Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı : 13 Haziran 2007 1302 - 3055

LYAPUNOV METODU İLE FARK DENKLEMLERİNİN KARARLILIĞININ BELİRLENMESİ

A.Burcu Özyurt SERİM[1] ve Mustafa BAYRAM[2]
[1]Haliç Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü, 43450-Beyoğlu- İstanbul,
e-mail:ozyurtserim@halic.edu.tr
[2]Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü. 34210-Esenler-İstanbul
e-mail:msbayram@yildiz.edu.tr

Özet

Bilindiği gibi, Lyapunov metodu, genelleştirilmiş bir enerji fonksiyonunun çözümlerinin kararlılığı için kullanır. Fakat son zamanlarda fark denklem sistemlerinin çözümlerinin kararlılığı içinde kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada, Lyapunov metodu kullanılarak fark denklemlerinin kararlılığının nasıl belirlendiği ele alındı ve bazı örnek problemlere uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, Lypunov metodu, kararlılık.

Summary

As it is known, Lyapunov method was used for stability of the solution of the generalized energy fonctions, but recently, this method is used for stability of the difference equations. In this study, We have shown how to used Lyapunav method for the stability of the difference equations and this method has been applied some examples.
Keywords: Difference equations, Lyapunov method, stability.

1.GİRİŞ

İlk olarak, Rus matematikçi A.M Lyapunov lineer olmayan diferensiyel denklemlerin kararlılığını incelemek için *Lyapunov metodu* denilen yeni bir metot geliştirmiştir. Bu metot zaman içinde diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü için oldukça yaygın olarak kullanılmış, son zamanlarda da fark denklem sistemleri için kullanılmaya başlanmıştır.

Yoden Shigeo and Nomura Masako, sonlu-zamanlı Lyapunov kararlılık analizi ve barotropic akışın bir spektral modele uygulamalarını yeniden incelediler. Sonuç olarak sonlu –zamanlı Lyapunov üstlerin atmosferik tahmin problemine uygulanabildiğini gösterdi. [1]. Daha sonra Lyapunov kararlılık teorisine dayanan yeni bir kontrol yasası tanımlandı, ve bu metodun, üç fazlı (PWM) darbe genişliği modülasyonu kontrol yasalarıyla ac/dc voltaj kaynağı dönüştürme problemine uygulanması önerildi [2]. Banach uzayında lineer olmayan zaman değişkenli dinamik sistemler için Lyapunov kararlılık teorisi verildi [1]. Lyapunov kararlılık teoremi ve klasik teoride Barbashin-Krasovskii-La Salle değişmezlik prensibi sonsuz boyutlu Banach uzayına genişletildi. Çözümün varlığı ve hareketlerin toplamsal özellikleri varsayımı altında, düzgün kararlılık ve düzgün asimptotik karalılık için gerek ve yeter şartları elde edildi. Bu genişletme sürekli ve sürekli olmayan sistemlerin kararlılığı için bir kriter olarak kullanıldı[3]. Klasik sistemlerde parametrelerin kararlı bölgeden kararsız bölgeye değişmesi gibi üst quantum Lyapunov üs oranlarının 0'dan bir pozitif değere değiştiği gösterildi[4]. Düzgün olmayan sağlam global asimptotik kararlılık kavramı açıklandı. Genel olarak kavram sonlu yada sonsuz boyutlu ayrık zaman sistemler için RGAS düzgün olmayan zaman belirlendi. Bu kararlılık kavramı için Lyapunov karakteristliği gösterildi. Sonuçlar sonlu boyutlu ayrık zaman sistemlere uygulanarak sürekli zaman sistemlerin zaman uygunluğu ile Euler metot açıkça elde edildi[5]. Sürekli ve ayrık Lyapunov matris denklemlerinin çözümü için tahmin probleminin birleşik bir yaklaşım ile çözülmesi incelendi[6]. Karışık tip Lyapunov denklemi olarak adlandırılan $X = AXB^{*} + BXA^{*} + Q$ lineer matris denkleminin çözünürlüğü araştırıldı ve bununla ilgili bazı sonuçlar verildi[7]. Gecikmeli bir kontrol sistemin sağlam geri dönüşümlü kararlığı için Lyapunov koşulları verildi[8]. Sonlu zaman kararlılık problemi differensiyel kapsam içinde incelendi. Sonlu zaman kararlılık için iki yeter şart, bir düzgün Lyapunov fonksiyon ve bir düzgün olmayan Lyapunov fonksiyon kullanılarak tanıtıldı[9]. Kararlı ayrık zamanlı lineer zaman-değişmez (LTI) sistemler için zayıf ve kuvvetli ortak quadratic Lyapunov fonksiyonların (CQLF) varlığı araştırıldı[10]. Biz bu makalede ise, Lyapunov a göre fark denklemlerinin kararlılığını inceledik ve örnekler üzerinde gösterdik.

2. METOT

Bu bölümde, amacımız,

$$x(n_0)=x_0,\ \ x(n+1)=f(x(n)),\ \ f(0)=0 \qquad (1.1)$$

lineer olmayan sistemin $x(n)$ çözümünü bulmadan orijindeki denge noktasının kararlılığını belirlemektir. Eğer (1.1) sistemi bir x^* noktasında her n için yine bu noktada kalıyorsa x^* noktasına (1.1) sisteminin denge noktası denir. Şimdi

$$x(n+1)=f(x(n)) \qquad (1.2)$$

otonom fark sistemlerini ele alalım. Burada, $f:G\rightarrow\square$, sürekli bir fonksiyon ve $G\subset\square^k$. x^*, (1.2) sisteminin bir denge noktası olsun. Bu durumda, $f(x^*)=x^*$ eşitliği sağlanır.

$V:\square^k\rightarrow\square$ reel değerli fonksiyon olsun. V nin sürekliliğinden yeterince küçük bir r için, $0<c\leq r\leq d$ olmak üzere

$$V(x)<\max_{\|v\|\leq r}V(v),\ \ V(x)\geq\min_{r\leq\|v\|\leq d}V(v)$$

eşitsizlikleri yazılır. Burada $\|x\|=r$ dir. V ' nin değişimi (1.2) denklemine bağlı olarak

$$\Delta V(x)=V(f(x))-V(x)$$

şeklinde tanımlanır ve buradan

$$\begin{aligned}\Delta V(x(n))&=V(f(x(n)))-V(x(n))\\&=V(x(n+1))-V(x(n))\end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 1. $\Omega\subset\square^k$ olmak üzere eğer

(i) Ω üzerinde V sürekli ve
(ii) $x, f(x)\in\Omega$ iken $\Delta V(x)\leq 0$

özellikleri geçerli ise V ye Ω üzerinde bir *Lyapunov Fonksiyonudur* denir.

Tanım 2. $\square^k$ da, x merkezli γ yarıçaplı açık küre $B(x,\gamma)$) şeklinde gösterilir ve

$$B(x,\gamma)=\left\{y\in\square^k \mid \|y-x\|<\gamma\right\}$$

ile tanımlanır. $B(0,\gamma)$ kısaca $B(\gamma)$ ile gösterilir.

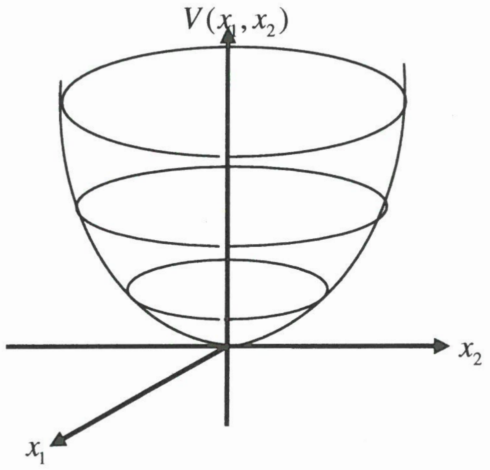
Sonuç 1. Eğer

i. $V(x^*) = 0$ ve

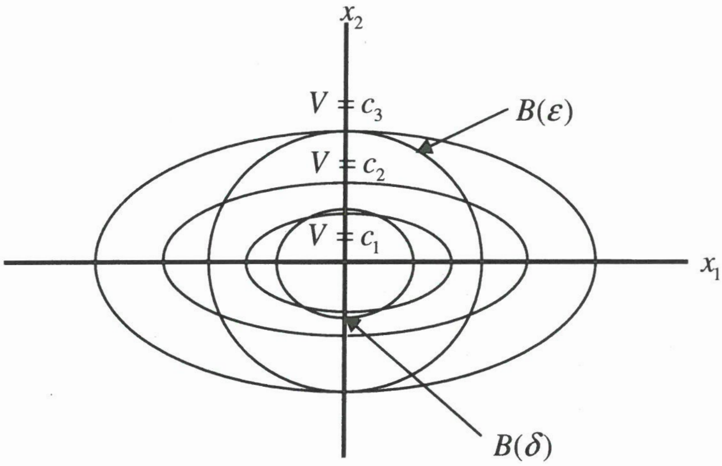
ii. $V(x) > 0$ ve bir $\gamma > 0$ için bütün $x \in B(x^*, \gamma)$

şartları sağlanıyorsa V fonksiyonu x^* da pozitif tanımlıdır.

Şimdi aşağıda ispatı verilen Lyapunov kararlılık teoreminin üzerinde duralım. Kolaylık için sistem düzlemsel alınacak ve $x^* = 0$ denge noktası olarak kabul edilecektir.



Şekil 1. İkinci dereceden bir Lyapunov fonksiyonu.



Şekil 2. Yüzey eğrileri.

Şekil 1. V nin üç boyutlu koordinat sistemindeki grafiğini gösterir. Şekil 2. ise düzlemde V nin $V(x_1, x_2) = c$ seviye eğrilerini gösterir. Eğer, $\varepsilon > 0$ ise o zaman $B(\varepsilon)$ da V ' nin seviye eğrilerinden birisini kapsar. Bu $V(x) = c_2$ olsun. δ, $0 < \delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde ise $V(x) = c_2$, $B(\delta)$ küresini de kapsar. Eğer $x(n,0,x_0)$, $x_0 \in B(\delta)$ ile başlayan bir çözümse, $V(x_0) \le c_2$ dir. $\Delta V \le 0$ olduğundan (1.2) denkleminin çözümleri üzerinde V monoton artmayan bir fonksiyondur. Bu nedenle her bir $n \ge 0$ için

$$V(x(n)) \le V(x_0) \le c_2$$

olur[1].

Böylece $x(n,0,x_0)$ çözümü daima $B(\varepsilon)$ küresi içinde kalacaktır. Bu sebeple sıfır çözümü kararlıdır.

Yukarıdaki tartışma Lyapunov kararlılık teoreminin ispatına temel teşkil eder. Burada önemli bir nokta da anlaşılmayı kolaylaştırmak için, eğriler $x^* = 0$ denge noktasının kapsandığı düzlemde çizilmiştir.

Teorem 1.(Lyapunov Kararlılık Teoremi). Eğer V, (1.2) denklemi için x^* denge noktasının bir H komşuluğunda Lyapunov fonksiyonu ve V, x^* da pozitif tanımlı ise o zaman x^* denge noktası kararlıdır. Ayrıca her $f(x) \in H$ ve $x \ne x^*$ için $\Delta V(x) < 0$ şartı da sağlanıyorsa x^* asimtotik kararlıdır. Bundan başka eğer $G = H = R^k$ ve

$$\|x\| \to \infty \text{ için } V(x) \to \infty \qquad (1.3)$$

ise x^* global anlamda asimtotik kararlıdır[11].

İspat. $\alpha_1 > 0$, $B(x^*,\alpha_1) \subset G \cap H$ olacak şekilde seçelim. f nin sürekliliğinden eğer $x \in B(x^*,\alpha_2)$ ise $f(x) \in B(x^*,\alpha_1)$ sağlanacak şekilde bir $\alpha_2 > 0$ vardır. $0 < \varepsilon \le \alpha_2$ verilsin.

$$\Psi(\varepsilon) = \min\{V(x) \mid \ \varepsilon \le \|x - x^*\| \le \alpha_1\}$$

olarak tanımlayalım. Ara değer teoremi gereğince $\|x - x^*\| < \delta$ olduğun da her zaman $V(x) < \Psi(\varepsilon)$ olacak şekilde $0 < \delta < \varepsilon$ vardır. Yani bir $\delta > 0$ mevcuttur.

Şimdi, eğer $x_0 \in B(x^*,\delta)$ ise her bir $n \ge 0$ için $x(n) \in B(x^*,\varepsilon)$ olduğu görülür. Bu iddia doğrudur. Aksi takdirde $x_0 \in B(x^*,\delta)$, $l \le r \le m$ için $x(r) \in B(x^*,\varepsilon)$ ve $x(m+1) \notin B(x^*,\varepsilon)$ sağlanacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır.

$$x(m) \in B(x^*,\varepsilon) \subset B(x^*,\alpha_2)$$

olduğunda

$$x(m+1) \in B(x^*,\alpha_1)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$V(x(m+1)) \ge \Psi(\varepsilon)$$

sağlanır. Ancak

$$V(x(m+1)) \le, \ldots, \le V(x_0) < \Psi(\varepsilon)$$

olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durum x^* denge noktasının kararlılığını gösterir.

Asimtotik Kararlılığın İspatı. $x_0 \in B(x^*,\delta)$ olsun. Bu durumda, her bir $n \ge 0$ için $x(n) \in B(x^*,\varepsilon)$ geçerli olur. Eğer $\{x(n)\}$, x^*'a yakınsamıyorsa $\{x(n)\}$ nin $y \in \mathbb{R}^k$ ya yakınsak olacak şekilde bir $\{x(n_i)\}$ altdizisi vardır. $x^* \notin E$ olacak şekilde y' nin $E \subset B(x^*,\alpha_1)$ olmak üzere bir E açık komşuluğu var olsun. E üzerinde tanımlanmış bir

$$h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonu her $x \in E$ için iyi tanımlı, sürekli ve $h(x) < 1$ olarak düşünebiliriz.

Şimdi, eğer $\eta \in (h(y),1)$ ise $x \in B(y,\delta)$ ifadesi $h(x) \le \eta$ yi gerektirecek şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Böylece yeterince büyük n_i için

$$V(f(x(n_i))) \le \eta V\left(x(n_i - 1)\right) \le \eta^2 V\left(x\left(n_i - 2\right)\right) \le ,..., \le \eta^{n_i} V\left(x_0\right)$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} V\left(x(n_i)\right) = 0$$

olur. Ancak

$$\lim_{n\to\infty} V\left(x(n_i)\right) = V\left(y\right)$$

dir. Bu ise $V(y) = 0$ ifadesini verir ve sonuç olarak $y = x^*$ bulunur.

Global Anlamda Asimtotik Kararlılığın İspatı. Burada tüm çözümlerin sınırlı olduğunu göstermek ve yukarıdaki ispatı tekrarlamak yeterlidir. Bir $x(n)$ sınırsız çözümünün olduğunu kabul ederek başlayalım. Bu durumda, $n_i \to \infty$ iken $\{x(n_i)\} \to \infty$ altdizisi vardır. (1.3) şartı gereğince, bu kabul $n_i \to \infty$ için $V(x(n_i)) \to \infty$ sonucunu verir. Bu da bir çelişkidir. Zira bütün i ler için

$$V\left(x_0\right) > V\left(x(n_i)\right)$$

olur. Bu da istenen ispattır.

Sınırlılık üzerinde bu sonuç başlı başına bir öneme sahiptir. Bu nedenle onu dikkate alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2. Eğer $V, \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \alpha > 0\right\}$ üzerinde bir Lyapunov fonksiyonu ve (1.3) şartını da sağlarsa (1.2) denkleminin tüm çözümleri sınırlıdır.

3.Uygulamalar

Bu bölümde Lyapunov metodu kullanılarak, fark denklemlerinin kararlılığını belirleyebilmek için bazı örnekler verilecektir.

Örnek 1: Bir ikinci mertebeden fark denklemi

$$x\left(n+1\right) = \frac{\alpha x\left(n-1\right)}{1 + \beta x^2\left(n\right)} \quad , \quad \beta > 0$$

olarak verilsin. Bu denklem çoğu kez bir gecikme denklemi olarak isimlendirilir.

Burada üç denge noktası vardır. Bunlar, eğer $\alpha > 1$ ise $x^* = 0$ ve $x^* = \mp\sqrt{\dfrac{(\alpha - 1)}{\beta}}$ dır.

$$y_1(n) = x(n-1)$$

ve

$$y_2(n) = x(n)$$

ifadeleri verilen denklemi aşağıdaki sisteme dönüştürür:

$$y_1(n+1) = y_2(n)$$

$$y_2(n+1) = \frac{\alpha x\left(n-1\right)}{\beta x^2(n) + 1} = \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)}$$

Burada $(0,0)$ denge noktasının kararlılığını ele alacağız. İlk önce

$$V(y_1+y_2)=y_1^2+y_2^2$$

ifadesinin bir Lyapunov fonksiyonu olma özelliğini kontrol edelim. Bu fonksiyon açık olarak sürekli ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde pozitif tanımlıdır.

$$\Delta V(y_1(n),y_2(n))=y_1^2(n+1)+y_2^2(n+1)-y_1^2(n)-y_2^2(n)$$

Böylece,

$$\Delta V(y_1(n),y_2(n))=\left(\frac{\alpha^2}{\left[1+\beta y_2^2(n)\right]^2}-1\right)y_1^2(n)\leq\left(\alpha^2-1\right)y_1^2(n)$$

bulunur.

Eğer $\alpha^2\leq 1$ ise $\Delta V\leq 0$ dır. Bu durumda denge noktası sadece $x^*=0$ olur ve Teorem 1 den orijin kararlıdır. Burada

$$\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=-\infty$$

olduğundan Teorem 2. tüm çözümlerin sınırlı olmasını gerektirir, y ekseni üzerindeki tüm noktalar için $\Delta V=0$ olduğundan, Teorem 1. ile bu denklemin asimtotik kararlılığı hakkında birşey söylenemez. Bu, fen ve mühendislerin uygulamalarda karşılaşılan pek çok problemlerden biridir. Bu durumda daha ince ve daha kesin bir analiz gerekir. Bu ihtiyaç bizi *La Salle Değişmezlik ilkesine* götürür.

Lemma 1. V, $\mathbb{R}^k$ nın G alt kümesinde tanımlı pozitif bir Lyapunov fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$E=\left\{x\in\bar{G}\mid \Delta V(x)=0\right\}$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre biz, E nin bütün değişmez alt kümelerinin birleşimi olarak bir M kümesi tanımlayabiliriz.

Teorem 3(La Salle Değişmezlik İlkesi). Eğer (1.1) denkleminin pozitif tanımlı bir V, Lyapunov fonksiyonu varsa her $n\geq 0$ için $G\subset\mathbb{R}^k$ üzerinde (1.1) denkleminin her bir çözümü ya G de sınırsızdır ya da bir M kümesine yaklaşır.

İspat. G sınırlı ve $x(n)$ tüm $n\geq 0$ için G de kalan bir çözüm olsun. Bu şartlar altında $x(n)$ sınırlıdır. Tam sayıların bir $\{n_i\}$ altdizisi için

$$\lim_{n_i\to\infty}x(n_i)=y\in\bar{G}$$

olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $V(x(n))$ fonksiyonu artmayan ve alttan sınırlı olduğundan bir c sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}V\big(x(n)\big)=c$$

Bu,

$$\lim_{n\to\infty}\Delta V(x(n))=\lim_{n\to\infty}\left[V(x(n+1))-V(x(n))\right]=0$$

sonucunu verir. ΔV nin sürekliliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\Delta V\big(x(n_i)\big)=\Delta V(y)$$

buluruz. Böylece $\Delta V(y)=0$ olur. Sonuç olarak $y\in E$ dir. Bu gerçek bizi $\Omega(x(n))\subset E$ sonucuna götürür ve bu nedenle $\Omega(x(n))\subset M$ dir.

Diğer taraftan, eğer G sınırsız ise $\lim_{n\to\infty}x(n)=\infty$ olacak şekilde sınırsız bir $x(n)$ çözümü bulmak mümkündür. Bu, eğer $\lim_{x\to\infty}V(x)\neq\infty$ şartı sağlanıyorsa yani V üstten sınırlı ise bu mümkün olur.

Örnek 2. Bir önceki Örnek 1 La Salle Değişmezlik ilkesine göre yeniden alınsın. Burada iki durum incelenecektir.

I. Durum ($\alpha^2 = 1$): E kümesi x ve y eksenleri üzerindeki tüm noktalardan oluşur. Bu, beraberinde farklı iki durumu gösterir:

i. ($\alpha = 1$): Eğer $y_1(0) = a$ ve $y_2(0) = 0$ ise $y_1(1) = 0$ ve $y_2(1) = a$ ve de $y_1(2) = a$ ve $y_2(2) = 0$ olur. Bundan dolayı her çözüm eksenlerden birinin üzerinde periyodu 2 ile başlayan herhangi bir çözüm olur ve bundan dolayı $M = E$ dir.

ii. ($\alpha = -1$): $\Phi^+(a,0) = \{(a,0),\ (0,-a),\ (-a,0),\ (0,a)\}$ dır. Böylece her iki eksenden birinin üzerinde başlayan her çözümün periyodu 4 olur. Burada da $M = E$ dir.

Bu nedenle tüm çözümler ya $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,a)$ dan birine ya da $(0,-a)$ ya yakınsaktır. Yani sıfır çözümü asimtotik kararlı değildir.

II. Durum($\alpha^2 < 1$): Bu durumda E, y-eksenindedir ve $M = \{(0,0)\}$ dır. Böylece tüm çözümler orijine yakınsar. Bu nedenle orijin global asimtotik kararlıdır.

III. Durum ($\alpha^2 > 1$) şeklinde ifade edilir. Bu halde çözümün kararlılığını belirlemede La Salle değişmezlik ilkesi bize yardımcı olamaz. Başka bir ifadeyle kararlılık belirlenemez.

4.KAYNAKLAR

[1]. S, Yoden and M, Nomura. Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability, Journal of the Atmospheric Seciences. Vol.50, Iss.11; p. 1531, (1993).

[2]. H, Komurcugil and O, kukrer. Lyapunov-based control for three-phase PWM AC/DC voltage-source converters, IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.13, Iss.5; p.801, (1998).

[3]. Gen-Qi Xu and Siu Pang Yung. Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space, IMA journal of mathematical control and information, Vol. 20, Iss 1, p. 105, (2003).

[4]. M. Yoshimasa. The Lyapunov stability of the N-soliton solutions in the Lax hieerarshy of the Benjamin-Ono equation, Journal of Mathematical Physics, Vol. 47, Iss. 10; p. 1, (2006).

[5]. I, Karafyllis. Non-uniform robust global asymptotic stability for discrete-time systems and applications to numerical analysis, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Vol. 23, Iss. 1; p. 11, (2006).

[6]. C.H.Lee. solution Bounds of the Continuous and Discrete Lyapunov Matrix equations, Journal of Optimization Theory and applications, Vol. 120, Iss.3; p. 559, (2004).

[7]. Shufang Xu and M Cheng. On the Solvability fort he mixed-type Lyapunov equation, IMA journal of Applied Mathematics, Vol.71, Iss. 2; p. 287, (2006).

[8]. Richard C. H. Lee, C.W. Wong, Cheng-Zhong Xu, L.H.Yim and S.P. Yung. A Lyapunov-type condition for robust feedback stability of delay control systems, IMA journal of Mathematical control and Information, Vol. 23, Iss. 1; p. 97, (2006).

[9]. E. Moulay and W. Perruquetti. Finite time stability of differential inclusions, IMA journal of Mathematical control and Information, Vol. 22, Iss. 4; p. 465, (2005).

[10]. Oliver Mason and Robert Shorten. On common quadratic Lyapunov functions for stable discrete-time LTI systems, IMA journal of Applied Mathematics, Vol.69, Iss. 3; p. 271, (2004)

[11]. Elaydi saber, 1996, An Introduction to Difference Equations, springer, 31.