Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı : 13 Haziran 1302-3055

SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERENSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Murat OSMANOGLU, Muhammet KURULAY and Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü,
34210-Esenler, İstanbul,
e-mail: msbayram@yildiz.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, mühendislik ve fen bilimleri alanındaki çoğu modellemelerde ortaya çıkan sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklem sistemlerinin çözülebilirliği araştırıldı. Nümerik çözüm için diferensiyel dönüşüm metodu kullanıldı. Bu metotla denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri bulundu ve bu çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı.
Anahtar kelimeler: Diferensiyel cebirsel denklem, çözülebilirlik, kuvvet serileri, index, diferensiyel dönüşüm metodu.

Summary

In this study, we have investigated solvability of the linear differential-algebraic equations with constant coefficient which ocur in most of the modelles in engineering and physical sciences. Differential transform method has been used for numerical solution. We have obtained approximate analitical solution of the given equation systems using the method and compared numerical and analitycal solutions.
Keywords: Diferensitial-algebraic equations, solvability, power series, index, differential transform method.

1.GİRİŞ

Yapılan araştırmalar sonucunda, uygulamalı bilim dallarında, pratikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemeler oluşturması büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda 20. yüzyılın sonuna doğru oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Çoğu modellemelere ait problemler genelde diferensiyel cebirsel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle, diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Diferensiyel cebirsel denklem kavramı ilk kez Petzold[28] tarafından kullanılmıştır. Sonra Petzold[29], Ascher ve Petzold[2,5], Gear ve Petzold[15] diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Brennan[8] başlangıç değerleri verilmiş diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Ascher ve Spiter[3] sınır değeri verilmiş diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için sıralama (collacation) metodunu kullanmışlardır. Hairer[17] diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için Runge – Kutta yöntemini kullanmıştır. Marz[26,27] ve Campbell[9] lineer ve nonlineer diferensiyel denklemlerin indeksi ve çözülebilirliğini incelemişlerdir. Çelik ve Bayram[10,11,12] diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde Pade yaklaşımını kullanmışlardır. Guzel ve Bayram[16] Pade yaklaşımını yüksek indeksli diferensiyel cebirsel denklemlere başarıyla uygulamışlardır. Ayrıca Hosseini[19,20,21] lineer ve nonlineer diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümü için Adomian yöntemini kullanmış ve yüksek indeksli diferensiyel cebirsel denklemlerde indeks indirgeme için bir yöntem sunmuştur.

Diferensiyel dönüşüm metodu ilk olarak Zhou[31] tarafından elektirk devre analizinde lineer ve non-lineer başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Jang ve Chen[22] diferensiyel dönüşüm yöntemini başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanmışlardır. Hassan[18] bazı özdeğer problemlerinin çözümünde diferensiyel dönüşüm metodundan faydalanmıştır. Köksal ve Herdem[24] diferensiyel dönüşüm metodunu nonlineer devre analizine uygulamışlardır. Ayaz[7] ve Liu[25] diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde diferensiyel dönüşüm yönteminin kullanışlı olduğunu belirtmişlerdir. Arıkoğlu ve Özkol[1] diferensiyel fark denklemlerinin çözümünde bu yöntemi kullanmışlar, ayrıca Ertürk[14] diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli mertebeli diferensiyel denklemlerin çözümü için geliştirmiştir. Bunlara ek olarak Chen ve Ho[14], Jang ve Chen[23], Ayaz[6] ve Yang[30] iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunu kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamışlardır.

Bu çalışmada, sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklemlerin çözülebilirliği ve indeksleri incelendi, çözümleri için diferensiyel dönüşüm metodu sunuldu ve bu metotla yaklaşık analitik çözüm elde edildi. Yaklaşık analitik çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı.

2. DİFERENSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLER

Bir diferensiyel cebirsel denklem

$$F\left(t, y(t), y'(t)\right)=0 \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. (1) denklemine genel kapalı (implicit) şekilde yazılmış diferensiyel cebirsel denklem denir. Burada $F \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ dır.

(1) denklemi açık formda

$$F(y', y, x, t)=0, \tag{2}$$

$$G(y, x, t)=0. \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. (3) ifadesinde görüldüğü gibi diferensiyel cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. $y=y(t)$ ve $x=x(t)$ olmak üzere, y diferensiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (1) sistemi k tane denkleme sahip ve m tanesi diferensiyel denklem ise $(k-m)$ tanesi cebirsel denklemdir.

2.1 Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin İndeksi

İndeks kavramı, diferensiyel cebirsel denklemlerin davranışlarında ve sınıflandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. İndeks tanımını vermeden önce

$$x' = f(x, y, t) \tag{4}$$

$$0 = g(x, y, t) \tag{5}$$

ifadesini göz önüne alalım. Diferensiyel cebirsel denklemin bu şekilde yazılışına yarı – açık form denir. (5) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$x' = f(x, y, t) \tag{6}$$

$$g_x(x, y, t)x' + g_y(x, y, t)y' = -g_t(x, y, t) \tag{7}$$

sistemini elde edilir. Eğer g_y nonsingüler ise (6)-(7) sistemi adi diferensiyel denklem sistemine indirgenir ve bu durumda diferensiyel cebirsel denklemin indeksinin 1(bir) olduğunu söyleyebiliriz. Eğer (6)-(7) sistemi adi diferensiyel denklem sistemine dönüşmezse bazı matematiksel işlemler ve koordinatlar değişiklikleri yardımıyla adi diferensiyel denklem elde edilmeye çalışılır. İkinci durumda açık adi diferensiyel denklem elde edilebilinirse, (4)-(5) sisteminin indeksi 2(iki) dir denir. Eğer elde edilen yeni sistemde açık formada yazılmış adi diferensiyel denklem değilse işleme açık formda yazılmış adi diferensiyel elde edinceye kadar devam edilir. Elde edinceye kadar yapılan türev alma sayısına sistemin indeksi denir.

2.1.1 Tanım: (1) diferensiyel cebirsel denkleminin y' diferensiyelini oluşturabilmek için denkleminin hepsinin veya bir kısmının t ye bağlı minimum türevlenebilme sayısına (1) denklem sisteminin indeksi denir.

2.2 Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Cebirsel Denklemler

A ve B $m \times m$ tipinde iki matris olmak üzere,

$$Ax' + Bx = f \tag{8}$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklem sistemi olsun. λ kompleks parametre olmak üzere, $\lambda A + B$ matrisine matris kalemi denir. Burada, P ve Q $m \times m$ tipinde nonsingüler matrisler olmak üzere, $x = Qy$ dönüşümü yapılır ve (8) denkleminin her iki yanı P matrisi ile çarpılırsa,

$$PAQy' + PBQy = Pf \tag{9}$$

elde edilir. Böylece yeni matris kalemi $\lambda PAQ + PBQ$ olur. Şimdi burada $\lambda A + B$ nin P ve Q dönüşümü altında Kronecker kanonikal formu ile ilgileneceğiz. Çünkü ileriki çalışmalarımızda bu Kronecker kanonikal form oldukça çok karşımıza çıkacaktır. Eğer $\lambda A + B$ nın determinantı sıfırdan farklı ise, matris kalemi regülerdir.

2.2.1 Teorem: Eğer $\lambda A + B$ matris kalemi düzgün ise, o zaman $Ax' + Bx = f$ sistemi çözülebilirdir.

2.2.2 Teorem: $\lambda A + B$ kaleminin düzgün olduğunu kabul edelim. N nilpotentlik derecesi k olan nilpotent matris ($N^k = 0$ ve $N^{k-1} \neq 0$ ise N ye nilpotent matris ve k ya da nilpotentlik derecesi denir) ve I birim matris olmak üzere,

$$PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{10}$$

olacak şekilde P ve Q nonsingüler matrisleri vardır.

Burada $N = 0$ ise $k = 1$ dir. Ayrıca A nonsingüler ise $PAQ = I, PBQ = C, k = 0$ olarak alınabilir. $\det(\lambda A + B)$ sabit ise, (10) denklemi $PAQ = N, PBQ = I$ şeklinde basitleştirilebilir. N nin nilpotentlik derecesi $\lambda A + B$ kaleminin indeksi, o da diferensiyel cebirsel denklemin indeksidir.

Teorem 2.2.2 yi sağlayan P ve Q matrisleri için Teorem 2.2.2 (8) denklemine uygulanırsa, (8) denklemi (9) denklemine dönüşür. (9) denklemi (10) formunda yazılırsa,

$$y_1' + Cy_1 = f_1 \tag{11}$$

$$Ny_2' + y_2 = f_2 \tag{12}$$

sistemi elde edilir. (11) denklemi bir adi diferensiyel denklemdir ve herhangi bir f_1 ve başlangıç değeri için bir çözüm vardır. (12) denklemi,

$$(ND + I)y_2 = f_2 \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir ($D = d/dt$). Buradan $f_2^{(i)} = d^i f_2/dt^i$ ve $(ND)^k = 0$ olmak üzere (13) denklemi,

$$y_2 = (ND + I)^{-1} f_2 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i f_2^{(i)} \tag{14}$$

şeklinde çözülebilir. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazacak olursak,

$$y_2 = f_2 - Nf_2' + N^2 f_2'' - ...(-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k-1)} \tag{15}$$

denklemi elde edilir. Buradan açık formda yazılmış adi diferensiyel denklem elde etmek için (15) ifadesinin türevini alırsak,

$$y_2' = f_2' - Nf_2'' + ...(-1)^{k-1} N^{k-1} f_2^{(k)} \tag{16}$$

denklemi elde edilir. Buradan adi diferensiyel denklem elde edebilmek için sistemin k defa diferensiyelinin alınması gerektiği sonucuna varırız. Yani diferensiyel cebirsel denklemin indeksi k dır.

3. BİR BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM

Bu kısımda diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde kullanacağımız önemli tanımlar verilecektir.

3.1 Tanım : Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{17}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $y(x)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ ise T-fonksiyonu diye adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur.

3.2 Tanım : $Y(k)$ nın ters diferensiyel dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \tag{18}$$

şeklinde tanımlanır. (17) ve (18) denklemlerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{19}$$

elde edilebilir. (19) denklemlerinden de anlaşıldığı gibi diferensiyel dönüşüm düşüncesi Taylor seri açılımından türetilmiştir, fakat metot sembolik olarak türevleri hesaplamaz. Bununla birlikte, ilişkili türevler orijinal fonksiyonun dönüşüm denklemleriyle tanımlanmış iteratif bir yolla hesaplanır. Bu çalışmada, küçük harfle orijinal fonksiyon, büyük harfle dönüşüm fonksiyonu gösterilecektir. Şimdi bazı fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları için temel teoremleri verelim.

3.3 Teorem: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu, $F(k) = G(k) \pm H(k)$ şeklindedir.

3.4 Teorem: $f(x) = cg(x)$ fonksiyonu için dönüşüm fonksiyonu, $F(k) = cG(k)$ şeklindedir.

3.5 Teorem: Eğer $f(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$ şeklinde verilirse, dönüşüm fonksiyonu $F(k) = (k+1)G(k+1)$ olur.

3.6 Teorem: $f(x)=\dfrac{d^n g(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu $F(k)=(k+1)(k+2)...(k+n)G(k+n)$ şeklindedir.

3.7 Teorem: $f(x)=g(x).h(x)$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu $F(k)=\sum_{r=0}^{k} G(r)H(k-r)$ şeklindedir.

3.8 Teorem : $f(x)=x^n$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu, $\delta(k-n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$ için $F(k)=\delta(k-n)$ şeklindedir.

Reel uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu seri ile temsil edilir ve (18) denklemi

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k Y(k)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $y(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$ eşitliğinin ihmal edilecek kadar küçük olduğu görülür.

4. UYGULAMA

$f=\left(e^t,\cos t\right)^T$ sağ yan fonksiyonu ve $x_1(0)=1,\ x_2(0)=1$ başlangıç değerleri ile verilen

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x'+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x=f \tag{20}$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel cebirsel denklem sistemini göz önüne alalım. Sistemin tam çözümleri

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\cos t,\\ x_2(t)&=e^t+\sin t,\end{aligned} \tag{21}$$

olarak verilmiştir. $\lambda A+B$ matrisinin determinantına bakalım.

$$\det(\lambda A+B)=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \tag{22}$$

olduğundan, Teorem 2.2.1 dan verilen diferensiyel cebirsel denklem sistemi çözülebilirdir. Teorem 2.2.2 den

$$PAQ=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & N\end{bmatrix},\quad PBQ=\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} \tag{23}$$

olacak şekilde nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. Hatta, $\det(\lambda A+B)$ sabit olduğundan, $PAQ=N, PBQ=I$ alınabilir. Bu özelliklerden yararlanarak P ve Q matrislerini

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{24}$$

şeklinde seçebiliriz. Buradan,

$$PAQ=N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad PBQ=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{25}$$

olacaktır. N matrisinin nilpotentlik derecesi ($N^k=0$ eşitliğini sağlayan k sayısı) 2(iki) olduğundan, diferensiyel cebirsel denklemin indeksinin 2(iki) olduğu söylenebilir.

Şimdi verilen sistemin diferensiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla yaklaşık analitik çözümünü bulmaya çalışalım. (4.1) denklemi ile verilen,

$$\begin{aligned} x_2'(t)+x_1(t)&=e^t \\ x_2(t)&=\cos t \end{aligned} \tag{26}$$

sisteminin diferensiyel dönüşümü alınırsa,

$$(k+1)X_2(k+1)+X_1(k)=F_1(k) \tag{27}$$

$$X_2(k)=F_2(k) \tag{28}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $F_1(k)$ ve $F_2(k)$, sırasıyla, (26) denklemindeki sağ yan fonksiyonlarının Taylor serilerindeki terimlerinin katsayılarıdır. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Taylor serisi,

$$f_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},\quad f_2(t)=\sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}t^n}{n!} \tag{29}$$

şeklinde olacaktır. (29) ifadesinden $F_2(k)$ değerleri bilindiğinden, $x_2(t)$ fonksiyonun Taylor serisi elde edilebilir. Buradan

$$x_2(t)=\sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}t^n}{n!} \tag{30}$$

yazılabilir. (27) denklemi $X_1(k)=F_1(k)-(k+1)X_2(k+1)$ (31)

şeklinde düzenlenebilir. (31) denkleminde $k=1$ yazılırsa,

$$X_1(1)=F_1(1)-2X_2(2)=2 \tag{32}$$

bulunur. (31) denkleminde $k=2$ yazılırsa,

$$X_1(2)=F_1(2)-3X_2(3)=\frac{1}{2} \tag{33}$$

bulunur. (31) denkleminde $k=3$ yazılırsa,

$$X_1(3)=F_1(3)-4X_2(4)=0 \tag{34}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ katsayıları

$$\begin{aligned} &X_1(0)=1, X_1(1)=2, X_1(2)=\frac{1}{2}, X_1(3)=0, X_1(4)=\frac{1}{24}, \\ &X_1(5)=\frac{1}{60}, X_1(6)=\frac{1}{720} X_1(7)=0, X_1(8)=\frac{1}{40320},\ldots. \\ &X_2(0)=1, X_2(1)=0, X_2(2)=-\frac{1}{2}, X_2(3)=0, X_2(4)=\frac{1}{24}, \\ &X_2(5)=0, X_2(6)=-\frac{1}{720} X_2(7)=0, X_2(8)=\frac{1}{40320},\ldots. \end{aligned} \tag{35}$$

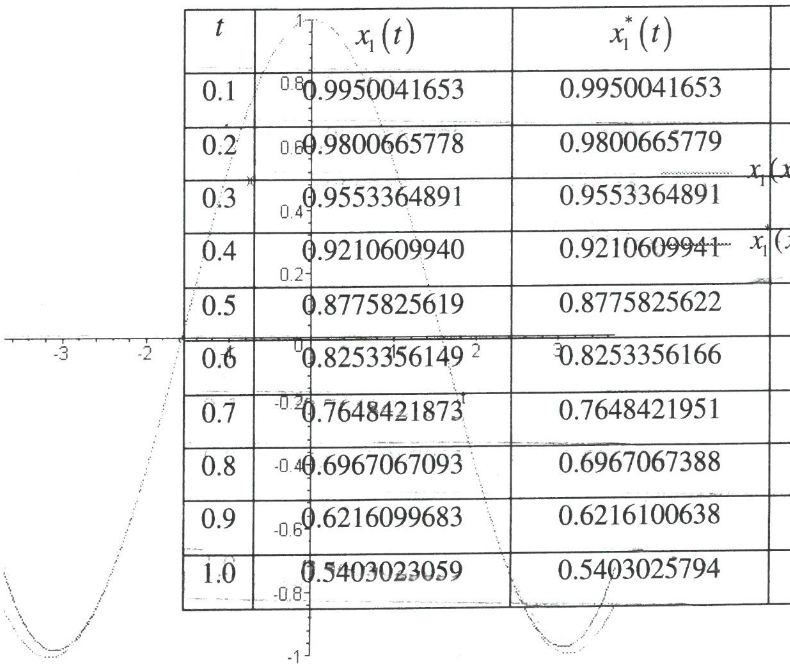
olarak bulunur. Buradan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin yaklaşık analitik çözümleri

$$\begin{aligned} x_1(t)&=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{720}t^6+\frac{1}{40320}t^8-\ldots \\ x_2(t)&=1+2t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{60}t^5+\frac{1}{720}t^6+\frac{1}{40320}t^8+\ldots \end{aligned} \tag{36}$$

şeklinde elde edilir. Aşağıda tam çözümle yaklaşık analitik çözümler tablo ve şekil üzerinde karşılaştırılmıştır. ($x(t)$ ile tam çözüm, $x^*(t)$ ile de yaklaşık analitik çözüm gösterilmiştir.)

Tablo 1. (20) denklem sistemindeki $x_1(t)$ ile $x_1^*(t)$ nin karşılaştırılması.

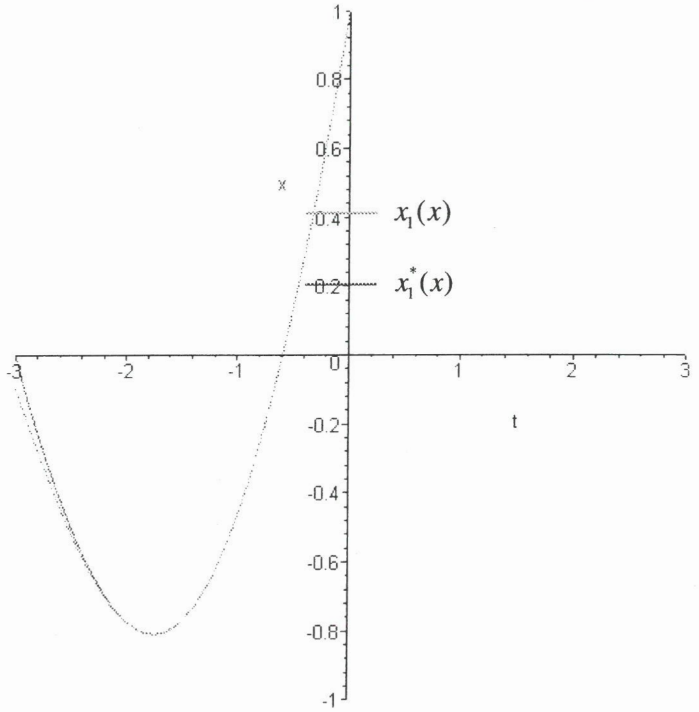
t	$x_1(t)$	$x_1^*(t)$	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$
0.1	0.9950041653	0.9950041653	0
0.2	0.9800665778	0.9800665779	0.0000000001
0.3	0.9553364891	0.9553364891	0
0.4	0.9210609940	0.9210609941	0.0000000001
0.5	0.8775825619	0.8775825622	0.0000000003
0.6	0.8253356149	0.8253356166	0.0000000017
0.7	0.7648421873	0.7648421951	0.0000000078
0.8	0.6967067093	0.6967067388	0.0000000395
0.9	0.6216099683	0.6216100638	0.0000000955
1.0	0.5403023059	0.5403025794	0.0000002735



Şekil 1. (20) denklem sistemindeki $x_1(t)$ ve $x_1^*(t)$ in grafiği

Tablo 2. (20) denklem sistemindeki $x_2(t)$ ile $x_2^*(t)$ nin karşılaştırılması.

t	$x_2(t)$	$x_2^*(t)$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$
0.1	1.2050043347	1.2050043348	0.0000000001
0.2	1.4200720890	1.4200720890	0
0.3	1.6453790143	1.6453790141	0.0000000002
0.4	1.8812430399	1.8812430386	0.0000000013
0.5	2.1281468093	2.1281467983	0.0000000110
0.6	2.3867612738	2.3867612166	0.0000000572
0.7	2.6579703947	2.6579701646	0.0000002301
0.8	2.9428970194	2.9428962499	0.0000007695
0.9	3.2429300208	3.2429277888	0.0000022320
1.0	3.5597528133	3.5597470238	0.0000047895



Şekil 2. (20) denklem sistemindeki $x_2(t)$ ve $x_2^*(t)$ in grafiği

5. SONUÇ

Bu çalışmada sunulan differensiyel dönüşüm yöntemi, diferensiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot test problemlerine uygulandı.

Problemlerde tam çözümlerle, diferensiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen yaklaşık analitik çözümler tablolar ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle diferensiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen çözümlerin uyumlu olduğu görüldü.

Kaynaklar

[1]. Arikoglu, A. ve Ozkol, I., "Solution of differential–difference equations by using differential transform method", Applied Mathematics and Computation, 181:153-162 (2006).

[2]. Ascher, U.M. ve Petzold, L.R , "Projected implicit Runge–Kutta methods for differential-algebraic equations", SIAM, J. Numer. Anal., 28:1097–1120 (1991).

[3]. Ascher, U.M. ve Spiter, R.J., "Collocation software for boundary value differential-algebraic equations", SIAM, J. Sci. Comput., 15:938–952 (1994).

[4]. Ascher, U.M. ve Petzold, L.R., "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations",Philadelphia, PA (1998).

[5]. Ascher, U.M. ve Petzold, L.R., "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations",Philadelphia, PA (1998).

[6]. Ayaz, F., "On the two-dimensional differential transform method", Applied Mathematics and Computation, 143:361-374 (2003).

[7]. Ayaz, F., "Applications of differential transform method to differential-algebraic equations", Applied Mathematics and Computation, 152:649-657 (2004).

[8]. Brenan, K.E., Campbell, S.L. ve Petzold, L.R., "Numerical Solution of Initial-Value,Problems in Differential-Algebraic Equations" , Elsevier, New York (1989).

[9]. Campbell, S.L. ve Gear, C.W., "The index of general nonlinear DAEs", Numer. Math. 72:173-196 (1995).

[10]. Celik, E. ve Bayram, M., "Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade´ series", Appl. Math. Comput., 137:57–65 (2003).

[11]. Celik, E. ve Bayram, M., "On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade´ series", Appl. Math. Comput. 137:151–160 (2003).

[12]. Celik, E. ve Bayram, M., "Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications", Appl. Math. Comput, 154:405–413 (2004).

[13]. Chen, C.K. ve Ho, S.H., "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method", Applied Mathematics and Computation,106:171-179 (1999).

[14]. Erturk, V.S., Momani, S. ve Odibat, Z., "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, In Pres (2007).

[15]. Gear, C.W. ve Petzold, L.R.,"ODE systems for the solution of differential–algebraic systems", SIAM, J. Numer. Anal., 21:716–728 (1984).

[16]. Guzel, N. ve Bayram, M., "On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3", Applied Mathematics and Computations, 175:1320-1331 (2006).

[17]. Hairer, E., Lubich, C.H. ve Roche, M., "The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1409, Springer, Berlin (1989).

[18]. Hassan, I.H., "On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation", Applied Mathematics and Computation, 127:1-22 (2002).

[19]. Hosseini, M.M., "An index reduction method for linear Hessenberg systems", Applied Mathematics and Computation, 171:596-603 (2005).

[20]. Hosseini, M.M., "Adomian decomposition method for solution of differential algebraic equations", Journal Computational and Applied Mathematics, 197:495-501 (2006).

[21]. Hosseini, M.M., "Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations", Applied Mathematics and Computation, 181:1737-1744 (2006).

[22]. Jang, M.J., Chen, C.L. ve Liy, L.C., "On solving the initial-value problems using the differential transformation method", Applied Mathematics and Computation, 115:145-160 (2000).

[23]. Jang, M.J., Chen,C.L. ve Liu,Y.C., "Two-dimensional differential transform for partial differential equations", Applied Mathematics and Computation, 121:261-270 (2001).

[24]. Köksal, M. ve Herdem, S., "Analysis of nonlinear circuits by using differential Taylor transform", Computers&Electrical Engineering, 28:513-525 (2002).

[25]. Liu, H. Ve Song, Y., "Differential transform method applied to high index differential-algebraic equations", Applied Mathematics and Computation, 184:748-753 (2007).

[26]. Marz, R., "The index of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term",Results in Mathematics, 42:308–338 (2003).

[27]. Marz, R., "Solvability of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term",Results in Mathematics, 45:88–105 (2004).

[28]. Petzold, L.R., "Differential-algebraic equations are not ODEs", SIAM, J. Sci. Statist. Comput, 3:367–384 (1982).

[29]. Petzold, L.R., "Numerical solution of differential-algebraic equations, Theory and numerics of ordinary and partial differential equations", Clarendon Press, Oxford (1995).

[30]. Yang, X., Liu, Y. ve Bai, S., "A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform", Applied Mathematics and Computation, 173:792-802 (2006).

[31]. Zhou, J.K., "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan", China (1986).