Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı: 6 Ekim 2004

İRTİBATLI LIE GRUPLARININ ESAS GRUPLARININ DEMETİ ÜZERİNE

M. ÇİTİL

Özet

Çalışmamızda ilk olarak, irtibatlı bir Lie grubu üzerinde esas grupların demeti bilinen tekniklerle oluşturulmuştur. Daha sonra elde edilen demet, kesitleri ve sapları bakımından incelenerek bu demetin her bir global kesitinin bir Lie grubu olduğu gösterilmiştir.

1. Giriş

İlk olarak irtibatlı bir Lie grubunun esas gruplarının demetini oluşturmak için gerekli olan bazı temel kavram ve teoremleri vereceğiz.

M, irtibatlı Lie grubu olsun. M irtibatlı ve lokal eğrisel irtibatlı olduğundan eğrisel irtibatlıdır. Şimdi M nin esas gruplarını oluşturalım [5, 1, 2].

$x_0 \in M$ keyfi sabit bir nokta olsun. M de x_0 da başlayıp x_0 da biten bütün kapalı eğrilerin cümlesini göz önüne alalım. x_0 noktasına eğriler için taban nokta, bu eğrilere ise x_0 da eğriler denir. α, x_0 da herhangi bir kapalı eğri olsun. x_0 da α ya homotop bütün kapalı eğrilerin cümlesini $[\alpha]$ homotopi sınıfı ile, bu homotopi sınıflarının cümlesini de

$$\pi_1(M, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha: I \to M,\ x_0 \text{ da kapalı eğri}\}$$

ile gösterelim.

Bu cümle üzerinde $[\alpha]$, $[\beta]$ gibi iki homotopi sınıfının çarpımı $[\alpha].[\beta]=[\alpha\beta]$ şeklinde tarif edilir. Bu çarpım iyi tariflidir. Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ olup $[\alpha].[\beta]=[\alpha\beta]=[\gamma\delta]$ dır [1].

Anahtar Kelimeler: İrtibatlı Lie grubu, esas grup, demet

Kolaylıkla gösterilebilir ki, yukarıda tarif edilen işlemle birlikte $\pi_1(M, x_0)$ bir gruptur. Bu gruba M Lie grubunun x_0 noktasındaki *esas grubu* denir.

Şimdi irtibatlı Lie gruplarının esas gruplarının demetini inşa edelim.

2. İrtibatlı Lie Gruplarının Esas Gruplarının Demeti

Teorem 2.1. M irtibatlı bir Lie grubu ve her bir $x \in M$ ye tekabül eden esas grup $\pi_1(M,x)$ olmak üzere

$$H = \bigvee_{x \in M} \pi_1(M, x) ,$$

cümlesini gözönüne alalım. $\varphi: H \rightarrow M$, $x \in M$ için $\varphi(\sigma)=\varphi([\alpha]_x)=x$ tabii tasvir olsun. Bu takdirde H üzerinde tabii bir topoloji vardır öyle ki, bu topolojiye göre φ lokal topolojik tasvirdir.(H,φ) ye veya sadece H ya M üzerinde "Esas Grupların Demeti" denir [3, 2].

Tarif 2.1. H, M üzerinde esas grupların demeti olsun. Her $x \in M$ için $\pi_1(M, x)=\varphi^{-1}(x)$ esas grubuna demetin x üzerindeki *sapı* denir ve H_x ile gösterilir [1].

M lokal eğrisel irtibatlı olduğundan herhangi bir $x \in M$ noktası için, x noktasını ihtiva eden $W=W(x)$ eğrisel irtibatlı açık civarı vardır. W üzerinde $\varphi o s=1_W$ şartını sağlayan ve $s(y)=[\beta]_y$ olarak tarif edilen $s:W \rightarrow H$ sürekli tasviri vardır. Bu s tasvirine H nın W üzerindeki *kesiti* denir ve H nın W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesi $\Gamma(W,H)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2. M irtibatlı bir Lie grubu, (H,φ) M üzerinde esas grupların demeti ve $\Gamma(W,H)$ da W üzerindeki kesitlerin cümlesi olsun. Bu takdirde $\Gamma(W,H)$ cümlesi her $y \in W$ ve her $s_1, s_2 \in \Gamma(W,H)$ için

$$(s_1.s_2)(y)=s_1(y).s_2(y)$$

işlemine göre bir gruptur.

İspat. Herhangi $s_1,s_2 \in \Gamma(W, H)$ ve $y \in W$ için α_1 ,α_2 $x \in W$ de kapalı eğriler ve γ, x ile y yi birleştiren eğri olmak üzere

$$s_1(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma] , \; s_2(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]$$

dir. O halde,

$$s_1(y).\, s_2(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma].[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2)\gamma] \in \pi_1(M,y)$$

dir. Dolayısıyla, $s_1.s_2 \in \Gamma(W, H)$ dır.

1) Birleşme özeliği : Her s_1, s_2, $s_3 \in \Gamma(W,H)$ için, $\pi_1(M,y)$ bir grup olduğundan,

$$(s_1(y).s_2(y)).s_3(y)= s_1(y).(s_2(y).s_3(y)).$$

Dolayısıyla, $((s_1.s_2).s_3)(y)=(s_1.(s_2.s_3))(y)$. Bu ise, $(s_1.s_2).s_3=s_1.(s_2.s_3)$ demektir. Yani çarpma işlemi birleşme özeliğine sahiptir.

2) Özdeş Eleman : Her $s \in\Gamma(W,H)$ ve $y\in W$ için, δ, $x\in W$ de sıfır eğri olmak üzere $I(y)=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$ şeklinde tarifli $I\in\Gamma(W,H)$ kesitini gözönüne alalım. Bu takdirde, 1, y de sıfır eğri ve $I(y)=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma]([1])$ olmak üzere,

$$(I.s)(y)=I(y).s(y)=[1][(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[1.(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=s(y).$$
$$(s.I)(y)=s(y).I(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma][1]=[((\gamma^{-1}\alpha)\gamma).1]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=s(y).$$

Dolayısıyla, $I\in\Gamma(W,H)$ özdeş elemandır.

3) İnvers Eleman: $s\in\Gamma(W,H)$ herhangi bir kesit ve her $y\in W$ için α, $x\in W$ de kapalı bir eğri olmak üzere $s(y)= [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]$ olsun. Bu takdirde, $\delta=\alpha^{-1}$ olmak üzere $s^{-1}:W\to H$ tasvirini göz önüne alalım. $s^{-1}\in\Gamma(W,H)$ ve $y\in W$ için

$$\begin{aligned}(s.s^{-1})(y)&=s(y).s^{-1}(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma].[(\gamma^{-1}\delta)\gamma]\\&=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma.(\gamma^{-1}\delta)\gamma]\\&=[(\gamma^{-1}\alpha\delta)\gamma]=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]=I(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s^{-1}.s)(y)&=s^{-1}(y).s(y)=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma].[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]\\&=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma.(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]\\&=[(\gamma^{-1}\delta\alpha)\gamma]=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]=I(y).\end{aligned}$$

O halde, $s.s^{-1}=s^{-1}.s$. Dolayısıyla $s^{-1}\in\Gamma(W,H)$, s nin inversidir.

Dolayısıyla, $(\Gamma(W,H), .)$ bir gruptur.

Teorem 2.3. $s\in\Gamma(M,H)$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $s(M)=\{s(x)|\ x\in M\}$ cümlesi bir Lie grubudur.

İspat. İlk olarak s(M) nin analitik manifold olduğunu gösterelim. H üzerinde Teorem 2.1 de söz edilen topolojiye göre $s(M)\subset H$ açık bir altcümledir. H analitik manifold olduğundan s(M) analitik manifolddur.

Herhangi x, $y\in M$ için s(M) üzerindeki işlemi

$$s(x)*s(y)=s(x.y)$$

şeklinde tarif edelim. $s\in\Gamma(M,H)$ için $x\in M$ noktasında α kapalı eğrisi vardır öyle ki γ, x' i y ye birleştiren eğri olmak üzere $(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma$ y noktasında bir eğridir.

$$s(y)=[(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma]_y\in\Gamma(M,H) \quad \text{dir.}$$

1) Birleşme özeliği : Her x, y, $z\in$M için,

$$(s(x)*s(y))*s(z)=(s)(x.y)*s(z)=s((x.y).z)\in s(M)$$

dir. M bir grup olduğundan,

$$(x.y).z=x.(y.z) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $s((x.y).z)=s(x.(y.z))$. Bu ise, $(s(x)*s(y))*s(z)=s(x)*(s(y)*s(z))$ demektir. Yani s(M) birleşme özeliğine sahiptir.

2) Özdeş Eleman : M in özdeş elmanı e olsun. $x\in$M noktasına karşılık gelen $s(x)\in s(M)$ noktası için $s(x)*s(e)=s(x.e)=s(x)$ olduğundan s(e) s(M) nin özdeş elemanıdır.

3) İnvers Eleman: Her $s(x)\in s(M)$ için $s(x^{-1})\in s(M)$ invers elemandır. Gerçekten $s(x)*s(x^{-1})=s(x.x^{-1})=s(e)$ olup $s(x^{-1})=s(x)^{-1}$ elde edilir.

Dolayısıyla (s(M), $*$) bir gruptur.

Şimdi de x, $y\in$M olmak üzere, her $s\in\Gamma(M,H)$ için

$$\mu': s(M)xs(M)\to s(M)$$
$$(s(x),s(y))\to s(x)*s(y)^{-1}=s(x.y^{-1})$$

tasvirinin analitik olduğunu gösterelim. (H, $(\tau_i)_{i\in A}$) ve (M,$(\phi_i)_{i\in B}$) analitik manifold olduğundan

$$\begin{tikzcd} s(M)xs(M) \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "F"'] & s(M) \\ MxM \arrow[r, "\mu"] & M \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

diyagram komutatiftir. Yani $F=(\phi_i\tau_i^{-1},\phi_j\tau_j^{-1})$ olmak üzere $s=\tau_i\phi_i^{-1}$ olup $so\mu oF$ analitiktir. Dolayısıyla μ' analitiktir. Böylece s(M) nin bir Lie grubu olduğu elde edilmiş olur.

Örnek 2.1. $S^1=\{(x_1,x_2)\in R^2 \mid x_1^2+x_2^2=1\}$ kompakt, irtibatlı bir Lie grubudur [4, 6].

$S^1=\{y\in R^2: \|y\|=1\}$ birim çemberinin esas grubu tamsayıların toplamsal grubuna izomorftur. S^1 Lie grubunun esas grubunun demeti Teorem 2.1 de $M=S^1$ alınarak yapılabilir. Sonuç olarak; S^1 irtibatlı bir Lie grubu, her bir $p \in S^1$ ye tekabül eden esas grup $\pi_1(S^1,p)$ ve $H = \bigvee_{p \in S^1} \pi_1(S^1, p)$ olmak üzere $\varphi: H \to S^1$ tabii tasviri $\varphi(\sigma)=\varphi([\alpha]_p)=p$ şeklinde tarif edilsin. Bu taktirde H üzerinde tabii bir topoloji vardır öyle ki, bu topolojiye göre φ lokal topolojik tasvirdir.Böylece (H,φ) ikilisi S^1 üzerinde bir demettir.

S^1 üzerindeki (H,φ) demetini gözönüne alalım. Her $s \in \Gamma(S^1,H)$ için $s(S^1)$ bir gruptur.

Sonuç olarak her $s \in \Gamma(S^1,H)$ için $s(S^1)$ bir Lie grubudur. İspatı Teorem 2.3 den $M= S^1$ alınırak yapılır.

Sonuç 2.1. $H = \bigvee_{x \in M} \pi_1(M, x)$ cümlesi esas grupların ayrık birleşimi şeklinde yazıldığında (düşey olarak) cebirsel bir yapıya sahiptir.
Sonuç 2.2. $H = \bigvee_{s \in \Gamma(M,H)} s(M)$ yazıldığında (yatay olarak) hem cebirsel hem de topolojik bir yapıya sahiptir.

KAYNAKÇA

[1] Balcı, S., The Sheaf of The Fundemental Groups. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A1: Math., Tome: 31(1982), pp : 59-65.

[2] Balcı, S., The Seifert-Van Kampen Theorem for The Group of Global Sections. Indian J. Pure Appl. Math., 27(9), (1996) pp:883-891.

[3] Çitil, M., Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarının Demeti, Ankara Üniv. Fen Bil. Enstitüsü., Matematik ABD, Doktora Tezi (2003).

[4] Fegan, Howard D., An Introduction to Compact Lie Groups, Series in Pure Math, v.13(1991).

[5] Hilton, P.J., An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge University Press, (1961).

[6] Price, J. F., Lie Groups and Compact Groups, London Math. Soc. Lecture Note Series, 25 (1977).

ON THE SHEAF OF FUNDAMENTAL GROUPS OF CONNECTED LIE GROUPS

M. ÇİTİL

Abstract. In this study, firstly we obtain the sheaf of fundamental groups on a connected Lie group . After we examined the sections and stalks of this sheaf, we showed that each global sections is a Lie group.

Keywords: Connected Lie groups, fundamental groups, sheaf.

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kahramanmaraş, Türkiye
citil@ksu.edu.tr.