Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Sayı : 4 Ekim 2003

MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE BİRİNCİ VE İKİNCİ İVME POLLERİ

H. ES*

ÖZET

Müller' in Öklid geometrisinde 1- parametreli hareketler için elde ettiği sonuçların; matris metotlarını kullanarak Minkowski geometrisinde karşılıklarını aradık. Ayrıca ilave olarak yeni teoremler verdik.

Anahtar Kelimeler: *Bir Parametreli Hareket, Pol Noktası*

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı kinematiktir. Bu cins hareketlerde hızlar kanunu ve ivmeler kanunu, sırası ile ,

$$V_a = V_f + V_r$$
$$b_a = b_f + b_r + b_c$$

den ibarettir, burada V_a ile b_a, mutlak hız ile mutlak ivmeyi; V_f ile b_f , sürüklenme hızı ile sürüklenme ivmesini, V_r ile b_r de rölatif hız ile rölatif ivmeyi ve b_c de Coriolis ivmesini göstermektedir.

2. MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE HAREKETLER

Tanım 2.1: (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

Genel hareketin denklemi, $A = A(t) \in L(2)$ ve $C = C(t) \in IR^2_1$ olmak üzere

$$Y = A\,X + C \qquad (\mathrm{I})$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{Y} = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \qquad (\mathrm{II})$$

olur. Burada $\dot{Y}$ ye **hareketin mutlak hızı**, $A\dot{X}$ ye **hareketin rölatif hızı**, $\dot{A}X + \dot{C}$ ye de hareketin **sürüklenme hızı** denir.

2.1 Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Lorentz anlamında bir parametreli $B_1 = L/L'$ hareketinde L de sabit bir X noktasının her t anında V_f sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar hareketli ve sabit düzlemde sabit noktalardır.

Teorem 2.1.1: Açısal hızı sıfır olmayan bir $B_1 = L/L'$ hareketinde, her t anında her iki düzlemde sabit kalan bir tek nokta vardır.

İspat: X$\in L$ noktası L de sabit olacağından $V_r = 0$ ve aynı nokta L' düzleminde de sabit olacağı için $V_f = 0$ olacaktır. O halde bu cins noktalar için $V_f = 0$

ise

$$V_f = 0 \Rightarrow \dot{A}X + \dot{C} = 0$$

$$\Rightarrow X = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \qquad \text{(III)}$$

olur. Gerçekten,

$$A = \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\, sh\varphi & \dot{\varphi}\, ch\varphi \\ \dot{\varphi}\, ch\varphi & \dot{\varphi}\, sh\varphi \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\dot{A} = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix}$$

$\det \dot{A} = \dot{\varphi}$, $\varphi \neq$ sabit alınırsa $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $\dot{A}$ regüler yani $\dot{A}^{-1}$ mevcut olur ve

$$\dot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} -sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & -sh\varphi \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla $V_f = 0$ denkleminin bir tek X çözümü vardır. Bu X noktasına hareketli düzlemdeki pol noktası denir. Bu nedenle (III) den

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} \dot{a} sh\varphi - \dot{b} ch\varphi \\ -\dot{a} ch\varphi + \dot{b} sh\varphi \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} \left(\dot{a} sh\varphi - \dot{b} ch\varphi, -\dot{a} ch\varphi + \dot{b} sh\varphi \right)$$

ve sabit düzlemdeki pol noktası (I) den

$$P' = AP + C$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılır ve hesaplanırsa

$$Y = P' = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -\dot{b} \\ -\dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$Y = P' = \left(\frac{-\dot{b}}{\dot{\varphi}} + a, \frac{-\dot{a}}{\dot{\varphi}} + b \right)$$

bulunur. Burada $\forall$ t için $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ kabul ediyoruz. Yani, açısal hız sıfır olmasın. Bu durumda her t anında hareketli ve sabit düzlemlerin her birinde bir tek pol noktasının olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 2.1.1: P = (p_1, p_2) noktasına, $B_1 = L/L'$ bir parametreli Lorentz hareketinin t anındaki polü veya ani dönme merkezi denir.

Teorem 2.1.2: P polünden X noktasına giden pol ışını, $\forall$ t anında V_f sürüklenme hız vektörüne Lorentz anlamında diktir.

İspat: $V_f = \dot{A}A^{-1}\, P'Y = \dot{\varphi}\,((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$ bulunur.

$$P'Y = ((y_1 - p_1), (y_2 - p_2))$$

dır. Buna göre,

$$\langle V_f, P'Y \rangle = 0$$

bulunur.

Teorem 2.1.3: V_f sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\left\| V_f \right\| = |\dot{\varphi}| \left\| PX \right\| \quad \text{dir.}$$

İspat: $V_f = \dot{\varphi}((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$

$$\left\| V_f \right\| = |\dot{\varphi}| \sqrt{\left| \langle (y_2 - p_2)^2 - (y_1 - p_1)^2 \rangle \right|}$$

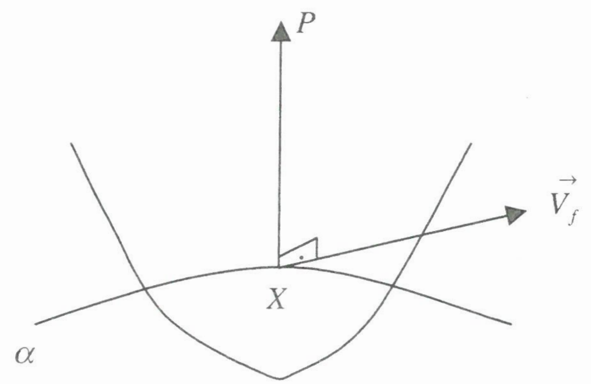
$$= |\dot{\varphi}| \left\| P'Y \right\| \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.1.4: Hareketli L düzleminin her X noktası, t anında P merkezli ve $\dot{\varphi}$ açısal hızlı bir Lorentz dönme hareketi yapar.

X, L nin tamamen keyfi bir noktası olduğundan aşağıdaki teoremi de verebiliriz.

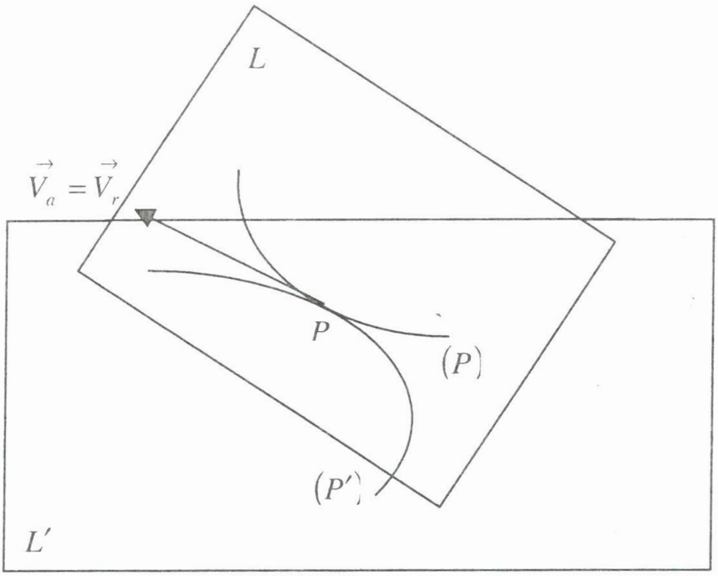
Teorem 2.1.5: Bir parametreli bir Lorentz hareketi, t anında hareketli L düzleminin L' ye göre hareketi P ani dönme polü etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızı ile belli olan bir dönmeden ibarettir.

Teorem 2.1.6: $B_1 = L/L'$ hareketinde L düzlemin X noktaları, L' sabit düzleminde normalleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Normalleri P polünden geçen yörüngeler

Tanım 2.1.2: $B_1 = L/L'$ Lorentz hareketinde her t anına karşılık gelen P pol noktalarının L hareketli düzlemindeki geometrik yerine $B_1 = L/L'$ hareketinin <u>hareketli pol eğrisi</u> denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının L' sabit düzlemindeki geometrik yerine ise <u>sabit pol eğrisi</u> denir ve (P') ile gösterilir (Şekil 2.2).



Şekil 2.1.2 Hareketli ve sabit pol eğrileri

P pol noktası L hareketli düzlemi üzerinde hareketli bir noktadır. Dolayısıyla P noktası (P) ve (P') pol eğrileriniçizerken bu eğrilerin her biri üzerinde birer hıza sahiptir.

Teorem 2.1.7: Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün, (P) ve (P') eğrileri üzerinde, her t anındaki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir deyişle iki eğri daima birbirine teğettir.

İspat: $X \in L$ noktasının (P) eğrisini çizme hızı V_r ve ayrıca bu noktanın (P') eğrisini çizme hızı da V_a dır. $V_f = 0$ olduğundan $V_a = V_r$ dir.

Tanım 2.1.3: Her t anında α ve α' gibi iki eğri birbirine teğet ve bu iki eğriyi çizen noktanın bu eğriler üzerinde dt kadar zamanda aldıkları ds ve ds'

yolları aynı ise α ve α' eğrilerine birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyorlar denir.

Teorem 2.1.8: Bir parametreli düzlemsel bir $B_1 = L/L'$ Lorentz hareketinde L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat : Bir eğrinin yay elementinin tanımına göre (P) nin yay elementi $ds = \|V_r\|$ ve (P') nün ki de $ds' = \|V_a\|$ dır. (P) ve (P') için $V_a = V_r$ olduğundan $ds = ds'$ dür.

Bu teoreme göre, zamandan bahsetmeden bir Lorentz hareketini tanımlayabiliriz. Bir $B_1 = L/L'$ Lorentz hareketi, L nin (P) hareketli pol eğrisi, L' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile elde edilebilir.

Tanım 2.1.4: X noktasının L' sabit Minkowski düzlemine göre mutlak ivme vektörü $\dot{V}_a$ dır. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_a = \dot{Y} \quad \text{idi}$$

$$b_a = \dot{V}_a = \ddot{Y}$$

dir.

Tanım 2.1.5: X , L hareketli Minkowski düzleminin sabit bir noktası olsun. X noktasının L' sabit Minkowski düzlemine göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve b_f ile göstereceğiz

Sürüklenme ivmesinin hesabında X, L nin sabit bir noktası olacağından

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C}$$

olur.

2.2 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

L Minkowski düzleminin L' düzlemine göre $B_1 = L/L'$ Minkowski hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında L düzlemine göre, dolayısıyla da L' düzlemine göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın . X in hareketiyle elde edilen hız formülleri elde edilmişti şimdi ise X noktasının ivmesi incelenecektir.

Tanım 2.2.1: X noktasının L hareketli düzlemine göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in L deki rölatif ivme vektörü diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X noktası L de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

Teorem 2.2.1: L hareketli Minkowski düzleminde bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$ olup buna Minkowski anlamında Corilois ivmesi adını vereceğiz).

Sonuç 2.2.1: Bir $X \in L$ noktası L de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat : $V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$ idi

her iki tarafın türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.2.2 b_c Coriolis ivme vektörü, V_r rölatif hız vektörüne Minkowski anlamında diktir.

İspat:

$$b_c = 2\dot{A}\dot{X}$$

$$= 2\dot{\varphi}\begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi}\begin{bmatrix} \dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi \\ \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi}\left(\dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi, \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi\right)$$

ve

$$V_r = A\dot{X}$$

$$= \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$=(\dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi, \dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi)$$

bu değerlerle Minkowski anlamında iç çarpımı yapılırsa

$$\langle V_r , b_c \rangle = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.2: L hareketli Minkowski düzleminde, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, B_1 hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat: X noktasının b_c Coriolis ivme vektörü

$$b_c = 2\dot{A}\dot{X}$$

$$=2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi \\ \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi} \left(\dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi, \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi \right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = 0$$

$\Rightarrow \varphi$ sabittir, yani $B_1 = L/L'$ hareketi sadece kaymadan ibarettir.

Tersine $B_1 = L/L'$ hareketi sadece bir kaymadan ibaret ise φ = sabit olur. Bu da $\dot{\varphi} = 0$ demektir. $\dot{\varphi} = 0$ olması $b_c = 0$ olması demektir.

2.3. Birinci ve ikinci İvme Polleri

$\dot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize birinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

$$\dot{A} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix},$$

$$\ddot{A} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi & \dot{\varphi}^2 sh\varphi + \ddot{\varphi} ch\varphi \\ \dot{\varphi}^2 sh\varphi + \ddot{\varphi} ch\varphi & \dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi \end{bmatrix}, \left|\ddot{A}\right| = \dot{\varphi}^4 - \ddot{\varphi}^2$$

$$\ddot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}^4 - \ddot{\varphi}^2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi & -\dot{\varphi}^2 sh\varphi - \ddot{\varphi} ch\varphi \\ -\dot{\varphi}^2 sh\varphi - \ddot{\varphi} ch\varphi & \dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi \end{bmatrix}$$

bu değerler $X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$ de yerlerine yazılırsa X= $P_1 = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^4} \cdot \left(\ddot{a}(\dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi) - \ddot{b}(\dot{\varphi}^2 sh\varphi + \ddot{\varphi} ch\varphi), -\ddot{a}(\dot{\varphi}^2 sh\varphi + \ddot{\varphi} ch\varphi) + \ddot{b}(\dot{\varphi}^2 ch\varphi + \ddot{\varphi} sh\varphi)\right)$

şeklinde olur. Burada P_1 e hareketli düzlemdeki birinci mertebeden pol eğrisi denir.

Sabit düzlemdeki pol eğrisi (P_1') ile gösterilirse

$$P_1' = AP_1 + C$$

den

$$P_1' = \left(\frac{1}{\ddot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^4}(\ddot{a}\dot{\varphi}^2 - \ddot{b}\ddot{\varphi}) + a, \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^4}(\ddot{b}\dot{\varphi}^2 - \ddot{a}\ddot{\varphi}) + b \right)$$

bulunur.

$\ddot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü ise bize ikinci mertebeden ivme polünü verir.

3

$$\dddot{V}_f = \ddot{A}X + \dddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\dddot{C}$$

dir. Bu değerler hesaplanır yerlerine konulursa X in değeri L hareketli düzlemdeki ikinci mertebeden ivme polünü verir ve P_2 ile gösterilir.

$$P_2 = \frac{1}{\left(\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}\right)^2 - \left(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)^2} \left(\ddot{\varphi}(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} ch\varphi + (\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) sh\varphi) - \dddot{b}(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} sh\varphi - (\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) sh\varphi),\right)$$
$$\left(,\dddot{a}(-3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} sh\varphi - (\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) ch\varphi) + \dddot{b}(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} ch\varphi + (\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) sh\varphi)\right)$$

sabit düzlemdeki pol eğrisi P_2' ile gösterilirse

$$P_2' = AP_2 + C$$

den

$$P_2' = \frac{1}{\left(\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}\right)^2 - \left(3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)^2}(3\dddot{a}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \dddot{b}(\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) + a, 3\dddot{b}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \dddot{a}(\dot{\varphi}^3 + \ddot{\varphi}) + b)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2, 895s., Ankara.

[2] Hacısalihoğlu, H. H.1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2

[3] Müller, H. R. 1963. Kinematik Dersleri (Çeviri). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları No:27, 292s., Ankara.

[4] Yaglom, I. M. 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. 307s., New York.

[5] Ciğerim. Ü. 1993. Sayılar ve Geometriler. Gazi Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü.

[6] Ergin, A. E. 1988. Lorentz Düzleminde Kinematik. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.