Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Sayı: 6 Ekim 2004

DUAL KUATERNİYONLAR ÜZERİNDE SİMPLEKTİK GEOMETRİ

E. ATA *

Özet

Bu makalede dual kuaterniyonlar üzerinde simplektik grup, simplektik vektör uzayı ve simplektik çarpma verilerek dual simplektik matrisler incelenmiştir. Ayrıca birim dual küre üzerinde simplektik yapı verilerek bu kürenin bir hemen hemen Hermityen manifold olduğu gösterildi.

* Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100 Tandoğan /ANKARA

1.Giriş

1.1 Simplektik Manifold

Tanım 1.1.1. *M* diferensiyellenebilir *p*-boyutlu reel bir manifold olsun. Bir $\Omega \in \Omega^2(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa Ω ya *M* üzerinde bir simplektik form, (M,Ω) ikilisine de bir simplektik manifold denir.

i) $d\Omega = 0$ (Ω formu kapalıdır)

ii) Her $m \in M$ noktasında $T_M(m)$ tanjant uzayı üzerinde $x \in T_M(m)$ olmak üzere her $y \in T_M(m)$ için $\Omega_m(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. (non-degenerate özelliği)

Bu durumda her $m \in M$ noktasında $T_M(m)$ bir simplektik uzay olur. Böylece $boy\, M = p$ için $p = 2n$ yani çift olmak zorundadır.

Tanım 1.1.2. (M,Ω) ve (M',Ω') iki simplektik manifold olsun. $F: M \to M'$ diferensiyellenebilir dönüşümü için $F^*\Omega' = \Omega$ ise F ye bir simplektik dönüşüm denir. Burada F^*, F ' nin ek dönüşümüdür.

Anahtar Kelimeler: Dual simplektik dönüşüm, Dual simplektik grup, Dual simplektik matris, Dual kuaterniyonlar, Hermityen manifold, Kompleks yapı, Reel kuaterniyonlar, Simplektik dönüşüm, Simplektik grup, Simplektik matris.

Eğer F simplektik dönüşümü birebir ve örten ise F 'ye bir simplektomorfizm denir. M üzerindeki tüm simplektomorfizmlerin cümlesi $S_p(M)$ ile gösterilir.

Tanım1.1.3. M diferensiyellenebilir reel bir manifold olsun. $\forall x \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(x)$ olmak üzere $J : T_M(x) \to T_M(x)$ lineer endomorfizmi için $j^2 = -I$ ise j ye M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı denir. Burada I , özdeşlik dönüşümüdür.
Üzerinde böyle bir kompleks yapı bulunduran M manifolduna ise hemen hemen kompleks manifold denir.

Tanım1.1.4. Hemen hemen j kompleks yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold M olsun. M üzerindeki bir g Riemann metriği için

$$g\big(j(x), j(y)\big) = g(x, y),\ \forall x, y \in \chi(M)$$

ise g ye M üzerinde bir Hermityen metrik denir.
Üzerinde bir Hermityen metrik bulunduran hemen hemen M kompleks manifolduna bir hemen hemen Hermityen manifold denir.

1.2. Reel Kuaterniyonlar

Tanım1.2.1. Bir reel kuaterniyon $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$, $a, b, c, d \in IR$ biçiminde ifade edilir. Burada

i) $\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = -1$

ii) $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_2$ dir.

Bir reel kuaterniyonu, skalar kısmı $s_q = d$ ve vektörel kısmı $\vec{v}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ olmak üzere iki kısma ayırabiliriz. Böylece q reel kuaterniyonu $q = s_q + \vec{v}_q$ şeklinde yazılabilir.

Tüm reel kuaterniyonların cümlesini κ_{IR} ile gösterelim. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemiyle birlikte reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı, kuaterniyon çarpımı ile de birimli ve birleşimli bir halka yapısına sahiptir. [1]

1.3. Dual Kuaterniyonlar

Tanım1.3.1. $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ ve $q^* = d^* + a^*\vec{e}_1 + b^*\vec{e}_2 + c^*\vec{e}_3$ iki reel kuaterniyon olmak üzere bir dual kuaterniyon

$$Q = q + \varepsilon q^*, \ \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \notin IR$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca Q dual kuaterniyonu,

$$D = d + \varepsilon d^*, \ A = a + \varepsilon a^*, \ B = b + \varepsilon b^*, \ C = c + \varepsilon c^*$$

olmak üzere

$$Q = D + A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada D, A, B, C dual sayıları Q'nun dual bileşenleridir.

Bir dual kuaterniyonu, skalar kısmı $S_Q = D$ ve vektörel kısmı $\vec{V}_Q = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$ olmak üzere iki kısma ayırabiliriz. Böylece Q dual kuaterniyonu $Q = S_Q + \vec{V}_Q$ biçiminde de yazılabilir.

Bir dual kuaterniyonun skalar kısmı bir dual sayı, vektörel kısmı bir dual vektördür. Tüm dual kuaterniyonların cümlesini κ_{ID} ile göstereceğiz. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemiyle birlikte reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı, kuaterniyon çarpımı ile de birimli ve birleşimli bir halka yapısına sahiptir.[1]

Şimdi κ_{ID} dual kuaterniyonlar halkası üzerinde temel bazı işlemleri verelim.

$\forall \ Q_1 = S_{Q_1} + \vec{V}_{Q_1}, \ Q_2 = S_{Q_2} + \vec{V}_{Q_2} \in \kappa_{ID}$ için

Eşitlik; $S_{Q_1} = S_{Q_2}$ ve $\vec{V}_{Q_1} = \vec{V}_{Q_2}$ ise $Q_1 = Q_2$ dır.

Çarpma; $Q_1 \times Q_2 = S_{Q_1} S_{Q_2} - \left\langle \vec{V}_{Q_1}, \vec{V}_{Q_2} \right\rangle + S_{Q_1}\vec{V}_{Q_2} + S_{Q_2}\vec{V}_{Q_1} + \vec{V}_{Q_1} \wedge \vec{V}_{Q_2}$

olur. Herhangi $Q = D + A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3 \in \kappa_{ID}$ için Q nun eşleniği $K_Q = D - \left(A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}\right)$, normu $N_Q = D^2 + A^2 + B^2 + C^2$ ve inversi $Q^{-1} = \dfrac{K_Q}{N_Q}$ şeklinde tanımlanır.

2. Dual Simplektik Grup

κ_{ID} dual kuaterniyonlar halkası olmak üzere $\kappa_{ID}^n = \kappa_{ID} \times \kappa_{ID} \times \ldots \times \kappa_{ID}$ için

$$\kappa_{ID}^n = \left\{ \vec{Q} = \left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) : q_i \in \kappa_{ID}, 1 \le i \le n \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. Bu cümle, üzerindeki toplama

$$\oplus : \kappa_{ID}^{n} \times \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}^{n}$$

$$(\vec{Q},\ \vec{P}) \to \ \vec{Q} \oplus \vec{P} = \left(q_1 + p_1, q_2 + p_2, ..., q_n + p_n\right)$$

$\vec{Q} = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$; $q_i \in \kappa_{ID}$, $1 \le i \le n$

$p \in K_{ID}$ ve skalar çarpma,

$$\otimes : \kappa_{ID}^{n} \times \kappa_{ID} \to \kappa_{ID}^{n}$$

$$(\vec{Q},\ p) \to \ \vec{Q} \otimes p = \left(q_1 \times p, q_2 \times p, ..., q_n \times p\right)$$

işlemleriyle birlikte κ_{ID} dual kuaterniyonlar halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Bu yapı ile birlikte κ_{ID}^{n} nin elemanlarına birer dual vektör diyeceğiz.

2.1 Dual Simplektik Vektör Uzayı

Tanım 2.1.1.

$$\langle , \rangle : \kappa_{ID}^{n} \times \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}$$

$$(\vec{Q},\ \vec{P}) \to \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} K(q_i) p_i$$

$\vec{Q} = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$; $q_i \in \kappa_{ID}$, $1 \le i \le n$

$\vec{P} = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$; $p_i \in \kappa_{ID}$, $1 \le i \le n$

şeklinde tanımlı dönüşüme κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik çarpma denir. Burada $K(q_i)$, q_i dual kuaterniyonun eşleniğidir. Dual simplektik çarpma aşağıdaki özelikleri sağlar.

i) $\left\langle \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \vec{P} \right\rangle = \left\langle \vec{Q}_1, \vec{P} \right\rangle + \left\langle \vec{Q}_2, \vec{P} \right\rangle$, $\forall \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{P} \in \kappa_{ID}^{n}$

ii) $\left\langle \vec{Q}, \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{Q}, \vec{P}_2 \right\rangle$

iii) $\left\langle \vec{Q}, \vec{P}.q \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle q$, $\forall q \in \kappa_{ID}$

iv) $\left\langle \vec{Q}.q, \vec{P} \right\rangle = K(q) \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle$

Tanım 2.1.2. Üzerinde dual simplektik çarpma tanımlı olan κ_{ID}^{n} vektör uzayına dual simplektik vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.3. κ_{ID}^{n} bir simplektik vektör uzayı olsun.

$$\sigma : \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}^{n}$$

lineer dönüşümü $\forall \vec{Q}, \vec{P} \in \kappa_{ID}^{n}$ için

$$\left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P}) \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle$$

eşitliği sağlanıyorsa σ ya κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik dönüşüm denir.

Önerme 2.1.1. $\sigma : \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}^{n}$ bir dual simplektik dönüşüm olsun. Bu durumda σ, birebir ve örtendir.

İspat. σ lineer bir dönüşüm olduğundan her $\forall \vec{Q} \in \kappa_{ID}^{n}$ için

$$\sigma(\vec{Q}) = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \vec{0}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\forall \vec{Q}, \vec{P} \in \kappa_{ID}^{n}$ için σ bir dual simplektik dönüşüm olduğundan

$$\left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P}) \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle$$

yazabiliriz. Özel olarak $\vec{Q} = \vec{P}$ alırsak

$$\left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{Q}) \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{Q} \right\rangle$$

olur. $\sigma(\vec{Q}) = \vec{0}$ olsun. Bu durumda

$$0 = \left\langle \vec{Q}, \vec{Q} \right\rangle \Rightarrow \vec{Q} = \vec{0}$$

elde edilir. O halde σ birebirdir. σ nın tanım ve değer uzayları aynı olduğundan örtenliği açıktır. Buradan σ dual simplektik dönüşümü bir lineer endomorfizm olur.

Önerme 2.1.2. σ, κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik dönüşüm ise σ nın tersi olan σ^{-1} dönüşümü de κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik dönüşümdür.

İspat. σ^{-1} in lineerliği açıktır. Biz burada iç çarpımı koruduğunu gösterelim. $\forall \vec{Q}, \vec{P} \in \kappa_{ID}^{n}$ için $\sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P}) \in \kappa_{ID}^{n}$ dir. Buradan

$$\left\langle \sigma^{-1}\left(\sigma(\vec{Q})\right), \sigma^{-1}\left(\sigma(\vec{P})\right) \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle$$

olur. Ayrıca σ bir simplektik dönüşüm olduğundan

$$\left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P}) \right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P} \right\rangle$$

dır. O halde

$$\left\langle \sigma^{-1}\left(\sigma(\vec{Q})\right), \sigma^{-1}\left(\sigma(\vec{P})\right)\right\rangle = \left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P})\right\rangle$$

elde edilir ki bu bize σ^{-1} in κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik dönüşüm olduğunu gösterir.

Sonuç olarak dual simplektik dönüşümlerin cümlesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba dual simplektik grup denir ve $S_p(n, \kappa_{ID})$ ile gösterilir. Buradan

$$S_p\left(n, \kappa_{ID}\right) = \left\{\sigma \middle| \sigma : \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}^{n}, \forall \vec{Q}, \vec{P} \in \kappa_{ID}^{n} \; için \; \left\langle \sigma(\vec{Q}), \sigma(\vec{P})\right\rangle = \left\langle \vec{Q}, \vec{P}\right\rangle\right\}$$

olur.

Teorem 2.1.1. κ_{ID}^{n} üzerindeki standart baz $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olmak üzere $\vec{Q}^{-1} \in \kappa_{ID}$ birim dual vektör ise $\sigma(\vec{e}_1) = \vec{Q}$ olacak şekilde bir $\sigma : \kappa_{ID}^{n} \to \kappa_{ID}^{n}$ dual simplektik dönüşümü vardır.

İspat. $\{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n\}$ cümlesi κ_{ID}^{n} in herhangi bir ortonormal bazı olmak üzere σ yı $\sigma(\vec{e}_i) = \vec{Q}_i$, $1 \le i \le n$ olacak şekilde tanımlarsak bir lineer endomorfizm olur. Buradan

$$\begin{aligned}\left\langle \sigma(\vec{e}_i), \sigma(\vec{e}_k)\right\rangle &= \left\langle \vec{Q}_i, \vec{Q}_k\right\rangle \\ &= \delta_{ik} \\ &= \left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir ki bu bize σ nın bir dual simplektik dönüşüm olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.2. σ, κ_{ID}^{n} üzerinde bir dual simplektik dönüşüm olsun. Eğer σ ya karşılık gelen matris $Q = \left[q_{ij}\right]$ ise $\left[K(Q)\right]^T Q = \left[\delta_{ij}\right]$ dır.

İspat. κ_{ID}^{n} vektör uzayının standart bazı $\vec{e}_i = \left(\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in}\right)$ olmak üzere $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j q_{ji} \quad \text{ve} \quad \sigma(\vec{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j q_{jk}$$

yazabiliriz. σ bir dual simplektik dönüşüm olduğundan

$$\langle \sigma(\vec{e}_i), \sigma(\vec{e}_k) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j q_{ji}, \sum_{s=1}^{n} \vec{e}_s q_{sk}, \right\rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j,s=1}^{n} \langle \vec{e}_j q_{ji}, \vec{e}_s q_{sk} \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j,s=1}^{n} K(q_{ji}) \langle \vec{e}_j, \vec{e}_s \rangle q_{sk} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j,s=1}^{n} K(q_{ji}) q_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\Rightarrow \quad [K(q_{ji})]^T [q_{jk}] = [\delta_{ik}]$$

$$\Rightarrow \quad [K(Q)]^T Q = [\delta_{ik}]$$

elde edilir. Ayrıca $Q = [Q_{ij}]$ olmak üzere $Q_{ij} = D_{ij} + A_{ij}\vec{e}_1 + B_{ij}\vec{e}_2 + C_{ij}\vec{e}_3$, $1 \leq i, j \leq n$ olsun. $S_{Q_{ij}} = D_{ij}$ ve $\vec{V}_{Q_{ij}} = A_{ij}\vec{e}_1 + B_{ij}\vec{e}_2 + C_{ij}\vec{e}_3$ için $Q_{ij} = S_{Q_{ij}} + \vec{V}_{Q_{ij}}$ şeklinde yazabiliriz.

$$K(Q_{ij}) = S_{Q_{ij}} - \vec{V}_{Q_{ij}} \Rightarrow [K(Q_{ij})]^T = [S_{Q_{ij}} - \vec{V}_{Q_{ij}}]$$

olur. Buradan

$$[K(Q_{ij})]^T Q = [\delta_{ij}] \Rightarrow [S_{Q_{ij}} - \vec{V}_{Q_{ij}}][S_{Q_{ij}} + \vec{V}_{Q_{ij}}] = [\delta_{ij}]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} D_{ij}^2 + A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + C_{ij}^2 = 1$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left[S_{Q_{ij}} S_{Q_{ji}} + \langle \vec{V}_{Q_{ij}}, \vec{V}_{Q_{ji}} \rangle - S_{Q_{ij}} \vec{V}_{Q_{ji}} + S_{Q_{ji}} \vec{V}_{Q_{ij}} - \vec{V}_{Q_{ij}} \wedge \vec{V}_{Q_{ji}} \right] = 0 \ (i \neq j)$$

bulunur.

Tanım 2.1.4. Dual simplektik dönüşümlerin grubunu izomorf olan matrislerin grubuna dual simplektik matrislerin grubu denir. Matrislerin bu grubunu da yine $S_P(n)$ ile göstereceğiz. O halde

$$S_P(n) = \left\{ Q \in \kappa_{ID}^n \,\middle|\, [K(Q)]^T . Q = I_n \right\}$$

olur. Özel olarak $n=1$ için

$$S_P(1)=\left\{Q\in\kappa_{ID}\,\middle|\,N_Q=1\right\}$$

birim dual kuaterniyonların cümlesini elde ederiz.

3. Birim Dual Küre Üzerinde Simplektik Yapı

M manifoldu olarak $S^2_{\kappa_{ID}}=\left\{\vec{x}\in\kappa^3_{ID}\,\middle|\,\|\vec{x}\|=(1,0)\right\}$ cümlesini, yani ID - modül de birim dual küreyi alalım. Birim dual küreye üzerindeki bir *p* noktasında teğet olan vektörler, kürenin bu noktasındaki tanjant uzayını oluştururlar. $S^2_{\kappa_{ID}}$ üzerindeki standart simplektik form iç ve dış çarpımlar yardımıyla tanımlanır. Yani

$$\Omega:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,ID)$$

olmak üzere her $p\in M$ için

$$\begin{aligned}\Omega_p:T_M(p)\times T_M(p)&\to\kappa_{ID}\\(\vec{A},\vec{B})&\to\Omega_p(\vec{A},\vec{B})=\left\langle p,\vec{A}\times\vec{B}\right\rangle\\&=\det\left(p,\vec{A},\vec{B}\right)\end{aligned}$$

dönüşümünün bileneer ve alterne olduğu açıktır. Non-dejenere özelliğine sahip olduğunu gösterelim. $\vec{A}\in T_M(p)$ için $\forall\vec{B}\in T_M(p)$ olmak üzere $\Omega_p(\vec{A},\vec{B})=0$ olsun.

$$\begin{aligned}\Omega_p(\vec{A},\vec{B})=0&\Rightarrow\left\langle p,\vec{A}\times\vec{B}\right\rangle=0\\&\Rightarrow\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0},\ \forall\vec{B}\in T_M(p)\\&\Rightarrow\vec{A}=\vec{0}\end{aligned}$$

olur. O halde Ω_p non-dejenere özelliğe sahiptir. Ayrıca Ω formu dual küre üzerinde ikinci dereceden bir form olduğundan kapalıdır. Yani $d\Omega=0$ dır. Sonuç olarak Ω bir simplektik form ve (M,Ω) ikilisi bir simplektik manifold olur.

Eğer dual birim olarak $\varepsilon=0$ alınırsa IR^3 deki S^2 küresi üzerinde simplektik form elde edilir.

Şimdi ise birim dual kürenin hemen hemen kompleks yapıya ve buradan da bir (j,g) hemen hemen Hermityen yapıya sahip olduğunu gösterelim.

κ^3_{ID} üzerindeki iç çarpım birim dual küre üzerinde doğal bir g metrik tensör alanı verir.

$X \in S^2_{\kappa_{ID}}$ için $T_{S^2_{\kappa_{ID}}}(X)$ tanjant uzayı, doğal olarak X 'e ortogonal olan κ^3_{ID} ün alt uzayı ile izomorf yapılabilir.

$$j_X : T_{S^2_{\kappa_{ID}}}(X) \to T_{S^2_{\kappa_{ID}}}(X)$$

$$Y \to j_X(Y) = X \times Y$$

dönüşümü tanımlayalım. Bu bir lineer endomorfizmdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} j^2_X(Y) &= j_X\left(j_X(Y)\right) \\ &= j_X\left(X \times Y\right) \\ &= X \times \left(X \times Y\right) \\ &= \left\langle X, Y \right\rangle X - \left\langle X, X \right\rangle Y \\ &= -\left\langle X, X \right\rangle Y \\ &= -Y \end{aligned}$$

ise $j^2_X = -I$ olur. O halde $X \to j_X$ eşlemesi $j^2 = -I$ olacak şekilde bir j tensör alanı tanımlanır. Bu ise j nin $S^2_{\kappa_{ID}}$ üzerinde bir kompleks yapı olduğunu gösterir. Diğer taraftan

$$g\left(j_X Y, j_X Z\right) = g\left(Y, Z\right); \ \forall Y, Z \in T_{\kappa^2_{ID}}(X)$$

olduğundan birim dual küre bir (j, g) hemen hemen Hermityen yapısına sahiptir. Buradan birim dual küre bir hemen hemen Hermityen manifold olur.

KAYNAKÇA

[1] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi, Basın Yayın Y.O. Basımevi, 1983

[2] Claude,C., Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946

[3] Yano, Kentaro and Kon, Masahiro ; Structures on Manifolds, World Scientific publishing, 1984

[4] Ward, J.P., Quaternions and Cayley Numbers, Kluwer Academic Publishers, 1997