phi_2))wdx\right| \le bc\|\varphi\|^2 + bc\|\varphi\|\|\widetilde{\varphi}\| + bcc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\varphi\| +$$
$$+ bcc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\widetilde{\varphi}\|$$

eşitsizlikleri yardımıyla

$$\tau\|\varphi_t\|^2+\frac{4K}{l}\|\nabla u\|^2+\frac{2\tau}{l^2}\|u_t\|^2+\xi^2\|\nabla\varphi\|^2+$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2+\frac{\tau}{2}\|\varphi\|^2\right]\leq$$

$$\leq\tau(\varphi_t,\tilde{\varphi}_t)+(\tilde{h}_1,\varphi_t)+2(\varphi_t,\tilde{u})+\frac{\tau}{l}(\varphi_t,\tilde{u}_t)+\tau(\varphi_t,\tilde{\varphi})+c\|\varphi\|\|\varphi_t\|+$$

$$+cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\varphi_t\|+\frac{2\tau K}{l^2}(\nabla u,\nabla\tilde{u}_t)+\frac{4K}{l}(\nabla u,\nabla\tilde{u})+\frac{\tau}{l}|(\varphi_t,u_t)|+$$

$$+\frac{2\tau}{l^2}(u_t,\tilde{u}_t)+\frac{2\tau}{l^2}(u_t,\tilde{h}_2)+\frac{4}{l}(u_t,\tilde{u})+\xi^2(\nabla\varphi,\nabla\tilde{\varphi}_t)+\xi^2(\nabla\varphi,\nabla\tilde{\varphi})+$$

$$+cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\tilde{\varphi}_t\|+cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\varphi\|+cc_1(t)\|\varphi\|_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\|\tilde{\varphi}\|+2|(u,\tilde{\varphi}_t)|+$$

$$+\frac{4}{l}(\tilde{h}_2,u)+2(u,\varphi)+2|(u,\tilde{\varphi})|+(\tilde{h}_1,\varphi)+c\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}_t\|+c\|\varphi\|^2+c\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\|+\frac{4}{l}|(\tilde{h}_2,\tilde{u})|+$$

$$+|(\tilde{h}_1,\tilde{\varphi}_t)|+|(\tilde{h}_1,\tilde{\varphi})|+\frac{2\tau}{l^2}|(\tilde{u}_t,\tilde{h}_2)| \qquad (13)$$

eşitsizliği elde edilir. (13) ün sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ε-Young eşitsizliklerini uygulayalım. ε un yeterince küçük alınmasıyla (13),

$$\frac{\tau}{4}\|\varphi_t\|^2+\frac{\tau}{2l^2}\|u_t\|^2+\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2+\frac{b\tau}{2}\|\varphi\|^2\right]\leq$$

$$\leq a_1(t)\|\nabla\varphi\|^2+\left(\frac{3l+2}{l}\right)\|u\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2+a_2(t)\|\varphi\|^2+A(t) \qquad (14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ verilen fonksiyonlara ve parametrelere bağlıdırlar.

Ayrıca,

$$A(t) = A\Big(\|\widetilde{\varphi}\|(t), \|\nabla\widetilde{\varphi}\|(t), \|\widetilde{\varphi}_t\|(t), \|\nabla\widetilde{\varphi}_t\|(t),$$

$$\|\widetilde{u}\|(t), \|\nabla\widetilde{u}\|(t), \|\widetilde{u}_t\|(t), \|\nabla\widetilde{u}_t\|(t), \|\widetilde{h}_1\|(t), \|\widetilde{h}_2\|(t)\Big)$$

ve c_2 ise

$$\|\varphi\|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}} \le c_2\left(\|\nabla\varphi\|^2 + \|\widetilde{\varphi}\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

eşitsizliğindeki sabittir.

$$\max\left\{\frac{3l+2}{2}, \frac{2a_1(t)}{\xi^2}, \frac{2a_2(t)}{\tau}, 1\right\} = \widetilde{c}(t)$$

ve

$$Y(t) = \frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{2}{l}\|u\|^2 + \frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2 + \frac{b\tau}{2}\|\varphi\|^2$$

olarak alalım. $\|\varphi_t\|^2$ ve $\|u_t\|^2$ nin katsayıları pozitif olduğundan (14) den

$$\frac{dY(t)}{dt} \le \widetilde{c}(t)Y(t) + A(t) \tag{15}$$

elde edilir.

(15) e Gronwall eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$Y(t) \le \exp\left\{\int_0^t \widetilde{c}(s)ds\right\}\left[Y(0) + \int_0^t A(s)ds\right] \quad \forall\, t \in [0,T]$$

eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Caginalp, G. An analysis of a phase field model of a free boundary Arch. Rat. Mech. Anal.92, 205-245, 1986.

[2] Brochet, D., Hilhorst, D., Chen, X., Finite dimensional exponential attractor for the phase field model, Appl. Analysis, vol.49, 197-212, 1993.

[3] Kalantarov, V.K. On the minimal global attractor of a system of phase field equations, Zap.Nauchn.Semin. LOMI, 188, 70-86, 1991.

[4] Soltanov, K.N. On nonlinear equations of the form: $F(x; u;Du;\Delta u) = 0$ .Russian Acad. Sic. Sb. Math. 80.(1995) no:2 367-3923, 1995.

[5] Soltanov, K.N. Some imbedding theorems and nonlinear differential equations, Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 19, 125-146, 1999.

[6] Gür, Şevket. Faz Alan Denklemleri için Başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin global davranışı. Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi. 2004.