Dumlupınar Üniversitesi
Sayı:12 Aralık 2006
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
ISSN - 1302 - 3055

ÜÇ BOYUTLU RIEMANN UZAYINDA RICCI VE EINSTEIN TENSÖRLERİNDEN RIEMANN METRİĞİNE GEÇİŞ

Erhan ATA*

*Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
43100, KÜTAHYA

ÖZET

Bu makalede Diferensiyel Geometride çok kullanım alanına sahip olan Ricci Eğriliği, Einstein Eğriliği ve Riemann Metriği kavramları verilerek, zor bir durum olan Ricci ve Einstein tensörleri verildiğinde Riemann metriğinin bulunması gösterildi.

Anahtar Kelimeler: *Riemann manifoldu, Riemann metriği, Riemann konneksiyonu, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörünün bileşenleri, Einstein tensörünün bileşenleri.*

1. GİRİŞ

1.1. Riemann Manifoldu

Tanım 1.1.1. M bir manifold olmak üzere

$$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, IR)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde Riemann metriği veya metrik tensör denir. [3]

i) <,> dönüşümü 2-lineerdir.
ii) <,> dönüşümü simetriktir.
iii) <,> dönüşümü pozitif tanımlıdır.

Tanım 1.1.2. Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış manifolda Riemann manifoldu denir [3]

Tanım 1.1.3. M bir manifold olmak üzere

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to D(X, Y) = D_X Y$$

dönüşümü,

i) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$

ii) $D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$

iii) $D_{fX} Y = fD_X Y$; $\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$

iv) $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$ özelliklerini sağlıyorsa D ye M üzerinde bir afin konneksiyon denir$[3]$.

Tanım 1.1.4. M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon *D* olmak üzere

$$(i)\ \left[X,Y\right] = D_X Y - D_Y X;\ \forall X,Y \in \chi(M)$$

$$(ii)\ X\left(< Y,Z >\right) =< D_X Y, Z > + < Y, D_X Z > ;\ \forall Z \in \chi(M)$$

özelliklerini sağlıyor ise *D* ye Riemann konneksiyonu denir$[3]$.

Tanım 1.1.5. M *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki lokal koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere $\chi(M)$ in bir bazını $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ olarak alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} g_{ij} &=< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} > \\ &= G\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

ve $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$, $\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j$ olmak üzere

$$D_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k ;\ 1 \le i, j, k \le n$$

denklemi n^3 tane

$$\Gamma_{ij}^k : M \to IR$$

C^{∞} fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyonlara christoffel fonksiyonları veya christoffel sembolleri denir$[3]$.

Teorem 1.1.1. *M* bir Riemann manifoldu ise *M* üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır$[3]$.

Tanım 1.1.6. M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. M üzerindeki konneksiyon D olmak üzere
biçiminde tanımlı $(1,3)$ tipli tensör alanına Riemann eğrilik tensörü denir$[3]$.

Tanım 1.1.7 (Ricci curvature). M *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu, $T_M(p)$, $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay ve $x_p \in T_M(p)$ olsun.

$T_M(p)$ nin x_p yi ihtiva eden bütün 2-boyutlu altuzaylarına göre sectional curvature'larının toplamına *M* nin *p* noktasındaki Ricci curvature'ı denir $[3]$.

Tanım 1.1.8 (Scalar curvature). M *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $T_M(p)$ bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay olsun.

$T_M(p)$ nin bütün 2-boyutlu altuzaylarına göre olan sectional curvature'larının toplamına scalar curvature denir $[3]$.

Eğer

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$$

eşitliğinde

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i\,,\ Y = \frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j\,,\ Z = \frac{\partial}{\partial x_k} = \partial_k$$

alınırsa

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = D_{\partial_i} D_{\partial_j} \partial_k - D_{\partial_j} D_{\partial_i} \partial_k - D_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_k$$

bulunur. Ayrıca

$$[\partial_i, \partial_j] = 0,\ R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^s_{kij}\partial_s$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
R^s_{kij} &= D_{\partial_i}\left(\Gamma^s_{jk}\partial_s\right) - D_{\partial_j}\left(\Gamma^s_{ik}\partial_s\right) \\
&= \partial_i\left(\Gamma^s_{jk}\partial_s\right)\partial_s + \Gamma^s_{jk} D_{\partial_i}\partial_s - \partial_j \Gamma^s_{jk}\partial_s - \Gamma^s_{jk} D_{\partial_j}\partial_s \\
&+ \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i}\partial_s + \Gamma^s_{jk}\Gamma^h_{is}\partial_h - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_j}\partial_s - \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{js}\partial_h \\
&= \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i}\partial_s - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_j}\partial_s + \Gamma^s_{jk}\Gamma^h_{is}\partial_h - \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{js}\partial_h \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_j} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^h_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{js} \right)\partial_s
\end{aligned}$$

buradan

$$R^s_{kij} = \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_j} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^h_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{js}\ ;\quad (1 \le i, j, k, h, s \le n) \qquad (1)$$

elde edilir. Ayrıca

$$R_{ij} = R_{ji} = R^k_{ijk}$$

Ricci tensörünün bileşenleri ve

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} R$$

ise Einstein tensörünün bileşenleridir. Burada

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

skaler curvature ve (g_{ij}) manifold üzerinde tanımlı Riemann metriğidir [3].

Tanım 1.1.9. Bir hiperküre üzerindeki koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ olsun. V_0 hiperküre üzerindeki herhangi bir nokta olmak üzere her bir $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ noktasının V_0 dan başlayan bir geodezik çizgi tarafından birleştirildiğini kabul edelim. Geodezik doğru üzerindeki herhangi bir L noktası $x_n = s = V_0 L$ yayının uzunluğu olarak karakterize edilsin. Bu durumda geodezik doğrular boyunca elde edilen $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ koordinat sistemine semi-geodezik koordinat sistemi denir [1].

2. RICCI ve EINSTEIN TENSÖRLERİNDEN BİR RIEMANN METRİĞİ BULMA

Ricci ve Einstein tensörlerine göre bir metrik bulma problemi ilginç problemlerden biridir. Problem non-lineer kısmi diferensiyel denklemlerin zor bir sisteminin uygun bir probleminin incelenmesine indirgenir.

Üç boyutlu Riemann uzayında Ricci ve Einstein tensörlerine göre bir metrik bulma problemi $C^2(\overline{D})$ uzayında bir çözümün tekliği ile ilgilidir. Ricci ve Einstein tensörlerinin bileşenlerinin sayısı (g_{ij}) metrik tensörünün bileşenlerinin sayısına eşittir ve bu düşüncede problem iyi şekillenir.

$$D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in IR \mid 0 < x_i < 1, i = 1,2,3\} \quad \text{ve} \quad (g_{ij}(x)) \in C^2(\overline{D})$$

metriği semi-geodezik koordinatlarda verilen ve x_i $(i = 1,2,3)$ sabit koordinat eğrilerinin yay uzunluğu x_1 olacak biçimde D bölgesinde tanımlı Riemann metriği olsun.

$R_{ij} = R_{ji} = R^k_{ijk}$ Ricci tensörünün bileşenleri ve R^k_{ijk}, (g_{ij}) nin eğrilik tensörünün bileşenleridir.

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \; \left(R = R_{ij} g^{ij}\right)$$

Einstein tensörünün bileşenleridir, burada ve bundan sonra 1 den 3 e kadar tekrarlı indisler üzerinden toplam anlaşılacaktır.

(g^{ij}), (g_{ij}) nin inversidir [3].

2.1. Ricci Tensörü Verildiğinde Bir Riemann Metriği Bulma

Problem 2.1.1. $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in IR \mid 0 < x_i < 1, i = 1,2,3\}$ bölgesinde $\{R_{ij}\}$ Ricci tensörünün bileşenleri verildiğinde bir $\left(g_{ij}(x)\right) \in C^2(\overline{D})$ metriğini bulmak için

$$g_{ij}\Big|_{x_1=0} = g^0_{ij}(x'), \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = g^1_{ij}(x'), \quad x' = (x_2, x_3) \tag{2}$$

Koşullarının verilmesi gerekir.

Teorem 2.1.1. D bölgesinde $\{R_{ij}\}$ Ricci tensörünün bileşenleri verilsin. Bu durumda

$$g_{ij}\Big|_{x_1=0} = g^0_{ij}(x'), \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = g^1_{ij}(x'), \quad x' = (x_2, x_3)$$

koşulları altında $C^2(\overline{D})$ uzayında yalnızca bir $g = (g_{ij})$ çözümüne sahiptir.

İspat. Riemann uzayının $g = (g_{ij})$ metrik tensörü verilirse karşılık gelen eğrilik tensörünün bileşenlerinin (1) den

$$R^i_{qks} = \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma^i_{qs}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{ps}\Gamma^p_{qk} - \Gamma^p_{qs}\Gamma^i_{pk}$$

ve Koszul eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s}\right) \tag{3}$$

olduğunu biliyoruz. (g^{ij}) metriği semi-geodezik koordinatlarda verildiğinden

$$g_{11} = 0, \; g_{1j} = 0, \quad j = 2,3,\ldots,n$$

dir. (3) de $i = j = 1$ alırsak

$$\Gamma^k_{11} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{1s}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_s}\right)$$

ve buradan

$$\Gamma^k_{11} = 0$$

olur. (1) de $q = k = 1$, $s = m$ ve $i = k$ dersek

$$R^k_{11m} = \frac{\partial \Gamma^k_{11}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^k_{1m}}{\partial x_1} + \Gamma^k_{pm}\Gamma^p_{11} - \Gamma^p_{1m}\Gamma^k_{p1}$$

olduğundan

$$R_{11m}^{k} = -\left(\frac{\partial \Gamma_{1m}^{k}}{\partial x_1} + \Gamma_{1m}^{p}\Gamma_{p1}^{k}\right)$$

ve bu eşitliğin her iki tarafını $g_{\mu k}$ ile çarparsak

$$g_{\mu k}R_{11m}^{k} = -g_{\mu k}\left(\frac{\partial \Gamma_{1m}^{k}}{\partial x_1} + \Gamma_{1m}^{p}\Gamma_{p1}^{k}\right) \tag{4}$$

buluruz. Ayrıca $g_{1s} = f_{1s}$ olduğundan (3) de $i = 1,\ j = m$ alırsak

$$\Gamma_{1m}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{1m}}{\partial x_s}\right); \quad s \neq 1,\ m \neq 1$$

buradan

$$\Gamma_{1m}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}$$

olur. Bu son eşitliğin her iki tarafının x_1 e göre türevini alırsak

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_{1m}^{k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{2}g^{ks}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}g^{ks}\frac{\partial^2 g_{ms}}{\partial x_1^2}$$

ve her iki tarafı $g_{\mu k}$ ile çarparsak

$$g_{\mu k}\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_{1m}^{k} = \frac{1}{2}g_{\mu k}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}g_{\mu k}g^{ks}\frac{\partial^2 g_{ms}}{\partial x_1^2}$$

olur, burada $g_{\mu k}g^{ks}$ çarpımı $\mu = s$ için 1, diğer durumlarda 0 olduğundan

$$g_{\mu k}\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_{1m}^{k} = \frac{1}{2}g_{\mu k}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ms}}{\partial x_1^2} \tag{5}$$

olur. (3) den

$$\Gamma_{1m}^{p} = \frac{1}{2}g^{ps}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{1m}}{\partial x_s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{ps}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}$$

ve

$$\Gamma^k_{1p} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x_p} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{1m}}{\partial x_l} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{lk} \frac{\partial g_{pl}}{\partial x_1}$$

yazabiliriz. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\Gamma^p_{1m}\Gamma^k_{1p} = \frac{1}{4} g^{ps} g^{lk} \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{pl}}{\partial x_1}$$

buluruz, bunun da her iki yanını $g_{\mu k}$ ile çarpıp düzenlersek

$$g_{\mu k}\Gamma^p_{1m}\Gamma^k_{1p} = \frac{1}{4} g_{\mu k} g^{ps} g^{lk} \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{pl}}{\partial x_1}$$

olur, burada

$$g_{\mu k} g^{lk} = \begin{cases} 1\,, & \mu = l \\ 0\,, & \mu \neq l \end{cases}$$

olduğundan

$$g_{\mu k}\Gamma^p_{1m}\Gamma^k_{1p} = \frac{1}{4} g^{ps} \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x_1} \tag{6}$$

olur. (4) den

$$g_{\mu k} R^k_{11m} = -g_{\mu k} \frac{\partial \Gamma^k_{1m}}{\partial x_1} - g_{\mu k}\Gamma^p_{1m}\Gamma^k_{1p}$$

yazabiliriz. Burada (5) ve (6) eşitliklerini yerlerine yazarsak

$$g_{\mu k}\Gamma^k_{11m} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} g_{\mu k} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1} - \frac{1}{4} g^{ps} \frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{pm}}{\partial x_1} \tag{7}$$

elde ederiz. Burada $\mu, m = 2{,}3$ tür.

Riemann ve Ricci tensörleri arasında

$$R_{\alpha\beta\gamma m} = R_{\alpha\gamma} g_{\beta m} - R_{\alpha m} g_{\beta\gamma} + R_{\beta m} g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma} g_{\alpha m} + \frac{1}{R}\left(g_{\alpha m} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta m}\right) \tag{8}$$

şeklinde bir bağıntı vardır, burada

$$R_{\alpha\beta\gamma m} = g_{\alpha p} R^p_{\beta\gamma m}\ , \quad R = g^{ik} R_{ik}$$

dır. (8) de $\beta = \gamma = 1$ alırsak

$$R_{\alpha 11m} = R_{\alpha 1} g_{1m} - R_{\alpha m} g_{11} + R_{1m} g_{\alpha 1} - R_{11} g_{\alpha m} + \frac{R}{2}\left(g_{\alpha m} g_{11} - g_{\alpha 1} g_{1m}\right)$$

olur. Bu son eşitliğin her iki tarafını $g_{\mu k} g^{\alpha k}$ ile çarparsak

$$g_{\mu k}\left[g^{\alpha k}R_{\alpha 11m}\right]=g_{\mu k}[g^{\alpha k}(R_{\alpha 1}g_{1m}-R_{\alpha m}g_{11}+R_{1m}g_{\alpha 1}-R_{11}g_{\alpha m}$$
$$+\frac{R}{2}(g_{\alpha m}g_{11}-g_{\alpha 1}g_{1m}))]$$
$$=g_{\mu k}[g^{\alpha k}(R_{\alpha 1}\delta_{1m}-R_{\alpha m}+R_{1m}\delta_{\alpha 1}-R_{11}R_{\alpha m}$$
$$+\frac{R}{2}(g_{\alpha m}-g_{1\alpha}g_{1m}))]$$
$$=R_{\alpha 1}\delta_{1m}-R_{\alpha m}+R_{1m}\delta_{\mu 1}-R_{11}R_{\mu m}+\frac{R}{2}\left(g_{\mu m}-g_{1\alpha}g_{1m}\right)$$

olur. Ayrıca

$$R_{\alpha 11m}=g_{\alpha p}R^{p}_{11m}$$

olduğundan

$$g_{\mu k}\left(R_{\alpha 11m}\right)=g_{\mu k}\left(g_{\alpha p}R^{p}_{11m}\right)$$
$$=g_{\mu k}R^{k}_{11m}$$

olur. O halde

$$g_{\mu k}R^{k}_{11m}=R_{\mu 1}\delta_{1m}-R_{\mu m}+R_{1m}\delta_{\mu 1}-R_{11}\delta_{\mu m}+\frac{R}{2}\left(g_{\mu m}-g_{1\mu}g_{1m}\right)$$

eğer

$$R_{\mu k}=R_{\mu 1}\delta_{1m}-R_{\mu m}+R_{1m}\delta_{\mu 1}-R_{11}\delta_{\mu m}+\frac{R}{2}\left(g_{\mu m}-g_{1\mu}g_{1m}\right)$$

dersek

$$R_{\mu k}=g_{\mu k}R^{k}_{11m}$$

olup (7) den

$$\overline{R_{\mu k}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}-\frac{1}{2}g_{\mu k}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}-\frac{1}{4}g^{ps}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x_1}$$

bu eşitliğin her iki tarafını 2 ile çarpıp düzenlersek

$$\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}+g_{\mu k}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{ps}\frac{\partial g_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{\mu p}}{\partial x_1}+2\overline{R_{\mu m}}=0\;;\;\mu,m=2,3 \quad (9)$$

buluruz.

Şimdi $\left\{R_{ij}\right\}$ tensörü verildiğinde (2) şartlarını sağlayan ve $C^2(\overline{D})$ uzayına ait olan (9) denklem sisteminin çözümünün tekliğini ispatlayalım. İspatı olmayana ergi yöntemi ile yapacağız.

Kabul edelim ki (9) denklem sisteminin (2) şartlarını sağlayan çözümü tek olmasın, yani $\left(g^{(1)}_{\mu m}\right)$ ve $\left(g^{(2)}_{\mu m}\right)$ (9) denkleminin (2) şartlarını sağlayan çözümleri olsun. (9) ve (2) de sırasıyla $(g_{\mu m})$, $(g^{\mu m})$ yerlerine $\left(g^{(2)}_{\mu m}\right)$, $\left(g^{(2)\mu m}\right)$ ve sonra $\left(g^{(1)}_{\mu m}\right)$, $\left(g^{(1)\mu m}\right)$ yazarsak

$$\frac{\partial^2 g^{(2)}_{\mu m}}{\partial x_1^2}+g^{(2)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{(2)ps}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{mp}}{\partial x_1}+2R^{(2)}_{\mu m}=0$$

$$\frac{\partial^2 g^{(1)}_{\mu m}}{\partial x_1^2}+g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{(1)ps}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{mp}}{\partial x_1}+2R^{(1)}_{\mu m}=0$$

bu eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım.

$$\frac{\partial^2 g^{(2)}_{\mu m}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 g^{(1)}_{\mu m}}{\partial x_1^2}+g^{(2)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}-g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{(2)ps}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1}$$

$$-\frac{1}{2}g^{(1)ps}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{\mu p}}{\partial x_1}+2\left(R^{(2)}_{\mu m}-R^{(1)}_{\mu m}\right)=0$$

Eğer

$$\tilde{g}_{\mu m}=g^{(2)}_{\mu m}-g^{(1)}_{\mu m}$$

ve

$$\tilde{g}^{\mu m}=g^{(2)\mu m}-g^{(1)\mu m}$$

dersek

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu m}}{\partial x_1^2}+g^{(2)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}-g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{(2)ps}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1}\\&-\frac{1}{2}g^{(1)ps}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(1)}_{\mu p}}{\partial x_1}+2\left(R^{(2)}_{\mu m}-R^{(1)}_{\mu m}\right)=0\ ;\quad \mu,m=2,3\end{aligned}\tag{10}$$

ve

$$R^{(i)}_{\mu m}=-R_{\mu m}-R_{11}g^{(i)}_{\mu m}+\frac{1}{2}g^{(i)sr}R_{sr}g^{(i)}_{\mu m}$$

olur. (2) den

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu m}\Big|_{x_1=0}&=g^{(2)}_{\mu m}\Big|_{x_1=0}-g^{(1)}_{\mu m}\Big|_{x_1=0}\\&=g^{(2)0}_{\mu m}(x')-g^{(1)0}_{\mu m}(x')\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\mu m}\Big|_{x_1=0}=0\ ,\quad \left.\frac{\partial \tilde{g}_{\mu m}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0\tag{11}$$

koşulları elde edilir. (10) daki

$$g_{\mu k}^{(2)} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1}$$

$$g^{(2)ps} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(2)}}{\partial x_1} - g^{(1)ps} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(1)}}{\partial x_1}$$

$$R_{\mu m}^{(2)} - R_{\mu m}^{(1)}$$

ifadelerini şöyle düşünebiliriz.

$$g_{\mu k}^{(2)} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1} = g_{\mu k}^{(2)} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1}$$

$$+ g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} + g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1}$$

$$= \left(g_{\mu k}^{(2)} - g_{\mu k}^{(1)}\right) \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} + g_{\mu k}^{(1)} \left(\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} - \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1}$$

$$+ g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1} \right)$$

$$= \tilde{g}_{\mu k} \frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} + g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial \tilde{g}^{ks}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} + g_{\mu k}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1} \tag{12}$$

Benzer şekilde

$$g^{(2)ps} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(2)}}{\partial x_1} - g^{(1)ps} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(1)}}{\partial x_1} = \tilde{g}^{ps} \frac{\partial g_{sm}^{(2)}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(2)}}{\partial x_1} + g^{(1)ps} \frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{\mu p}^{(2)}}{\partial x_1}$$

$$+ g^{(1)ps} \frac{\partial g_{sm}^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial \tilde{g}_{\mu p}}{\partial x_1} \tag{13}$$

ve

$$R_{\mu m}^{(2)} - R_{\mu m}^{(1)} = \left(-R_{\mu m} - R_{11} g_{\mu m}^{(2)} + \frac{1}{2} g^{(2)sr} R_{sr} g_{\mu m}^{(2)} \right)$$

$$- \left(-R_{\mu m} - R_{11} g_{\mu m}^{(1)} + \frac{1}{2} g^{(1)sr} R_{sr} g_{\mu m}^{(1)} \right)$$

$$= -R_{11} \left(g_{\mu m}^{(2)} - g_{\mu m}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(g^{(2)sr} - g^{(1)sr} \right) R_{sr} \left(g_{\mu m}^{(2)} - g_{\mu m}^{(1)} \right)$$

$$= -R_{11} \tilde{g}_{\mu m} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{sr} R_{sr} g_{\mu m}^{(2)} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu m} R_{sr} g^{(1)sr} \tag{14}$$

buluruz. (12), (13), (14); (10) da yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu m}}{\partial x_1^2} + \tilde{g}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^2_{sm}}{\partial x_1} - g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial \tilde{g}^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1} + g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\tilde{g}^{sp}\frac{\partial g^2_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1} + g^{(1)ps}\frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1} + g^{(1)ps}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{g}_{\mu p}}{\partial x_1}\right\}$$
$$+\tilde{g}^{sr}R_{sr}\tilde{g}_{\mu m} - 2R_{11}\tilde{g}_{\mu m} = 0\ ;\quad \mu, m = 2,3$$

Bunu biraz daha düzenlersek

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu m}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1}\tilde{g}^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(1)ks}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{g}^{ks}}{\partial x_1}g^{(1)}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)}_{sm}}{\partial x_1} + \tilde{g}_{\mu k}\frac{\partial g^{(2)ks}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{g}^2_{sm}}{\partial x_1}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{g}_{\mu p}}{\partial x_1}g^{(1)ps}\frac{\partial g^{(1)}_{sm}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}g^{(1)ps}\frac{\partial \tilde{g}_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{\mu p}}{\partial x_1}\frac{\partial g^2_{sm}}{\partial x_1}\tilde{g}^{ps}$$
$$+\tilde{g}_{\mu m}\left(R_{sr}g^{(1)sr} - 2R_{11}\right) + \tilde{g}^{sr}R_{sr}g^{(2)}_{\mu m} = 0\ ;\quad \mu, m = 2,3 \tag{15}$$

elde ederiz.

Şimdi g^{ps} ve $\dfrac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}$ terimlerini g_{ps} ve $\dfrac{\partial g_{ks}}{\partial x_1}$ terimlerine göre yazmak istiyoruz.

Ayrıca

$$\left|g^{ks}\right| \le \frac{\left|A_{ks}\Delta^{(1)} + A^{(1)}_{ks}\Delta^{(1)}\right|}{\delta^2}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece Δ ve A_{ks} yardımıyla g^{ks}, g_{ps} ye göre yazılabilir. Yine

$$\left|\overline{g_{i_1j_1}}, \overline{g_{i_2j_2}}, \overline{g_{i_3j_3}}\right| = \left|g^{(2)}_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3} - g^{(1)}_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3}\right|$$
$$= \left|g_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3} + g^{(1)}_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3} + g^{(1)}_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g_{i_3j_3}\right|$$
$$\le \left|g_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3}\right| + \left|g^{(1)}_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g^{(2)}_{i_3j_3}\right| + \left|g^{(1)}_{i_1j_1}g^{(2)}_{i_2j_2}g_{i_3j_3}\right|$$
$$a_0 = \max_{\substack{i,j=2,3\\ s=1,2\\ x\in D}}\left|g^{(s)}_{ij}(x)\right|$$

olmak üzere K_1, a_0 a bağlı olsun. Bu durumda

$$\left|\overline{g_{i_1j_1}}, \overline{g_{i_2j_2}}, \overline{g_{i_3j_3}}\right| \le K_1\sum_{i,j=2}^{3}\left|g_{ij}\right| \tag{16}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece g_{ps} ye göre $\overline{g_{i_1 j_1}}, \overline{g_{i_2 j_2}}, \overline{g_{i_3 j_3}}$ nin her birini hesaplayıp Δ yı δ_{ps} ye göre ifade edebiliriz. Δ nın tanımını ve (16) yı kullanarak

$$\left|\Delta\right| \leq K_2 \sum_{i,j=2}^{3} \left|g_{ij}\right| \tag{17}$$

buluruz. Burada K_2 sayısı a_0 a bağlıdır. Yine A_{ks} nin tanımından

$$\left|A_{ks}\right| \leq K_3 \sum_{i,j=2}^{3} \left|g_{ij}\right| \tag{18}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Burada K_3, a_0 a bağlıdır.

Böylece (17) ve (18) den

$$\left|g^{ks}\right| \leq \frac{\left|A_{ks}\Delta^{(1)} + A_{ks}^{(1)}\Delta\right|}{\delta^2}$$

$$\leq \frac{\left|A_{ks}\right|\left|\Delta^{(1)}\right| + \left|A_{ks}^{(1)}\right|\left|\Delta\right|}{\delta^2}$$

$$\left|g^{ks}\right| \leq \frac{K_3 \sum_{i,j=2}^{3}\left|g_{ij}\right|\left|\Delta^{(1)}\right| + \left|A_{ks}^{(1)}\right|\left|K_2 \sum_{i,j=2}^{3}\left|g_{ij}\right|\right|}{\delta^2}$$

veya

$$\left|g^{ks}\right| \leq K_4 \sum_{i,j=2}^{3} \left|g_{ij}\right| \tag{19}$$

buluruz, burada K_4, a_0 ve δ ya bağlı bir sayıdır.

Benzer şekilde $\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}$ fonksiyonunu g_{ij} ve $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}$ fonksiyonlarına göre hesaplayabiliriz. Böylece

$$\left|\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\right| \leq K_5 \sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right| + \left|\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\right|\right) \tag{20}$$

olur, burada K_5; a_0, δ ve $a_1 = \max\limits_{\substack{i,j=2,3 \\ s=1,2 \\ x\in D}} \left|\partial g_{ij}^{(s)}(x)\right|$ a bağlı bir sayıdır.

Böylece (19) ve (20) eşitsizliklerini (15) de yerlerine yazarsak

$$\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right| \leq K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right| + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|\right); \quad \mu, m = 2,3 \tag{21}$$

bulunur, burada K; a_0, a_1, δ ve $a_2 = \max\limits_{\substack{i,j=2,3 \\ x\in D}}\left|R_{ij}\right|$ sayılarına bağlıdır.

Dolayısıyla (15) sisteminin her $(\delta_{\mu m}) \in C^2(\overline{D})$ çözümü (21) diferensiyel eşitsizliğini sağlar.

$\overline{D}$ de $R_{ij}(x)$ verildiğini hatırlayıp (11) şartlarını sağlayan (21) diferensiyel eşitsizliklerin sisteminin her $(g_{\mu m}) \in C^2(\overline{D})$ çözümünün yalnızca sıfır olduğunu göstereceğiz. (21) eşitsizliğinin her iki tarafının karesini alıp

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)$$

eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|^2 \leq 2K\left[\left(\sum_{i,j=2}^{3}\left|g_{ij}\right|\right)^2 + \left(\sum_{i,j=2}^{3}\left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|\right)^2\right]$$

$$\leq 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|\right) \tag{22}$$

elde ederiz.

$$-\lambda\, g_{\mu m}\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2} \leq \left|-\lambda\, g_{\mu m}\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|$$

$$= \left|-\lambda\, g_{\mu m}\right|\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|$$

$$\leq \left|-\lambda\, g_{\mu m}\right|^2\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|^2$$

eşitsizliğini düşünerek

$$\gamma^2\lambda^2 g_{\mu m}^2 + \gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|\right) + \psi^{v+1}\gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|\right)$$

ifadesini göz önüne alalım. $\lambda \geq \lambda_0$ için

$$\gamma^2\lambda^2 g_{\mu m}^2 + \gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right) + \psi^{v+1}\gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right)$$

$$\geq \gamma^2\lambda^2 g_{\mu m}^2 + \gamma^2\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|^2 + \psi^{v+1}\gamma^2\left|\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right|$$

$$\geq \lambda g_{\mu m}\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\gamma^2 + \psi^{v+1}\gamma^2\left(\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_1^2}\right)^2$$

$$\geq \lambda\gamma^2\left(\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}\right)^2 + \lambda^3 v\gamma^2 (g_{\mu m})^2 + d(g_{\mu m})$$

veya

$$\gamma^2\lambda^2 g_{\mu m}^2 + \gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right) + \psi^{v+1}\gamma^2 6K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right)$$

$$\geq \lambda\gamma^2\left(\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}\right)^2 + \lambda^3 v\gamma^2 g_{\mu m}^2 + d(g_{\mu m})\,;\quad \mu, m = 2,3 \tag{23}$$

buluruz. (5) eşitsizliğini (m,μ) üzerinde 2 den 3 e kadar toplarsak

$$\gamma^2\lambda^2\sum_{\mu,m=2}^{3} g_{\mu m}^2 + 24K\gamma^2\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right) + 24\psi^{v+1}\gamma^2 K\sum_{i,j=2}^{3}\left(\left|g_{ij}\right|^2 + \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\right|^2\right)$$

$$\geq \lambda^2\gamma^2\sum_{\mu,m=2}^{3}\left[\left(\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}\right)^2 + \lambda^2 v\gamma^2 g_{\mu m}^2\right] + \sum_{\mu,m=2}^{3} d(g_{\mu m})$$

eşitsizliğin sağ tarafını atarsak

$$\begin{aligned} 0 \geq &\left[\lambda - 24K\left(1+\psi^{v+1}\right)\right]\gamma^2\sum_{\mu,m=2}^{3}\left(\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}\right)^2 \\ &+\left[\lambda^3 v - \lambda^2 - 24K\left(1+\psi^{v+1}\right)\right]\gamma^2\sum_{\mu,m=2}^{3} g_{\mu m}^2 + \sum_{\mu,m=2}^{3} d(g_{\mu m}) \end{aligned} \tag{24}$$

γ fonksiyonunun tanımını ve (11) şartlarını göz önünde bulundurarak Ω üzerinden (24) eşitsizliğini integralleyip $\lambda \to \infty$ için limite geçersek

$$\sum_{\mu,m=2}^{3}\left[g_{\mu m}^{2}+\left(\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}\right)^2\right]d\Omega \le 0$$

buluruz. Bu ise Ω bölgesinde $g_{\mu m}=0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $0<x_1<\gamma$ için $g_{\mu m}=0$ olur. Benzer şekilde $\gamma<x_1<2\gamma$ içinde $g_{\mu m}=0$ olduğu gösterilebilir. İspata bu şekilde devam edilirse D de $g_{\mu m}=0$ elde ederiz ki bu da Teorem 2.1.1. i ispatlar.

2.2. Einstein Tensörü Verildiğinde Bir Riemann Metriği Bulma

Problem 2.2.1. $D=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in IR \mid 0<x_i<1, i=1,2,3\}$ bölgesinde (2) koşulları altında $\{G_{ij}\}$ Einstein tensörünün bileşenleri verildiğinde bir $(g_{ij})\in C^2(\overline{D})$ metriğini bulma

Teorem 2.2.1. Problem 2.2.1, $C^2(\overline{D})$ uzayında yalnızca bir çözüme sahiptir.

İspat.

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$$

eşitliklerinden

$$R=2g^{ij}G_{ij}\,,\;\; R_{ij}=G_{ij}+\frac{1}{2}Rg_{ij} \tag{25}$$

buluruz. (25) göz önüne alınarak (9) dan

$$\frac{\partial g_{\mu m}}{\partial x_1}+g_{\mu k}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{sm}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}g^{ps}\frac{\partial g_{sm}}{\partial x_1}\frac{\partial g_{\mu p}}{\partial x_1}-2\overline{G_{\mu m}}=0\;;\;\mu,m=2,3 \tag{26}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}\overline{G_{\mu m}}&=-R_{\mu m}\\&=-\left[R_{\mu 1}\delta_{1m}-R_{\mu m}+R_{1m}\delta_{\mu 1}-R_{11}g_{\mu m}+\frac{R}{2}\left(g_{\mu m}-\delta_{1\mu}\delta_{1m}\right)\right]\\&=R_{\mu m}-R_{\mu 1}\delta_{1m}+R_{11}g_{\mu m}-R_{1m}\delta_{\mu 1}+\frac{R}{2}\left(\delta_{\mu m}\delta_{1\mu}-g_{\mu m}\right)\\&=R_{\mu m}+R_{11}g_{\mu m}-\frac{1}{2}Rg_{\mu m}\end{aligned}$$

ve

$$G_{\mu m}=R_{\mu m}-\frac{1}{2}Rg_{\mu m}$$

olduğundan

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11}$$
$$= R_{11} - \frac{1}{2} R$$

dir. O halde

$$\overline{G_{\mu m}} = G_{\mu m} + G_{11} g_{\mu m} - \frac{1}{2} R g_{\mu m}$$

olur. $C^2(D)$ de Problem 2.2.1 in çözümünün tekliği Problem 2.1.1 in çözümü ile aynı yöntemle hesaplanabilir, yalnızca bir fark vardır, bu durumda a_2 sabiti G_{ij} ye bağlı, şöyle ki

$$a_2 = \max_{\substack{x \in \overline{D} \\ i,j=2,3}} \left| G_{ij} \right|$$

dir. Böylece Teorem 2.2.1 de ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] **Dubrovşn, B. A., Novikov, S. P. and Fomenko, A. T.,** Modern Geometry, Nauka, Moskow, 1979.

[2] **Hacısalihoğlu, H. H. and Amirov, A. Kh.,** On the interconnections between the metric and the curvature in a Riemannian space, Soviet Math. Dokl., 351 (1996), (3), 295-296.

[3] **Hacısalihoğlu, H. H.,** Diferensiyel Geometri, Ertem Yayın Ltd.; 1994.

[4] **Nirenberg, L.,** An abstract form of the non-linear Cauchy-Kowalewski theorem, J. Differential Geometry, Vol 6; 561-576, 1972.

[5] **Rasheuskki, P. K.,** Riemann Geometry and Tensor Analysis, Nauka, Moskow, 1966.

[6] **Romanov, V. G.,** Inverse Problems of Mathematical Physics. VNU Science Pres, The Netherlands, 1987.

[7] **Willmore, T. J.,** Total Curvature in Riemannian Geometry, Ellis Horwood Ltd., 1982.