# ÖKLİD DÜZLEMİNDE BİRİNCİ VE İKİNCİ İVME POLLERİ

H. ES*

Özet

1-Parametreli hareketlerde Müller tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir. Biz burada matris metotlarını kullanarak Müller'in elde ettiği sonuçlara ulaştık. Ayrıca buna ilave olarak yeni teoremler verdik.

* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

## 1. Giriş

Bu çalışmanın amacı kinematiktir. Bu cins hareketlerde hızlar kanunu ve ivmeler kanunu, sırası ile ,

$$V_a = V_f + V_r$$

$$b_a = b_f + b_r + b_c$$

den ibarettir, burada $V_a$ ile $b_a$, mutlak hız ile mutlak ivmeyi; $V_f$ ile $b_f$ , sürüklenme hızı ile sürüklenme ivmesini, $V_r$ ile $b_r$ de rölatif hız ile rölatif ivmeyi ve $b_c$ de Coriolis ivmesini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Bir Parametreli Hareket, Pol Noktası

## 2. ÖKLİD DÜZLEMİNDE HAREKETLER

**Tanım 2.1 :** ( Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız )

$E^2$ de genel hareketin denklemi $A = A(t) \in O(2)$ ve $C = C(t) \in IR^2{}_1$ olmak üzere

$$Y = A\,X + C \qquad (\mathrm{I})$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{Y} = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \qquad (\mathrm{II})$$

olur. Burada $\dot{Y}$ ye **hareketin mutlak hızı,** $A\dot{X}$ ye **hareketin rölatif hızı,** $\dot{A}X + \dot{C}$ ye de hareketin **sürüklenme hızı** denir.

Biri $E'$ **sabit düzlem** ve diğeri de $E'$ ye göre hareket eden E **hareketli düzlem** olmak üzere $E^2$ düzlemindeki hareketleri $E/E'$ biçiminde gösteririz. A ve C matrisleri bir $t \in IR$ parametresinin fonksiyonları iseler bu harekete **bir parametreli hareket** denir ve $B_1 = E/E'$ ile gösterilir.

### 2.1 Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Öklid anlamında bir parametreli $B_1 = E/E'$ hareketinde E de sabit bir X noktasının her t anında $V_f$ sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar hareketli ve sabit düzlemde sabit noktalardır. Bu noktalara **hareketin pol noktaları** denir.

**Teorem 2.1.1:** Açısal hızı sıfır olmayan bir $B_1 = E/E'$ hareketinde, her t anında her iki düzlemde sabit kalan bir tek nokta vardır.

**İspat:** $X \in E$ noktası E de sabit olacağından $V_r = 0$ ve aynı nokta $E'$ düzleminde de sabit olacağı için $V_f = 0$ olacaktır. O halde bu cins noktalar için $V_f = 0$ ise

$$V_f = 0 \Rightarrow \dot{A}X + \dot{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \qquad (\mathrm{III})$$

olur. Gerçekten,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\varphi & \dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\dot{A} = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix}$$

$\det \dot{A} = \dot{\varphi}$, $\varphi \neq$ sabit alınırsa $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısıyla $\dot{A}$ regüler yani $\dot{A}^{-1}$ mevcut olur ve

$$\dot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla $V_f = 0$ denkleminin bir tek $X$ çözümü vardır. Bu $X$ noktasına hareketli düzlemdeki pol noktası denir. Bu nedenle ( III) ' den

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} \dot{a}\sin\varphi + \dot{b}\cos\varphi \\ -\dot{a}\cos\varphi + \dot{b}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

veya vektör olarak

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(\dot{a}\sin\varphi + \dot{b}\cos\varphi, -\dot{a}\cos\varphi + \dot{b}\sin\varphi\right)$$

ve sabit düzlemdeki pol noktası ( I ) den

$$P' = AP + C$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılır ve hesaplanırsa

$$Y = P' = \frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} \dot{b} \\ -\dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

veya vektör olarak

$$Y = P' = \left(\frac{1}{\dot{\varphi}}\dot{b} + a, -\frac{1}{\dot{\varphi}}\dot{a} + b\right)$$

bulunur. Burada $\forall$ t için $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ kabul ediyoruz. Yani, açısal hız sıfır olmasın. Bu durumda her t anında hareketli ve sabit düzlemlerin her birinde bir tek pol noktasının olduğunu söyleyebiliriz.

**Tanım 2.1.1:** P = $(p_1, p_2)$ noktasına $B_1 = E/E'$ bir parametreli Öklid hareketinin t anındaki polü veya ani dönme merkezi denir.

**Teorem 2.1.2:** P polünden X noktasına giden pol ışını,$\forall$ t anında $V_f$ sürüklenme hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

**İspat:** Y =AX + C $\Rightarrow$ X = $A^{-1}(Y - C)$

$$\dot{Y} = \dot{A}X + \dot{C} = V_f$$

$\dot{A}X + \dot{C} = 0$ den P= $-\dot{A}^{-1}\dot{C}$ hareketli düzlemdeki pol noktası
Y =AX + C
Y= $P'$ = A ( $-\dot{A}^{-1}\dot{C}$ )+C sabit düzlemdeki pol noktası

$$P' - C = -A\dot{A}^{-1}\dot{C}, \quad \dot{C} = -A^{-1}\dot{A}(P' - C)$$

bu değerleri $V_f = \dot{A}X + \dot{C}$ de yerlerine yazılırsa

$$V_f = \dot{A}A^{-1}(Y - P') = \dot{A}A^{-1}\, P'Y$$

$\dot{A}A^{-1}\, P'Y$ değeri hesaplanırsa vektör olarak

$$V_f = \dot{A}A^{-1}\, P'Y = \dot{\varphi}\,((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$$

bulunur.

$$P'Y = ((y_1 - p_1), (y_2 - p_2))$$

dır. Buna göre,

$$\langle V_f, P'Y \rangle = 0$$

bulunur.

**Teorem 2.1.3 :** $V_f$ sürüklenme hız vektörünün boyu

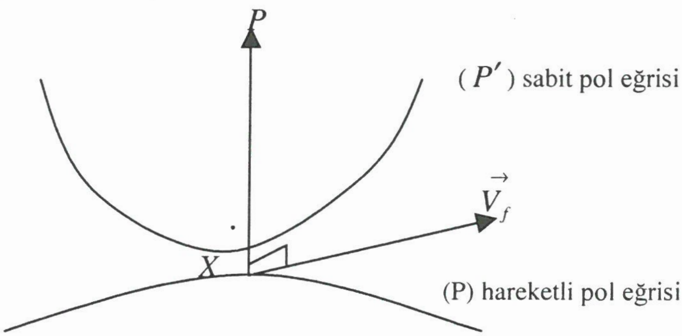
$$\|V_f\| = |\dot{\varphi}|\,\|PX\| \quad \text{dir.}$$

**İspat:** $V_f = \dot{\varphi}\,((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$

$$\|V_f\| = |\dot{\varphi}|\sqrt{(y_2 - p_2)^2 + (y_1 - p_1)^2}$$
$$= |\dot{\varphi}|\,\|P'Y\|$$

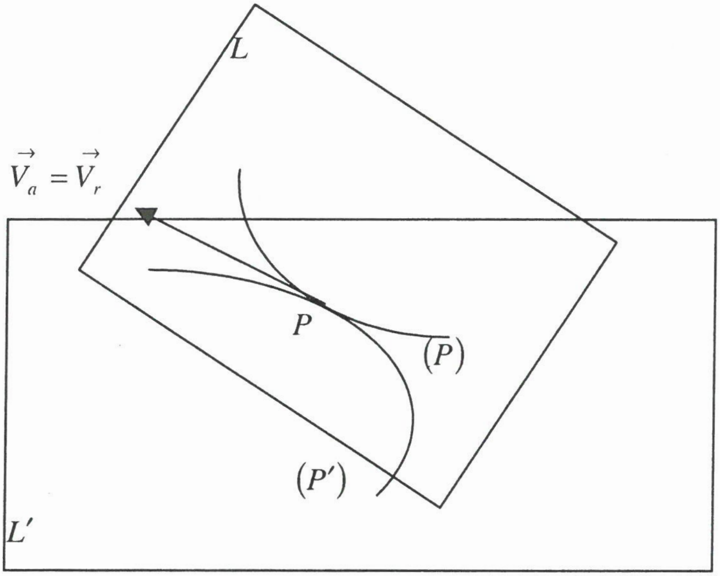
dır.

**Teorem 2.1.4:** $B_1 = E/E'$ hareketinde E düzleminin X noktaları, $E'$ sabit düzleminde normalleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler (Şekil 2.1.1).




Şekil 2.1.1. Normalleri P polünden geçen yörüngeler

**Tanım 2.1.2 :** $B_1 = E/E'$ Öklid hareketinde P pol noktalarının E hareketli düzlemindeki geometrik yerine $B_1 = E/E'$ hareketinin hareketli pol eğrisi denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının $E'$ sabit düzlemindeki geometrik yerine ise sabit pol eğrisi ve $(P')$ ile gösterilir ( Şekil 2.1.2 ).




Şekil 2.1.2. Hareketli ve sabit pol eğrileri

P pol noktası E hareketli düzlemi üzerinde hareketli bir noktadır. Dolayısıyla P noktası (P) ve $(P')$ pol eğrilerini çizerken bu eğrilerin herbiri üzerinde birer hıza sahiptir.

**Teorem 2.1.5 :** Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün, ( P ) ve $(P')$ eğrileri üzerinde, her t anındaki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir deyişle iki eğri daima birbirine teğettir.

**İspat:** $X \in E$ noktasının ( P ) eğrisini çizme hızı $V_r$ ve ayrıca bu noktanın $(P')$ eğrisini çizme hızı da $V_a$ dır. $V_f = 0$ olduğundan $V_a = V_r$ dir.

**Tanım 2.1.3:** Her t anında $\alpha$ ve $\alpha'$ gibi iki eğri birbirine teğet ve bu iki eğriyi çizen noktanın bu eğriler üzerinde $dt$ kadar zamanda aldıkları $ds$ ve $ds'$ yollarının uzunlukları aynı ise $\alpha$ ve $\alpha'$ eğrilerine birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyorlar denir.

**Teorem2.1.6:** Bir parametreli düzlemsel bir $B_1 = E/E'$ Öklid hareketinde, E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi $E'$ düzleminin ( $P'$ ) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

**İspat :** Bir eğrinin yay elementinin tanımına göre (P) nin yay elementi $ds = \|V_r\|$ ve ( $P'$ ) nün ki de $ds' = \|V_a\|$ dır. (P) ve ( $P'$ ) için $V_a = V_r$ olduğundan $ds = ds'$ dür.

Bu teoreme göre, zamandan bahsetmeden bir Öklid hareketini tanımlayabiliriz. Bir $B_1 = E/E'$ Öklid hareketi, E nin (P) hareketli pol eğrisi, $E'$ nün ( $P'$ ) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile elde edilebilir.

## 2.2. İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

E Öklid düzleminin $E'$ düzlemine göre $B_1 = E/E'$ Öklid hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında E düzlemine göre, dolayısıyla da $E'$ düzlemine göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın . X in hareketine ait hız formülleri elde edilmişti, şimdi ise X noktasının ivmesine ait ivme formülleri elde edilecektir.

**Tanım 2.2.1:** X noktasının E hareketli düzlemine göre $V_r$ rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in E deki **rölatif ivme vektörü** diyecek ve onu $b_r$ ile göstereceğiz. Bu türev alınırken X noktası E de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

**Teorem 2.2.1:** E hareketli Öklid düzleminde bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir(Burada $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$ olup buna Öklid anlamında <u>Corilois ivmesi</u> adını vereceğiz) (Hacısalihoğlu, 1983) .

**Sonuç 2.2.1:** Bir $X \in E$ noktası E de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

**İspat :**

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$$

den her iki tarafın türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f \quad \text{dir.}$$

**Teorem 2.2.2 :** $b_c$ Coriolis ivme vektörü, $V_r$ rölatif hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

**İspat:** $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$

$$=2\dot{\varphi}\begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$=2\dot{\varphi}\begin{bmatrix} -\dot{X}_1\sin\varphi + \dot{X}_2\cos\varphi \\ -\dot{X}_1\cos\varphi - \dot{X}_2\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$=2\dot{\varphi}\left(-\dot{X}_1\sin\varphi + \dot{X}_2\cos\varphi, -\dot{X}_1\cos\varphi - \dot{X}_2\sin\varphi\right)$$

ve

$$V_r = A\dot{X}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$=(\dot{X}_1\cos\varphi + \dot{X}_2\sin\varphi, -\dot{X}_1\sin\varphi + \dot{X}_2\cos\varphi)$$

bu değerler Öklid anlamında iç çarpımı yapılırsa

$$\langle V_r, b_c\rangle = 0$$

olduğu görülür.

**Sonuç 2.2:** E hareketli Öklid düzleminde, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, $B_1$ hareketi bir kayma ( öteleme ) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

**İspat:** X noktasının $b_c$ Coriolis ivme vektörü

$$b_c = 2\dot{A}\dot{X}$$

$$=2\dot{\varphi}\begin{bmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{X}_1 \\ \dot{X}_2\end{bmatrix}$$

$$=2\dot{\varphi}\begin{bmatrix}-\dot{X}_1\sin\varphi+\dot{X}_2\cos\varphi \\ -\dot{X}_1\cos\varphi-\dot{X}_2\sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$=2\dot{\varphi}\left(-\dot{X}_1\sin\varphi+\dot{X}_2\cos\varphi,-\dot{X}_1\cos\varphi-\dot{X}_2\sin\varphi\right)=0$$

dır. $\Rightarrow \dot{\varphi}=0$

$\Rightarrow \varphi$ sabittir, yani $B_1 = E/E'$ hareketi sadece kaymadan ibarettir. Tersine $B_1 = E/E'$ hareketi sadece bir kaymadan ibaret ise $\varphi$ = sabit olur. $\dot{\varphi}$ = 0 sabittir. $\dot{\varphi}$ = 0 olması $b_c = 0$ olması demektir.

## 2.3. Birinci ve ikinci İvme Polleri

$\dot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize birinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\dot{V}_f = \ddot{A}X+\ddot{C}=0 \Rightarrow X=-\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

$$\dot{A}=\dot{\varphi}\begin{bmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$\ddot{A}=\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}^2\cos\varphi-\ddot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\ddot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}^2\cos\varphi-\ddot{\varphi}\sin\varphi\end{bmatrix},\quad |\ddot{A}|=\dot{\varphi}^4+\ddot{\varphi}^2$$

$$\ddot{A}^{-1}=\frac{1}{\dot{\varphi}^4+\ddot{\varphi}^2}\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}^2\cos\varphi-\ddot{\varphi}\sin\varphi & \dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\ddot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}^2\cos\varphi-\ddot{\varphi}\sin\varphi\end{bmatrix}$$

bu değerler $X=-\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$ de yerlerine yazılırsa

$$X=P_1=\frac{1}{\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4}.$$

$$\left(\ddot{a}(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi)-\ddot{b}(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi),\ddot{a}(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi)+\ddot{b}(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi)\right)$$

şeklinde olur. Burada $P_1$ e hareketli düzlemdeki birinci mertebeden pol eğrisi denir.

Sabit düzlemdeki pol eğrisi $P_1'$ ile gösterilirse

$$P_1'=AP_1+C \text{ den}$$

$$P_1' = \left(\frac{1}{\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4}(\ddot{a}\dot{\varphi}^2+\ddot{b}\ddot{\varphi})+a,\frac{1}{\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4}(-\ddot{a}\ddot{\varphi}+\ddot{b}\dot{\varphi}^2)+b\right)$$

olarak bulunur.

$\ddot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü ise bize ikinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\ddot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

dir. Bu değerler hesaplanır yerlerine konulursa X hareketli düzlemdeki ikinci mertebeden ivme polünü verir ve $P_2$ ile gösterilir.

$$P_2 = \frac{-1}{\left(-\dot{\varphi}^3+\dddot{\varphi}\right)^2+\left(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)^2}\Big(\dddot{\varphi}(-3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos\varphi+(\dot{\varphi}^3-\dddot{\varphi})\sin\varphi)+\dddot{b}(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\varphi-(-\dot{\varphi}^3+\dddot{\varphi})\cos\varphi),\Big)$$

$$\Big(,\ddot{a}(-3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\varphi-(-\dot{\varphi}^3+\dddot{\varphi})\cos\varphi)+\dddot{b}(-3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos\varphi+(\dot{\varphi}^3-\dddot{\varphi})\sin\varphi)\Big)$$

sabit düzlemdeki pol eğrisi $P_2'$ ile gösterilirse,bu değerler

$$P_2' = AP_2 + C$$

de yerlerine yazılırsa

$$P_2' = \Big(\frac{1}{(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi})^2+(\dddot{\varphi}-\dot{\varphi}^3)^2}\,[(3\ddot{a}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-\dddot{b}(\dot{\varphi}^3-\dddot{\varphi})]+a,$$

$$\frac{1}{(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi})^2+(\dddot{\varphi}-\dot{\varphi}^3)^2}\,[(3\dddot{b}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-\ddot{a}(\dddot{\varphi}-\dot{\varphi}^3))]+b\Big)$$

elde edilir.

# KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2, 895s., Ankara.

[2] Hacısalihoğlu, H. H.1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2

[3] Müller, H. R. 1963. Kinematik Dersleri (Çeviri). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları No:27, 292s., Ankara.

[4] Yaglom, I. M. 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. 307s., New York.

[5] Ciğerim. Ü. 1993. Sayılar ve Geometriler. Gazi Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü.

[6] Ergin, A. E. 1988. Lorentz Düzleminde Kinematik. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.