

f -Halkalarında Latis ve Halka Homomorfizmaları Arasındaki İlişki

Ruşen YILMAZ ^{1*} 

¹ Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Rize, Türkiye

Sorumlu Yazar/Corresponding Author
E-mail: rusen.yilmaz@erdogan.edu.tr

Araştırma Makalesi/Research Article
Geliş Tarihi/Received: 16.12.2024
Kabul Tarihi/Accepted: 25.02.2025

Öz

Bu çalışmada, f -halkalarının temel yapısal özellikleri ve bu yapılarda tanımlı dönüşümler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Çalışma, özellikle bir f -halkası üzerinde tanımlı f -latis ve halka homomorfizmaları arasındaki ilişkileri derinlemesine araştırmayı hedeflemiştir. Bu bağlamda, yarı-asal f -cebirleri için literatürde mevcut olan bir sonuç daha genel bir yapıya uygulanabilir hale getirilmiştir. Çalışmanın ana amacı, birim elemana sahip bir f -halkasından bir Arşimet f -halkasına tanımlı bir f -latis homomorfizmasının, aynı zamanda bir halka homomorfizması olabilmesi için gerekli olan kriteri ortaya koymaktır. Önerilen bu kriter hem f -latis hem de halka teorisinde yer alan problemlere yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Elde edilen sonuçlar, bu iki yapı arasındaki bağlantıların daha iyi anlaşılmasını sağlamanın yanı sıra, bu yapıların homomorfizmalarıyla ilgili özelliklerinin daha geniş bir çerçevede ele alınmasına olanak tanımaktadır. Çalışma ayrıca, ilgili alanlarda yapılacak teorik ve uygulamalı araştırmalar için bir temel oluşturacak şekilde tasarlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: f -halkası, f -latis homomorfizması, halka homomorfizması, orthosimetrik dönüşüm

Relation Between Lattice and Ring Homomorphisms On f -Rings

Abstract

In this study, the basic structural properties of lattice rings and the maps defined in these structures are investigated in detail. In particular, the study aims to investigate in depth the relationships between lattice and ring homomorphisms defined on an f -ring. In this context, a result available in the literature for semi-prime f -algebras is made applicable to a more general structure. The main purpose of the study is to reveal the criterion required for a lattice homomorphism defined from an f -ring with identity to an Archimedean f -ring to be a ring homomorphism at the same time. This proposed criterion provides a new perspective on the problems in both lattice and ring theory. The obtained results provide a better understanding of the connections between these two structures, as well as allowing the properties of these structures related to homomorphisms to be addressed in a broader framework. The study is also designed to form a basis for theoretical and applied research in related areas.

Keywords: f -ring, lattice homomorphism, ring homomorphism, orthosymmetric map

Cite as;

Yılmaz, R. (2025). f -halkalarında f -latis ve halka homomorfizmaları arasındaki ilişki. *Recep Tayyip Erdogan University Journal of Science and Engineering*, 6(1), 175-182. Doi: 10.53501/rteufemud.1602467

1. Giriş

1984 yılında Huijsmans ve De Pagter (1984) tarafından birim elemana sahip bir Arşimet f -halkasından bir Arşimet yarı-asal f -cebirine tanımlı bir latis homomorfizmasının bir cebir homomorfizması olması için bir kriter verilmiştir. Ben Amor ve Boulablier'in 2013 yılında basılan "Almost f -maps and almost f -rings" (Ben Amor ve Boulablier, 2013) çalışmasında bu sonucun f -halkası üzerine genellendiğini görüyoruz. Bu çalışmanın amacı latis halkalarının ve bunlar üzerinde tanımlı bazı dönüşümlerin temel özellikleri incelenerek bir f -halkası üzerinde tanımlı latis ve halka homomorfizmaları arasındaki bağıntıyı araştırmaktır. Bunun için öncelikle latis sıralı halkaların yapısını teşkil eden latis sıralı grupların tanımı ve temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra latis sıralı halkaları ve bunların bazı önemli sınıflarının tanımı ve temel özellikleri ile bunlar üzerinde tanımlı çeşitli dönüşümler açıklanmıştır. Son olarak birim elemana sahip bir f -halkasından bir Arşimet f -halkasına tanımlı bir latis homomorfizmasının bir halka homomorfizması olması için bir kriter verilmiştir.

Bu çalışmada (Anderson ve Feil, 1988; Steinberg, 2010) kitapları temel kaynak olarak alınmaktadır.

2. Temel Kavramlar ve Semboller

$\forall a, b \in G$ için $a \wedge b, a \vee b \in G$ özelliğini sağlayan bir kısmi sıralı G grubuna bir *latis sıralı grup* (l -grup) denir. G bir l -grubu ve $a \in G$ olmak üzere a nın pozitif ve negatif kısımları ile modülüsü, sırasıyla, $a^+ := a \vee 0$, $a^- := (-a) \vee 0$ ve $|a| := a \vee (-a)$ olarak tanımlanır. Açıkça bu elemanlar l -grubu G nin pozitif elemanlarıdır. Bir l -grubu G nin pozitif elemanlarının kümesi G^+ (G nin

pozitif konu) şeklinde ifade edilir. G bir l -grubu ve $a, b \in G^+$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $na \leq b \Rightarrow a = 0$ sağlanıyorsa G ye bir *Arşimet* (Archimedean veya *Arşimet özelliğine sahip*) l -grubu denir. Her Arşimet l -grubu değişmelidir (Anderson ve Feil, 1988).

G bir l -grubu ve F, G nin alt grubu olsun. Eğer F, G nin bir alt latisi ise F ye G nin bir *latis alt grubu* (l -alt grubu) denir. F bir G l - grubunun bir alt grubu olsun. F, G nin bir l -alt grubudur $\Leftrightarrow \forall a \in F$ için $a^+ \in F$ (Steinberg, 2010). F, G nin bir l -alt grubu $a \in G$ ve $b \in F$ olmak üzere $0 \leq a \leq b \Rightarrow a \in F$ sağlanıyorsa F ye G nin bir *sıra-ideali* denir. F, G nin bir sıra-ideali olmak üzere $\forall D \subseteq F$ ve $\sup D = a \in G \Rightarrow a \in F$ sağlanıyorsa F ye G nin bir *bandı* denir.

G bir l -grubu ve $\emptyset \neq F \subset G$ olsun. $F^d := \{a \in G : \forall b \in F \text{ için } |a| \wedge |b| = 0\}$ kümesine F kümesinin *dik tümleyeni* ve F^d nin *dik tümleyeni* $(F^d)^d = F^{dd}$ olarak yazılır. Özel olarak $F = \{a\}$ ise $\{a\}^d = a^d$ şeklinde ifade edilir. Burada F^d, G l - grubunun bir bandı ve özellikle F^{dd}, F yi ihtiva eden bir banddır (Steinberg, 2010).

G ve H iki l -grubu olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $T(a \vee b) = T(a) \vee T(b)$ ve $T(a \wedge b) = T(a) \wedge T(b)$ özelliklerini sağlayan $T: G \rightarrow H$ grup homomorfizması (yani, $\forall a, b \in G$ için $T(a + b) = T(a) + T(b)$) bir *latis homomorfizması* (l -homomorfizması) olarak adlandırılır. $T: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması bir l -homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow \forall a, b \in G$ için $a \wedge b = 0 \Rightarrow T(a) \wedge T(b) = 0$ (Steinberg, 2010).

F, G iki l -grubu ve $T: F \rightarrow G$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü F deki her sıra-

sınırlı kümeyi G deki bir sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T ye bir *sıra-sınırlı dönüşüm* ve $\forall B \subset G$ bandı için $T(B) \subset B$ ise $T: G \rightarrow G$ dönüşümüne bir *band koruyan dönüşüm* denir. $T: G \rightarrow G$ bir sıra-sınırlı dönüşüm olmak üzere $|a| \wedge |b| = 0 \Rightarrow |T(a)| \wedge |b| = 0$ sağlanıyorsa ise T ye bir *orthomorfizma* denir. Başka bir ifadeyle, orthomorfizmalar band koruyan sıra-sınırlı dönüşümlerdir.

3. Latis Sıralı Halkalar (l -Halkaları)

Tanım 3.1. “ $\leq$ ” bir H halkası üzerinde bir kısmi sırama bağıntısı olmak üzere

i) $(H, \leq)$ bir latis; $\forall a, b \in H$ için $a \wedge b, a \vee b \in H$

ii) $a, b \in H$ için $a \leq b \Rightarrow \forall c \in H$ için $a + c \leq b + c$

iii) $a, b \in H^+$ için $ab \in H^+$

özelliklerini sağlayan H ye bir latis *sıralı halka* (veya kısaca *l-halkası*) denir.

Herhangi bir l -halkası aynı zamanda bir toplamsal l -grubu olduğundan l -halkasına ait herhangi bir elemanın mutlak d eğeri, pozitif ve negatif kısımları tanımlanır.

Teorem 3.2. H bir l -halkasında ve $a, b, c \in H$ olsun.

i) $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ ve $a^+ \wedge a^- = 0$.

ii) $|a \vee c - b \vee c| \leq |a - b|$ ve $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b|$ (Birkhoff Eşitsizlikleri).

iii) $\forall a, b, c \in H^+$ için $a \wedge (b + c) \leq (a \wedge b) + (a \wedge c)$ ve

$$(a \wedge b) + c \leq (a \wedge b) + (a \wedge c).$$

iv) $a \leq b \Rightarrow \forall c \in H^+$ için $ca \leq cb$ ve $ac \leq bc$. Özel olarak, $\forall c \in H^+$ için $c^2 \in H^+$.

v) $\forall c \in H^+$ için $(a \vee b)c \geq ac \vee bc$, $c(a \vee b) \geq ca \vee cb$ ve

$c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$, $(a \wedge b)c \leq ac \wedge bc$ (Bernau ve Huijsmans, 1990; Steinberg, 2010).

Tanım 3.3. Herhangi bir H l -halkasında $a \wedge b = 0$ olsun. $\forall c \in H^+$ için

i) $ca \wedge b = 0 = a \wedge cb$ ise H ye bir f -halkası denir.

ii) $ca \wedge cb = 0 = ac \wedge bc$ ise H ye bir d -halkası denir.

iii) $ab = 0$ ise H ye bir *hemen hemen f -halkası* denir.

Teorem 3.4. i) Her f -halkası bir hemen hemen f -halkasıdır.

ii) Her f -halkası bir d -halkasıdır.

İspat:

H bir f -halkası, $a, b \in R$ ve $a \wedge b = 0$ olsun.

i) $a \wedge b = 0 \Rightarrow a, b \in H^+$ ve $b \wedge a = a \wedge b = 0$ olur. H bir f -halkası olduğundan $b \wedge ab = 0$ ve, bir kez daha f -halka tanımı uygulanırsa, $ab \wedge ab = 0$. Buradan $ab = 0$ olup H bir hemen hemen f -halkasıdır.

ii) Tanımdan $a \wedge b = 0 \Rightarrow \forall c \in H^+$ için $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ ve tekrar f -halka tanımı kullanılırsa $ca \wedge cb = ac \wedge ab = 0$, yani H bir d -halkasıdır.

Uyarı: Genel olarak, hemen hemen f -halkası ve d -halkası arasında bir bağıntı yoktur (Bernau ve Huijsmans, 1990; Yılmaz, 2001).

Teorem 3.5. H bir f -halkası ve $a, b \in H$ olsun.

i) $\forall c \in H^+$ için $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$, $c(a \vee b) = ca \vee cb$ ve

$$(a \wedge b)cz = ac \wedge bc, (a \vee b)c = ac \vee bc.$$

ii) $|ab| = |a||b|$, $(ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^-$ ve $(ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$. Özel olarak, $\forall a \in H$ için $a^2 \in H^+$.

iii) $|a| \wedge |b| = 0$ ise $ab = 0$. Özel olarak, $a^+b^- = a^-b^+ = 0$.

iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall a, b \in H^+$ için $nab - (nab \wedge n^2b) \leq a^2b$. Özel olarak, $e \in H$ birim elemanlı ise $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall a, b \in H^+$ için $na - (na \wedge n^2e) \leq a^2$.

İspat:

$$iv) \quad 0 = (nb \wedge ab) - (nb \wedge ab) = (nb \wedge ab) - (ab \wedge nb)$$

$$= (nb - ab \wedge nb) \wedge (ab - ab \wedge nb).$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall a \in H^+ \text{ için } (nab - a^2b \wedge nab) \wedge (nab - nab \wedge n^2b) = 0.$$

$$\Rightarrow nab - ((a^2b \wedge nab) \vee (nab \wedge n^2b)) = 0$$

$$\Rightarrow nab = (a^2b \wedge nab) \vee (nab \wedge n^2b) \leq a^2b \vee (nab \wedge n^2b) \leq a^2b + (nab \wedge n^2b).$$

$$\Rightarrow nab - (nab \wedge n^2b) \leq a^2b.$$

Burada, özel olarak, $b = e$ olarak alınırsa $na - (na \wedge n^2e) \leq a^2$ elde edilir.

Benzer şekilde yukarıdaki özellikler gösterilebilir (Bernau ve Huijsmans, 1990; Steinberg, 2010).

Ayrıca, 1956 yılında Birkhoff ve Pierce tarafından, aşağıdaki eşitsizlikler yardımıyla, her Arşimet f -halkası hem değişmeli ve hem de birleşmeli olduğu ispatlanmıştır. H bir Arşimet f -halkası olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall a, b, c \in H^+$ için

$$n|(ab - ba)| \leq a^2 + b^2,$$

$$n|(ab)c - a(bc)| \leq |ab(a + b + ab) + a(a + a^2 + ba) + cb(c + b + cb)$$

$$+ c(c + c^2 + bc)$$

(Birkhoff ve Pierce, 1956). Daha genel olarak;

Teorem 3.6. Her Arşimet hemen hemen f -halkası değişmelidir. Özellikle, her Arşimet f -halkası değişmelidir (Bernau ve Huijsmans, 1990; Steinberg, 2010).

Yukarıda ifade edildiği üzere her Arşimet f -halkası birleşmeli olmasına rağmen Arşimet hemen hemen f -halkaları için bu durum genel olarak doğru değildir. Başka bir ifadeyle, her Arşimet hemen hemen f -halkası değişmeli fakat birleşmeli değildir (Bernau ve Huijsmans, 1990; Yılmaz, 2001).

Tanım 3.7. H bir l -halkası ve $a \in H$ olsun. $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa ise a ya nilpotent eleman ve $\exists n \in \mathbb{N}: a^n = 0 \Rightarrow a = 0$ ise H ye yarı-asal denir.

Teorem 3.8. Arşimet yarı-asal (birleşmeli) l -halkalarında “ f -halkası”, “hemen hemen f -halkası” ve “ d -halkası” sınıfları denktir. Özellikle, her birim elemana sahip halka yarı-asal olduğundan, bu sonuç birim elemana sahip (birleşmeli) l -halkaları için de sağlanır (Bernau ve Huijsmans, 1990; Yılmaz, 2001).

4. Latis ve Halka Homomorfizması Arasındaki İlişki

Bu bölümde yarı-asal f -cebiri için verilen bir sonucun genel durumu olarak birim elemanlı bir f -halkasından bir Arşimet f -halkasına tanımlı bir l -homomorfizmasının bir h -homomorfizması olma kriteri incelenmiştir.

Tanım 4.1. F, G ve H $\mathbb{Z}$ -modül l -grupları olsun.

i) $\forall a_1, a_2 \in F$, ve $\forall b \in G$ için $T(a_1 + a_2, b) = T(a_1, b) + T(a_2, b)$

ii) $\forall a \in F$ ve $\forall b_1, b_2 \in G$ için $T(a, b_1 + b_2) = T(a, b_1) + T(a, b_2)$

iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall (a, b) \in F \times G$ için $T(na, b) = nT(a, b) = T(a, nb)$

özelliklerini sağlayan bir $T: F \times G \rightarrow H$ dönüşümüne bir *bilineer dönüşüm* denir.

iv) $T: F \times G \rightarrow H$ bir bilinear dönüşüm olmak üzere $\forall (a, b) \in (F \times G)^+$ için $T(a, b) \in H^+$ ise T ye bir *pozitif dönüşüm* denir.

v) $F = G$ olmak üzere $\forall a, b \in F$ için $T(a, b) = T(b, a)$ ise $T: G \times G \rightarrow H$ bilinear dönüşümüne bir *simetrik dönüşüm* denir.

vi) $a, b \in G$ olmak üzere $a \wedge b = 0 \Rightarrow T(a, b) = 0$ özelliğini sağlayan bir $T: G \times G \rightarrow H$ pozitif bilinear dönüşümüne bir *orthosimetrik dönüşüm* denir.

Teorem 4.2. G bir değişmeli $\mathbb{Z}$ -modül l -grup ve H bir Arşimet $\mathbb{Z}$ -modül l -grup ise her $T: G \times G \rightarrow H$ orthosimetrik dönüşümü simetriktir (Bernau ve Huijsmans, 1990; Steinberg, 2010).

Özel olarak, her Arşimet hemen hemen f -halkası değişmelidir. Gerçekten; G bir Arşimet hemen hemen f -halkası olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $T(a, b) = ab$ olarak tanımlanan $T: G \times G \rightarrow H$ dönüşümü simetrik olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla $\forall a, b \in G$ için $ab = T(a, b) = T(b, a) = ba$ sağlanır.

Tanım 4.3. G ve H iki halka olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$T(a + b) = T(a) + T(b)$$

$$T(ab) = T(a)T(b)$$

özellikleri sağlanıyorsa $T: G \rightarrow H$ dönüşümüne bir *halka homomorfizması* denir ve kısaca, *h-homomorfizması* olarak yazılır.

Bu çalışmanın amacı, aşağıdaki teoremden birim elemana sahip bir f -halkasından bir Arşimet f -halkasına tanımlı bir l -homomorfizmasının bir halka homomorfizma olma kriteri verilmiştir (Ben Amor ve Boulablier, 2013).

Uyarı 4.4. Genel olarak, bir l -homomorfizmasının bir halka homomorfizması olması gerekmez. Örneğin; $\forall a \in \mathbb{R}$ için $T(a) = 2 \cdot a$ olarak tanımlanan $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü açıkça bir l -homomorfizması fakat bir h -homomorfizması değildir. Çünkü

$$T(1 \cdot 1) = T(1) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 4 = 2 \cdot 2 = T(1) \cdot T(1).$$

Bu çalışmada, bir f -halkasında tanımlı bir l -homomorfizmasının aynı zamanda bir h -homomorfizması olması için gerekli koşullar araştırılmış ve aşağıdaki sonuca ulaşılmıştır.

Teorem 4.5. G , e birim elemana sahip bir $\mathbb{Z}$ -modül f -halkası, H bir Arşimet $\mathbb{Z}$ -modül f -halkası ve $T: G \rightarrow H$ bir l -homomorfizması olsun. T bir h -homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow (T(e))^2 = T(e)$ (yani, $T(e)$ H nin bir idempotent elemanıdır).

İspat:

$\Rightarrow$; T bir h -homomorfizması ve $e \in G$ nin birim elemanı ise $(T(e))^2 = T(e)T(e) = T(ee) = T(e)$.

$\Leftarrow$; Öncelikle $a \in G^+$ olmak üzere $\forall b, c \in G$ için $B(b, c) = T(c)T(ab)$ şeklinde tanımlanan $B: G \times G \rightarrow H$ dönüşümü bilineerdir. Gerçekten; $\forall b_1, b_2, c, b, c_1, c_2 \in R$ için ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için, T nin lineerliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B(b_1 + b_2, c) &= T(c)T(a(b_1 + b_2)) \\
&= T(c)T(ab_1 + ab_2) \\
&= T(c)(T(ab_1) + T(ab_2)) \\
&= T(c)T(ab_1) \\
&\quad + T(c)T(ab_2) \\
&= T(b_1, c) + T(b_2, c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(b, c_1 + c_2) &= T(c_1 + c_2)T(ab) \\
&= (T(c_1) + T(c_2))T(ab) \\
&= T(c_1)T(ab) \\
&\quad + T(c_2)T(ab) \\
&= T(b, c_1) + T(b, c_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(nb, c) &= T(c)T(a(nb)) \\
&= T(c)T((n(ab))) \\
&= T(c)(nT(ab)) \\
&= n(T(c)T(ab)) \\
&= nB(b, c)
\end{aligned}$$

$$= n(T(c)T(ab)) = (nT(c))T(ab)$$

$$= T(nc)T(ab) = T(b, nc).$$

Diğer taraftan, T pozitif olduğundan, $\forall b, c \in G$ için $B(b, c) = T(c)T(ab) \in S^+$

olup B pozitiftir. Üstelik G de $c \wedge b = 0$ ise $\forall a \in G^+$ için $c \wedge (ab) = 0$ ve T bir l -homomorfizması olduğundan $T(c) \wedge T(ab) = 0$. Bu nedenle

$$B(b, c) = T(c)T(ab) = 0,$$

yani B bir orthosimetrik dönüşüm ve dolayısıyla simetriktir (Teorem 4.2.). O halde $\forall b, c \in G$ için

$$T(c)T(ab) = B(b, c) = B(c, b) = T(b)T(ac).$$

Bu eşitlikler $\forall a \in G$ için sağlandığından $\forall a, b, c \in G$ için

$$T(c)T(ab) = T(b)T(ac) = T(ac)T(b).$$

Özel olarak $c = e$ alınırsa, $\forall a, b \in G$ için

$$T(e)T(ab) = T(a)T(b) \quad (1)$$

Şimdi $\forall a \in H$ için $\pi(a) = T(e)a$ olarak tanımlanan $\pi : H \rightarrow H$ dönüşümü, açıkça, bir orthomorfizmadır. $T(e)^{dd}$ H nin bir bandı olduğundan π H deki bandları korur. Dolayısıyla $\pi, T(e)^{dd}$ nin orthomorfizması olarak göz önüne alınabilir ve hipotezden

$$\pi(T(e)) = T(e)T(e) = (T(e))^2 = T(e),$$

yani $\pi(T(e)) = T(e)$

olduğundan $\pi, T(e)^{dd}$ nin birim elemanıdır. O halde $\forall a \in T(e)^{dd}$ için

$$T(e)a = a. \quad (2)$$

Şimdi $a \in G^+$ ve $b \in (T(e)^d)^+$ olsun. Buradan $b \wedge T(e) = 0$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b \wedge nT(e) = 0$ ve dolayısıyla $b \wedge nT(e) \wedge T(a) = 0$. l -halka özelliklerinden (3.2. Teorem ii.)

$$\begin{aligned}
0 \leq n(b \wedge T(a)) &= n(b \wedge T(a) - b \wedge \\
&\quad (nT(e) \wedge T(a))) \\
&\leq n(T(a) - (nT(e) \wedge T(a))).
\end{aligned}$$

Hipotezden, T bir l -homomorfizması ve dolayısıyla pozitif olduğundan,

$$T(na - n^2e \wedge na) \leq T(a^2)$$

çünkü $na - (na \wedge n^2e) \leq a^2$ (Teorem 3.5. iv)). Bu yüzden

$$0 \leq n(b \wedge T(a)) \leq nT(a) - n(nT(e) \wedge T(a)) = T(na - n^2e \wedge na) \leq T(a^2),$$

yani $0 \leq n(b \wedge T(a)) \leq T(a^2)$. Fakat H Arşimet özelliğine sahip olduğundan $b \wedge T(a) = 0$ olur ki bu $T(a) \in T(e)^{dd}$ olması demektir. (2)'den $\forall a \in R$ için $T(e)T(a) = T(a)$ ve (1)'den $\forall a, b \in R$ için

$$T(ab) = T(a)T(b) \quad (3)$$

elde edilir. Diğer taraftan, hipotezden, T bir l -homomorfizması olduğundan T aynı zamanda bir grup homomorfizmasıdır, yani

$$\forall a, b \in G \text{ için } T(a + b) = T(a) + T(b). \quad (4)$$

Sonuç olarak, (3) ve (4)'den T bir h -homomorfizmasıdır.

5. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada l -halkalarının ve bunlar üzerinde tanımlı bazı dönüşümlerin temel özellikleri verilmiş ve bir f -halkası üzerinde tanımlı latis ve halka homomorfizmaları arasındaki bağıntı incelenerek “ G e birim elemanlı bir hemen hemen f -halkası, H bir Arşimet f -halkası ve $T: G \rightarrow H$ bir l -homomorfizması olmak üzere T bir h -homomorfizmasıdır $\Leftrightarrow (T(e))^2 = T(e)$ ” sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada değişmeli birim elemanlı l -halkaları göz önüne alındığından değişmeli veya birim elemana sahip olmayan l -halkaları üzerinde tanımlı homomorfizmaların durumları araştırılabilir. Bu durumda, özellikle, yukarıda (3.3. Tanım) tanımlanan l -halka sınıfları denk olmayacağından, örneğin hemen hemen f -halkaları veya d -halkaları üzerinde tanımlı homomorfizmalar arasındaki ilişki açık bir problem teşkil eder. $\mathbb{Z}$ -modül f -halkaları üzerinde yapılan bu incelemeler ve elde edilen sonuçlar herhangi bir l -cebiri için de araştırılabilir. $\forall a \in H^+$ ve $\forall r \in \mathbb{R}^+$ için $ra \in H^+$ özelliğini sağlayan bir H l -halkası aynı zamanda bir cebiri ise H ye bir latis sıralı cebiri (l -cebiri) denir. Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_1, \dots, G_n$ birer l -halkası olmak üzere $G_1 \times \dots \times G_n$ l -halkası üzerinde tanımlı latis ve halka homomorfizmaları araştırılabilir.

Yazar Katkısı

Yılmaz, R: Fikir ve kavram, Literatür taraması, İnceleme ve düzenleme, Yazım.

Finansman Beyanı

Bu araştırma herhangi bir fon kuruluşundan, ticari veya kar amacı gütmeyen sektörlerden özel bir hibe almamıştır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Etik Standartlar

Bu çalışma için Etik Kurul Kararı gerekmemektedir.

Kaynaklar

- Anderson, M. and Feil, T. (1988). Lattice-Ordered Groups: An Introduction, D. Reidel Publishing Company, ISBN: 978-90-277-2643-8, Dordrecht, Holland.
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-2871-8>
- Ben Amor, M.A. and Boulabier, K. (2013). Almost f -maps and almost f -rings. *Algebra Universalis*, 69(1), 93-99.
<https://doi.org/10.1007/s00012-012-0212-1>
- Bernau, S.J. and Huijsmans, C.B. (1990). Almost f -algebras and d -algebras. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 107(2), 287-308.
<https://doi.org/10.1017/S0305004100068560>
- Birkhoff, G. and Pierce, R.S. (1956). Lattice-Ordered Rings. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 28, 41-69.
- Huijsmans, C.B., and De Pagter, B. (1984). Subalgebras and Riesz Subspaces of an f -Algebra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1), 161-174.
<https://doi.org/10.1112/plms/s3-48.1.161>

- Steinberg, S. (2010). Lattice-Ordered Rings and Modules. Springer, Dordrecht.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1721-8>
- Yılmaz, R. (2001). On Lattice Ordered Algebras, PhD Thesis, University of Wales, Aberystwyth, Birleşik Krallık.