Elementary Education Online, 2018; 17(1): pp. 187-206
İlköğretim Online, 2018; 17(1): s.187-206 . [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr
doi 10.17051/ilkonline.2018.413757

Öğrenme Rotaları Temelli Öğretimde Öğretmen Adaylarının Matematiksel Alan Bilgilerini Yeniden Yapılandırmaları[1]

Pre-Service Teachers' Restructuring of Mathematical Content Knowledge in a Learning Trajectories based Instruction

Zuhal Yılmaz, *Lefke Avrupa Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği*, zyilmaz@eul.edu.tr
Çiğdem Haser, *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi*, chaser@metu.edu.tr

Öz. Çalışmanın amacı sınıf öğretmeni adaylarının eşpaylaşım konusu ile ilgili matematiksel alan bilgilerini (MAB) öğrenme rotaları temelli bir öğretim ortamında nasıl yeniden yapılandırdıklarını incelemektir. Bu bağlamda dokuz öğretmen adayı ile bir öğretim deneyi eşpaylaşım öğrenme rotası kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bulguları, adayların mevcut kavram yanılgı ve hatalarını düzelttiklerini; bu yanılgı ve hataların altında yatan sebepleri açığa çıkardıklarını ortaya koymaktadır. Aynı zamanda, adayların doğru matematiksel sonuçların neden doğru olduklarını da irdeledikleri; etkinliklerde farklı matematiksel stratejileri ve gösterimleri kullandıkları; kendilerinin ve diğer adayların matematiksel stratejilerini derinlemesine irdelerken doğru matematiksel terminolojileri kullandıkları gözlenmiştir. Bu bulgular, adayların MABlerinin öğretim deneyi başına kıyasla geliştiğini göstermektedir. Bu gelişmenin nasıl bir örüntü içerisinde gerçekleştiği yeniden yapılandırma eylemleri olarak kodlanmıştır. Çalışmanın sonuçları, adayların MABlerini yeniden yapılandırma eylemleri için gelişmekte olan bir çerçeveyi ortaya koymaktadır. Bu çerçeve, adayların MABlerini yedi farklı eylem ile yeniden yapılandırdıklarını göstermektedir. Bu eylemler Genel Alan Bilgisini, Özel Alan Bilgisini ve Yatay Alan Bilgisini yapılandırma eylemleri olarak alt kategorilerde ele alınmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Öğrenme rotaları, öğretmen adayı, matematiksel alan bilgisi, yeniden yapılandırma

Abstract. The purpose of this study was to explore how elementary pre-service teachers (PTs) restructure their existing mathematical content knowledge (MCK) for equipartitioning related mathematical ideas in a Learning Trajectories Based Instruction (LTBI). A teaching experiment was conducted with nine elementary education PTs with the use of equiparitioning learning trajectory. The findings of this study briefly indicated that PTs' existing misconceptions and mathematical errors were remediated and underlying reasons behind these misconceptions and errors were revealed in LTBI. PTs also examined mathematically correct responses. In addition, a variety of mathematical strategies and representations was utilized, and then explained by PTs to the peers in mathematically correct ways as they worked on the activities. These findings suggested that PTs had improved their existing MCK. The process of these improvements in PTs' MCK and the observed pattern in the improvements was categorized under seven restructuring practices. These practices suggested an emergent framework for MCK restructuring practices. These seven practices were observed in relation to PTs' restructuring practices of Common Content Knowledge, Specialized Content Knowledge, and Horizon Content Knowledge.

Keywords: Learning trajectories, pre-service teacher, mathematical content knowledge, restructuring

[1] Bu çalışma ilk yazarın ikinci yazarın danışmanlığında yapmış olduğu doktora tez çalışmasından üretilmiştir.

Geliş tarihi: 05.04.2017 Kabul tarihi: 02.10.2017 Yayımlanma tarihi: 15.03.2018

SUMMARY

Purpose and Significance

Recent studies (Butterfield, Forrester, McCullum & Chinnapan, 2013; Wilson, Mojica, & Confrey, 2013) conjectured that integrating learning trajectories (LTs) into existing teacher education programs has great potential to enhance PTs' conceptual understanding of mathematics. In addition, this integration supports PTs' ability to understand how students' mathematical thinking evolves over time before they work in the field as a novice teacher. Thus, integrating LTs in teacher education provides PTs with early opportunities to experience how students learn mathematics and what type of problems PTs may encounter with their students' mathematical learning (Mojica, 2010; Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012). Recent studies (Sztajn et al., 2012; Wilson et al., 2013) have indicated that Learning Trajectories Based Instruction (LTBI) could be utilized as a reference tool for addressing the current problems in teaching mathematics. Sztajn et al. (2012) defined LTBI as "using research on LTs to refine and unify various frameworks from research on teaching" (p. 152). They perceived LTBI as a theory of teaching that is a possible explanatory framework for instruction. Thus, this study seeks answer to the question of how PTs restructure their mathematical content knowledge (MCK) and student knowledge (SK) in LTBI.

Methodology

The main purpose of teaching experiments is "to experience, firsthand, students' [pre-service teachers] mathematical learning and reasoning" (Steffe & Thompson, 2000, p. 267). Moreover, these experiments picture the living model of the learning that occurs in the classroom (Steffe & Thompson, 2000). As a result, in this study teaching experiment methodology was utilized to understand and document how LTBI influence PTs' existing mathematical content and student knowledge structure and reasoning (Steffe & Thompson, 2000). The study was conducted in two phases: The pilot implementation and the actual teaching experiment. The pilot study lasted three weeks and the actual experiment lasted six weeks. Ten PTs participated in the pilot study and 9 PTs in the actual experiment. These PTs were purposefully invited to the study since the scope of the mathematics covered in Equipartitioning Learning Trajectory (K-4) aligns with the mathematics topics covered in elementary school mathematics in Turkey, which PTs will teach in their future career. Each session of the teaching experiment was videotaped accompanied with field notes and PTs' written work. Video data were analyzed using Powell, Francisco and Maher's (2003) analytical method. Analysis of field notes and PTs' written works were utilized as supportive empirical evidence. Shared viewing and utilization of multiple sources of data were utilized as a way of triangulation (Creswell, 2007). To ensure inter-observer reliability, the first author and a second coder coded the critical events of the data.

Results

The results of this study suggested an emergent framework of knowledge restructuring practices of PTs. The findings of the study indicated that PTs restructured their MCK by exhibiting seven practices. These practices were determined under three sub-categories of MCK as follows: Remediating and shifting, expanding and challenging practices for restructuring Common Content Knowledge; internalizing and sizing up practices for Specialized Content Knowledge and connecting and generalizing practices for Horizon Content Knowledge.

Discussion and Conclusions

All the experiences PTs gathered in this LTBI intervention design enhanced their skills on understanding students' mathematics and their own way of mathematical thinking. Also, they had the opportunity to remediate their own misconceptions. Moreover, they realized that the elementary school mathematics was not that simple as they assumed (Philipp, 2008). These experiences have proved to be invaluable since current professional development programs, which are mostly designed to fill the gaps in teachers' MCK, have mostly become insufficient due to time restrictions, financial concerns, and teachers unwillingness (Sawchuk, 2010). Thus, the studies like the current one have the potential to train teacher candidates in a way in which they are likely to

acquire certain skills for teaching and fill their MCK gaps so that they can perform sound practices for teaching later. In addition, this study has the potential to address the practices that can be used to determine whether PTs actually enhanced and restructured their MCK.

GİRİŞ

Birçok araştırmacı (örneğin, Clements, Sarama ve Julie, 2009; Fennema ve Franke, 1992; Ma, 1999) öğrencilerin matematiksel düşünmelerini ve öğrenmelerini anlamaya yönelik çalışmalar yapmışlardır. Fakat, bu çalışmalarda ele alınan konular öğrencinin matematik öğrenmesi üzerinde etkili faktörlerin sadece bir kısmını teşkil etmektedir (Baki ve Gökçek, 2007; Ball ve Forzani, 2010; Philipp, 2008). Öğretmenin sahip olduğu matematiksel bilgi birikimi de öğrencinin matematik öğrenmesi üzerinde önemli bir etkiye sahiptir (Clements vd., 2009). Literatürdeki birçok çalışma öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının da öğrencilerin sahip olduğu matematiksel kavram yanılgılarına ve zorluklara sahip olduğunu ortaya koymaktadır (Butterfield, Forrester, McCallum ve Chinnapan, 2013; Philipp, 2008; Ryan ve Mcrae, 2006). Bu matematiksel bilgi birikimindeki eksikliklerin ise ilerde matematiğin öğretilmesindeki eksiklere sebebiyet verdiği düşünülmektedir (Hill, Rowan, ve Ball, 2005; Ma, 1999; Philipp, 2008). Benzer eksiklikler ve problemler Türkiye'deki öğretmen adaylarının pratiklerinin ve bilgi birikimlerinin araştırıldığı çalışmaların bulguları ile ortaya konulmuştur (örneğin, Baştürk, 2007; Eraslan, 2009; Hacıömeroğlu ve Taşkın, 2010). Bu çalışmalar öğretmen adaylarının öğretmenlik mesleğine başladıklarında öğretecekleri matematik konularını tam bilmedikleri (Baki; 2013; Toluk-Uçar, 2010; Zembat, 2007), aldıkları matematik eğitimi dersleri ile matematik derslerinin içeriklerini ilişkilendiremedikleri (Eraslan, 2009), ilköğretim seviyesindeki matematiğin içeriğinin önem derecesini hafife aldıkları, matematik eğitimi ve matematik derslerinin öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiklerine dair bilgilerini ve uygulamalarını geliştirmede yetersiz kaldığı (Baştürk, 2007), matematiksel kural ve uygulamaların neden işe yaradığını kavramsal olarak açıklamada yetersiz oldukları (Baki, 2013; Çıkla ve Duatepe, 2002; Zembat, 2007) gibi sonuçları ortaya çıkarmıştır. Matematik öğretmen adaylarının özellikle matematiksel bilgi eksikliği ve bu bilginin eksikliğinin matematik öğretimine olumsuz yansıması yukarıda bahsedilen, matematik eğitimi derslerinin içeriğinin matematik derslerinin içeriği ile ilişkilendirilememesi, öğretmeleri gereken matematik konularına dair alan bilgilerinin eksikliği, adayların bu derslerde öğrendiklerini nasıl öğreteceklerine dair zorluk yaşamaları, gibi problemlerin çözülmesi ihtiyacını ortaya çıkarmıştır.

Öğretmen adayları, öğrencilerin zaman içerisinde matematiği nasıl öğrendiklerini, matematiksel akıl yürütmelerini nasıl geliştirdiklerini anlayacak şekilde yetiştirilmelidir (Shulman, 1986). Bu bağlamda sahip oldukları matematiksel alan bilgileri ve öğrenci bilgileri mevcut araştırmalar ve matematik eğitimindeki gelişmeler göz önüne alınarak sürekli olarak yenilenmeli ve geliştirilmelidir.

Son on yıldır araştırmacıların incelediği bir alan olarak öne çıkan öğrenme rotaları (learning trajectories), öğrencilerin öğrenme ve düşünmelerinin gözlem ve deney sonucu elde edilen veriler ile incelendiği araçlardır. Öğrencilerin az karmaşıktan çok karmaşığa doğru matematiksel düşünceleri nasıl öğrendiklerinin yörüngesini ortaya koyan bu araçların, son yıllarda öğretmen eğitiminde de etkili yol oynayabilecek bir araç olduğunu ifade edilmektedir (Butterfield vd., 2013; Clements ve Sarama, 2013; Sztajn, Confrey, Wilson ve Edgington, 2012). Mevcut araştırmaların ortaya koyduğu, öğretmen adaylarının matematiksel bilgilerinde eksikliklerin olması, öğrencilerin sahip olduğu matematiksel kavram yanılgılarına adayların sahip olması, adayların öğrencilerin göstermiş olduğu matematiksel kavram yanılgılarını ve hatalarını tespit etme ve düzeltmede yetersiz kalmaları bu çalışmanın temel problemlerini oluşturmaktadır. Bu problemlerin ortadan kaldırılması için öğrenme rotaları temelli bir öğretim deneyi gerçekleştirilerek adayların matematiksel alan bilgilerinin yeniden yapılandırılması bu çalışmada amaçlanmıştır.

Öğrenme rotaları, öğrencilerin öğrenme zorluklarını, kavram yanılgılarını ve matematiksel stratejilerini mevcut literatürün kapsamlı sonuçları ile birleştirerek oluşturulan araçlardır (Confrey vd., 2009). Öğrenme rotalarının bu özelliğinin, öğretmen adaylarının mevcut matematiksel bilgi birikimlerini geliştirmelerinde ve öğrencilerin matematiksel öğrenmelerini anlamalarında rol oynayacağını düşünülerek, bu çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının mevcut matematiksel alan bilgilerini öğrenme rotaları temelli bir öğretim (Sztajn vd., 2012) kullanılan bir öğretim deneyinde nasıl yeniden yapılandırdıkları incelenmektedir. Bu amaç doğrultusunda bu çalışmada "Öğretmen adayları öğrenme rotaları temelli öğretim deneyinde matematik alan bilgilerini yeniden nasıl yapılandırmışlardır? Bu yapılandırma sürecinde adayların sergilemiş oldukları eylemler nelerdir?" araştırma sorularına cevap aranmaktadır.

Kuramsal Alt Yapı

Öğrenme Rotaları

Matematik öğrenme ve öğretme alanında yapılan çalışmalarda kullanılan öğrenme rotaları düşüncesi üzerine farklı yorumlar vardır (Clements ve Sarama, 2004). Bu fikirler temelde Simon'un ortaya koyduğu "varsayımsal öğrenme rotaları" (hypothetical learning trajectory) kavramına dayanır (Confrey vd., 2009; Wilson, Sztajn, Edington ve Confrey, 2014). Simon (1995) varsayımsal öğrenme rotalarını öğretmenin öğrenmenin izleyeceği yol hakkındaki tahminleri" (s.135) şeklinde tanımlamış ve varsayımsal olarak nitelendirmesinin sebebini şu şekilde ifade etmiştir: ".... Varsayımsaldır çünkü öğrenme rotası kesin olarak önceden öngörülemez ve beklenen eğilimi karakterize etmektedir" (s.135). Simon'un (1995) belirttiği bu varsayımsal yaklaşım, öğrenme rotalarının ampirik veriler ile yapılandırılmasının temelini oluşturmuştur. Deneysel veriler ile çalışmalar yapan birçok araştırmacı öğrenme rotası kavramını yeniden tanımlamışlardır. Clements ve Sarama (2004) öğrenme rotalarının üç temel öğeden oluştuğunu ifade etmektedirler. Bunlar; nihai bir matematiksel öğrenme hedefi, öğrenmenin ve düşünmenin gelişimsel ilerlemesi ve sıralı öğretim etkinlikleridir. Corcoran, Mosher ve Rogat (2009) öğrenme rotalarını belirli bir konu alanında ve uygun bir süre içerisinde öğrencilerin az karmaşıktan çok karmaşık düşünmeye geçiş sürecinde izleyecekleri varsayımsal bir rota olarak tanımlamışlardır. Bu iki tanımın ortak noktası belirli bir konu alanında (nihai hedef) öğrencinin öğrenirken izlediği muhtemel yolları ele almalarıdır. Clements ve Sarama (2004) farklı olarak, bu izlenilecek yollarda öğrenmenin gerçekleşmesi için gerekli olan öğretim etkinliklerini de tanımlarında belirtmişlerdir.

Confrey ve diğerleri (2009) bundan önceki tanımlardan farklı olarak öğrenme rotalarını araştırmaların sentezi, ampirik veriler ve öğretim faaliyetleri ve araçları boyutunda tanımlamışlardır. Öncelikle belirli bir matematik konu alanında yapılan araştırmaların kapsamlı bir sentezi yapılıp, bu çalışmaların öğrencinin o konu alanını nasıl öğrendiğinin rotası belirlenir. Daha sonra, araştırmacı bu bilgiler ışığında etkinlikler tasarlar ve öğrencilerle birebir çalışıp öğrencinin zaman içerisinde az karmaşık düşüncelerden daha karmaşık düşünmeye nasıl geçtiğini ampirik veriler ile saptar (Franklin, Yılmaz ve Confrey, 2010). Bu süreç devamlı bir değerlendirmeyi, yansıtmayı ve öğrenme rotasının gözden geçirilip gerekli düzenlemelerin yapılmasını içeren dinamik bir süreçtir (Confrey ve Maloney, 2011; Duncan ve Hmelo-Silver, 2009).

Bu tanımlarda öğrenme rotalarının kullanımı üzerine farklılıklar bulunmasına rağmen, temelde öğretim etkinliklerinin (görevlerinin) kullanımı yolu ile öğrenci ve matematiksel kavramlar arasında etkileşimin oluşması ve bu etkileşimin süreç içinde nasıl geliştiğinin incelenmesinin önemi üzerinde durulmuştur. Bu çalışma kapsamında ise Confrey ve diğerlerinin (2009) tanımı temel alınmış olup Confrey ve araştırma grubunun ortaya koyduğu eşpaylaşım öğrenme rotası kullanılmıştır.

Eşpaylaşım kavramı bir topluluktan eşit miktarda nesneye sahip grupların oluşturulması veya bir bütünden (bütünlerden) eş-parçalar oluşturulması olarak tanımlanmıştır (Confrey, 2008; Confrey vd., 2009). Eşpaylaşım öğrenme rotasının oluşturulması ve bu rotanın doğruluğunun test edilmesi rasyonel sayılar üzerine yayınlanmış olan araştırmaların bir sentezi ile başlamıştır (Confrey, 2008). Bu sentez ilk öğrenme rotasının iskeletini oluşturma ve eşpaylaşım öğrenme rotasının kapsadığı dört eş parçaya ayırma durumunu içermektedir. Bu durumlar sırası ile (1) Durum A: Ayrık nesnelerden oluşan bir topluluğu eş paylaştırma (2) Durum B: Bir bütünü eş parçalara ayırma (3) Durum C ve D: Birden fazla bütünü kişiler arasında eş paylaştırma, bu paylaşım neticesinde basit kesir (durum C) ya da bileşik kesir (durum D) oluşmasıdır (Confrey vd., 2009; Toluk ve Middleton, 2001). Bu literatür sentezinden sonra öğrencilere uygulanan etkinlik temelli klinik mülakatların analizi neticesinde öğrenme rotasının *yeterlilik düzeyleri* ve *görev* *sınıfları* belirlenmiştir. Bu yeterlilik düzeyleri öğrenme rotası boyunca az karmaşıktan çok karmaşığa doğru giden bilişsel düzeylerdir (Confrey, 2012; Wilson, Sztajn, Edington, Confrey, 2014). Her bir düzeye bağlı olarak ise kendi içerisinde gelişimsel bir ilerlemeyi ifadelendiren matematiksel davranışların çıktıları, öğrencilerin görüşmelerdeki bilişsel etkinlikleri analiz edilerek belirlenmiştir. Örneğin, eşpaylaşım öğrenme rotasının ilk düzeyi (düzey 1) bir topluluğu eş parçalara ayırmak iken bu düzeye bağlı çıktılar az karmaşıktan çok karmaşığa doğru sırası ile şu şekildedir:

1. Böyle bir eşit paylaşımının yapılamayacağına inanır.
2. Belirli bir topluluğu eşit büyüklükteki gruplara ayıramaz.
3. Belirli bir topluluğu sistematik olmayacak şekilde eşit büyüklükteki gruplara ayırır.
4. Belirli bir topluluğu bire-bir eşleme kullanarak sistematik şekilde eşit büyüklükteki gruplara ayırır.
5. Belirli bir topluluğu birleşik birim kullanarak (örn. Aynı anda iki nesneyi dağıtmak) eşit büyüklükteki gruplara ayırır. Gerektiği durumlarda birebir-eşlemeye geri döner (Yilmaz, 2011).

Bilişsel düzeyler öğrenme rotasının dikey boyutunu (satırlar) oluştururken, iki boyutlu bir matris olarak tasarlanan öğrenme rotasının yatay boyutunu (sütunlar) görev sınıfları oluşturmaktadır (Confrey vd., 2009). Görev sınıfları ise "Hedeflenen eşpaylaşım davranışları açısından benzer uyarıcı özelliklere sahip farklı sorular grubudur" (Confrey, vd., 2009). Ek A eşpaylaşım öğrenme rotasının bilişsel düzeylerini göstermektedir (Corcoran vd., 2009). Confrey ve diğerlerinin ortaya koymuş olduğu öğrenme rotası tanımını temel alan öğrenme rotaları temelli öğretim (Sztajn vd., 2012) yaklaşımı, eşpaylaşım öğrenme rotasının kullanıldığı bu çalışmada kuramsal çerçeve olarak kullanılmıştır. Sztajn ve diğerleri (2012) bu kuramı "araştırmalarda ortaya konulan öğrenme üzerine olan çeşitli çerçeveleri birleştirmek ve yenilemek için öğrenme rotaları araştırmalarını kullanmaktır" (s. 152) şeklinde tanımlamışlardır.

Matematiksel Alan Bilgisi: Öğrenme Rotaları Temelli Öğretim Kapsamında Kavramsallaştırma

Shulman'ın (1986) Konu Alan Bilgisi ve Pedagojik Alan Bilgisi üzerine yapmış olduğu öncül çalışmasının üzerine Ball, Thames ve Phelps (2008) yapmış oldukları çalışmada konu alan bilgisini şu kategoriler altında incelemişlerdir: "Genel Alan Bilgisi, öğretimden başka bağlamda gerekli olan matematiksel bilgi; Özel Alan Bilgisi, öğrencinin matematiği anlamasını sağlayacak şekilde kullanılan matematiği bilme; Yatay Alan Bilgisi, şu an öğrenilen matematiksel düşünceleri ileri matematik konuları ile ilişkilendirebilme" (s. 106). Bu çalışma kapsamında matematiksel alan bilgisi (MAB) konu alan bilgisi kavramının yerine kullanılmıştır.

Bu çalışmada MABni oluşturan bu bilgi çeşitleri, öğrenme rotaları temelli öğretim kuramının getirdiği yaklaşım doğrultusunda Sztajn ve diğerlerinin (2012) tanımladığı şekliyle ele alınmıştır. Öğrenme rotaları temelli öğretim, öğrenme rotaları üzerine yapılmış çalışmaların bulgularını ve öğretim üzerine mevcut araştırmalarda ortaya konulmuş çerçevelerin revize edip birleştiren öğretim için açıklayıcı bir çerçeve ya da yeni ortaya konulmuş ve gelişmekte olan öğretim teorisi seklinde tanımlanmıştır (Sztajn vd., 2012). Bu öğretim yaklaşımı öğrencinin öğrenmesini öğretimin merkezindeki yapı olarak ele alır. Sztajn ve diğerlerine göre, öğretim sürecinde, öğretmenin öğrenme rotasının içerdiği bilgiyi bilme düzeyi, bir diğer deyişle öğrencilerin az karmaşık matematiksel düşüncelerden çok karmaşık matematiksel düşüncelere nasıl ulaştığını bilmesi, öğretim hakkında verilen kararları büyük ölçüde etkilemektedir(Sztajn vd., 2012).

Bu yaklaşıma göre, Sztajn ve diğerleri (2012) genel alan bilgisi (GAB) öğrenme rotasının her bir düzeyinde belirtilen matematiksel düşünceleri bilme ve uygulayabilme; özel alan bilgisi (ÖAB) öğrenme rotasının içermiş olduğu matematiksel bilgileri, kavram yanılgılarını, hataları irdeleyebilme ve öğrenme rotasındaki matematiksel bilgileri ve fikirleri birden fazla gösterim ve strateji ile inceleyebilme; yatay alan bilgisi (YAB) ise öğrenme rotasındaki matematiksel fikirleri ve bilgileri birbirleri ile ve ileri matematik konuları ile ilişkilendirme ve buna ek olarak genellenebilir matematiksel sonuçlara ulaşabilme olarak tanımlanmıştır.

YÖNTEM

Araştırma Deseni

Bu araştırmanın yöntemi öğretim deneyi yöntemidir. Öğretim deneylerinin ana amacı öğrencilerin ilk elden matematik öğrenmelerini ve akıl yürütmelerini anlamak (Steffe ve Thompson, 2000; Steffe ve Ulrich, 2014) ve öğretim kararlarını buna göre yönlendirmek, ve aynı zamanda daha iyi bir öğrenme sağlamaktır (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003; Engelhardt, Corpuz, Ozimek ve Rebello 2004). Öğretim deneyleri öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin ve davranışlarının modelini ortaya çıkarmada etkili bir yöntemdir (Steffe ve Thompson, 2000). Bu sebeple, bu çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının matematik alan bilgilerini öğrenme rotaları temelli öğretimde nasıl ve hangi eylemleri göstererek yeniden yapılandırdıklarını incelemek amacı ile yapılandırmacı öğretim deneyi yöntemi (Steffe ve Thompson, 2000) kullanılmıştır.

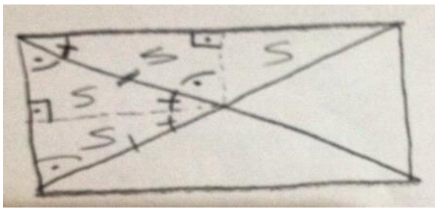
Bu çalışmada, öğretim deneyi üç aşamada gerçekleşmiştir. İlk aşamada, eşpaylaşım öğrenme rotasının yeterlilik düzeylerini kapsayan öğretim etkinlikleri ve değerlendirme soruları geliştirilmiştir. Bu etkinliklerin ve değerlendirme sorularının bir kısmı araştırmacı ve doktora eğitimine sahip bir matematik eğitimci ile birlikte geliştirilmiştir ve bir kısmı da önceki araştırmalardan (Empson ve Turner, 2006; Mojica, 2010; Stein ve Smith, 2011; Wilson, 2009) uyarlanmıştır. İkinci aşamada geliştirilen bu materyallerden yeni geliştirilenler 3 hafta süren bir pilot uygulamada kullanılmış ve eksiklikleri, işleyen ve işlemeyen yönleri tespit edilmiştir. Son aşamada ise 6 haftalık ana öğretim deneyi uygulanmıştır.

Pilot Uygulama

Pilot çalışma kapsamında bir özel üniversitenin İlköğretim Bölümü'nde üçüncü sınıfa devam etmekte olan 10 sınıf öğretmeni adayı amaçlı örnekleme kullanılarak seçilmiştir. Bu örnekleme yönteminin kullanılma sebebi eşpaylaşım öğrenme rotasının kapsadığı matematiksel konuların ilkokul matematik konuları ile örtüşüyor olmasıdır. Ayrıca, bu örnekleme yöntemi seçilen adayların mezuniyetlerinden sonra öğretmeleri gereken matematiği bilme düzeylerini ve var olan bilgilerini nasıl yapılandıklarını tespit etme amacıyla kullanılmıştır. Üç hafta uygulanan öğretim deneyinde eşpaylaşım öğrenme rotasını temel alan etkinlikler ve değerlendirme soruları kullanılmıştır. Birinci araştırmacı bu öğretim deneyinde öğretmen rolündedir. Pilot çalışmada öğretmen adaylarının verilen etkinliklerdeki ve sorulardaki stratejilerin ve karşılaştıkları zorlukların saptanması için her bir derste ses kaydı alınmıştır. Ses kaydı verilerini desteklemek amacı ile adayların yazılı çalışmalarının ve sınıf içi önemli etkinliklerin fotoğrafları da alınmıştır.

Pilot çalışmanın sonunda ana çalışmada kullanılacak etkinlikler ve değerlendirme soruları revize edilmiştir. Örneğin, öğretmen adaylarına pilot çalışmada verilen bir bütünü eş parçalara ayırma etkinliğinde adayların verdikleri cevapları doğrulamadıkları ve bir bütünü tek, çift, bir sayının katları olacak şekilde farklı sayılarda eş parçalara ayırmadaki bilişsel zorluk farklılığını tespit edemedikleri görülmüştür. Bu doğrultuda, ana çalışmada kullanılan etkinliklere öğretmen adaylarının verdikleri cevapları doğrulamaları için ek sorular eklenmiş ve etkinliğin içeriğine birden fazla eşpaylaşım durumunu içeren matematiksel sorular ve sonunda genelleme (n adet eş parça oluşturulursa) durumu eklenmiştir. Pilot çalışmada toplanan verilerin analizleri bilgi yapılandırma eylemleri kategorilerinin ilk taslağını oluşturmada kullanılmıştır.

Pilot çalışmanın sonucuna göre belirlenen MAB ile ilgili iki kategori belirlenmiştir: (1) Alan bilgisindeki değişiklik ve (2) kavram yanılgıları ve öğrenme zorlukları. Bu kategorilerin her birine bağlı olan alt eylemler de kodlanmıştır. Birinci kategori altında genişletme ve değiştirme, ikinci kategori altında tanımlama ve düzeltme kategorileri yer almaktadır. Örneğin, öğretmen adayları kendilerinin sahip oldukları matematiksel kavram yanılgılarının farkına vararak bu kavram yanılgılarını düzelttiklerinde, bu eylemleri tanımlama ve düzeltme kategorisi altına kodlanmıştır. Bu duruma pilot çalışmadan bir örnek şu şekilde verilebilir: beş öğretmen adayı pilot çalışmada bir dikdörtgen seklindeki bütünü dört eşit büyüklükte parçaya köşegenlerinden ayıramayacaklarını söylemişlerdir. Bu öğretmen adayları oluşan üçgenlerin birbirinden farklı boyutta ve büyüklükte olduğunu ifade etmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise köşegenlerden iki kesenin bu dikdörtgen şeklindeki bütünü eşit büyüklükte parçalara ayırdığını düşünmektedirler. Bu gruptaki adaylardan biri neden bu şekilde düşündüğünü şekil üzerinde açıklamıştır. Şekil 1 adayın çizimini göstermektedir.



Şekil 1. *Köşegenleri çizerek bir dikdörtgeni dört eş parçaya ayırmak*

Bu öğretmen adayı dikdörtgenin sırası ile kısa ve uzun kenarları tabanı olan iki üçgeni iki eş parçaya üçgenin tepe noktasından tabana bir dikme indirerek bölmüştür. Daha sonrasında, Açı-Kenar-Açı bağıntısını kullanarak oluşan küçük üçgenlerin eşliğini göstermiştir. Her bir oluşan üçgenin alanını “S” harfi ile ifadelendirmiştir. En sonunda, başta oluşturduğu iki üçgenin şekil olarak birbirinden farklı olsa da alan olarak birbirine eş olduklarını dolayısı ile köşegenlerin dikdörtgeni dört eşit büyüklükte parçaya ayrıldığını ifadelendirmiştir. Her iki gruptaki adayların fikirlerini sınıf ortamında tartışma süreci sonucunda, eşparçaya ayırmaz diyen adaylar eşparçaya ayırdığına ikna olmuş ve sahip oldukları yanılgıyı tanımlayıp düzeltmişlerdir. Öğretmen adaylarının var olan matematiksel bilgi birikimlerine yeni matematiksel strateji veya gösterim şekli gibi yeni bilgiler ekledikleri durumlar genişletme eylemi olarak kodlanmıştır. Genişletme eylemine örnek olarak, dikdörtgenin eşit büyüklükte parçalara ayrıldığını sadece üçgenleri parçalayarak ve daha sonra birbiri ile birleştirip küçük dikdörtgen oluşturup üst üste yerleştirip gösteren öğretmen adayları (n = 4), üçgenlerin eşliğini matematiksel olarak hem eşlik hem de alan bağıntısını kullanarak göstermeyi düşünmediklerini belirtmişlerdir. Bu kategoriler ve onlara bağlı eylemlerin her biri asıl çalışmada genişletilmiş ve yeniden düzenlenmiştir.

Ana Uygulama

Katılımcılar

Pilot çalışmanın yapıldığı vakıf üniversitesinin sınıf öğretmenliği bölümünde son sınıfta okuyan pilot çalışmaya katılmayan 9 öğretmen adayı ana çalışmanın katılımcıları olmuşlardır. Öğretim deneyi başlamadan önce birinci araştırmacı çalışmanın içeriğini ve amacını belirten gönüllü katılım formunu bütün adaylardan imzalamalarını rica etmiş ve her bir öğretmen adayı gönüllü olarak üniversitedeki ders saatlerinin dışında araştırmacı ile çalışmayı gerçekleştirmek üzere buluşmuştur. Öğretmen adaylarının eşpaylaşım öğrenme rotasına dair bir ön tecrübeleri bulunmamak ile birlikte, her bir aday bir temel matematik dersi ve gözleme dayalı okul deneyimi dersi almıştır. Her bir öğretmen adayının matematik konu alanında başarı seviyeleri birbirinden farklı olup, değişik başarı seviyesine sahip adaylar dengeli dağılım olacak şekilde amaçlı olarak seçilmişlerdir. Adayların başarı seviyeleri genel not ortalamaları ve son aldıkları matematik dersinin notu baz alınarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından sadece birisinin özel ders tecrübesi bulunmaktadır. Diğer adaylar gözlem dersi dışında öğrenciler ile birebir çalışmamıştır.

Uygulama Süreci

Çalışma, birinci araştırmacı ve katılımcıların 6 hafta süresince her hafta ders saatleri dışında yaklaşık 3 saat süre ile buluşması yoluyla gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyinin öncesinde ve sonrasında öğretim uygulamalarının başlaması ve bitmesi ile birer hafta ara bırakılarak ön ve son test uygulanmıştır.[2] Birinci araştırmacı aynı zamanda öğretim deneyinde araştırmacı-öğretmen (A-Ö) rolündedir. Öğretim deneyinin her haftasında eşpaylaşım öğrenme rotasının belirli yeterlilik

[2] Bu makale kapsamında öğretmen adaylarının matematiksel alan bilgilerini süreçte hangi eylemleri sergileyerek yeniden yapılandırdığı raporlanmıştır. Araştırma ile alakalı ön ve son test in sonuçlarına birinci yazarın doktora tezinden erişilebilir.

düzeyleri üzerinde öğretmen adayları ile birlikte çalışılmıştır. Öğretim deneyi eş paylaşım öğrenme rotasının belirli düzeylerindeki matematik konuları ve kavramları hazırlanan etkinlikler ile A-Ö rehberliğinde bir sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultuda bir topluluğu eşpaylaştırma, paylaşımın adil gerçekleştirildiğini doğrulama, her bir payı isimlendirme, bir bütünü eş parçalara ayırma, parçaların eşit büyüklükte olduğunu doğrulama ve erken geçişkenlik argümanın gelişimi, payları isimlendirme, yeniden birleştirme (bütün-parça arasındaki çarpımsal ilişki) ve bir sayının katlarını kullanarak bir bütünü eş parçalara ayırma; katlama ile eşpaylaşım, birden fazla bütünü eş parçalara ayırma, kovaryasyon (iki değişkenin eş zamanlı değişimi) gibi konular üzerine odaklanılmıştır. Kovaryasyonel düşünme eşpaylaşım öğrenme rotasında "paylaştırılacak nesnelerin sayisinin, paylaşım yapılacak kişi sayısının ve/veya payın büyüklüğünün pozitif çarpanların veya tam bölenlerin dikkate alınarak değiştirilmesi, ve bu değişimin etkisinin tahmin edilmesi" (Pellegrino, 2009, 20) olarak ele alınmıştır. Örneğin, Mustafa 6 havucun espaylastirilarak 4 tavşanı beslemek için yeterli olduğunu bilmektedir. Aşağıda verilen tabloda her bir tavşanın almış olduğu payın büyüklüğü değişmeyecek şekilde, belirtilen tavsan sayısını beslemek için kaç havuca ihtiyaç olduğunu belirleyiniz (Yilmaz 2011'den adapte edilmiştir). Tabloda verilen tavsan sayıları sırası ile 2 ve 8 tavşandır. Adaylar tavsan sayısındaki değişimin her bir tavşanın yediği pay aynı kalmak koşulu ile gerekli havuç miktarındaki değişime etkisini incelemiştir.

Öğretim deneyi boyunca toplam 10 etkinlik gerçekleştirilmiştir. Buna ek olarak, öğrenci videolarının analizi de öğretim deneyinin içinde yer almıştır. Adaylara seyrettirilen videolar ilkokul öğrencilerinin eşpaylaşım görevleri ve soruları üzerindeki çalışmalarını ve cevap verme süreçlerini içermektedir. Bu videolar adayların öğrencilerin göstermiş oldukları matematiksel stratejilerini, hatalarını ve kavram yanılgılarını saptamalarını uygulamalı şekilde yapmalarına imkan sağlamıştır. Daha sonrasında' adaylar ile bu stratejilerin, yanılgıların ve hataların matematiksel sebepleri sınıf tartışmasında incelenmiştir.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Öğretim deneyinin uygulanması sırasında gözlem notları, her bir öğretim oturumunun video kayıtları, öğrencilerin yazılı çalışmaları ve öğrenci çalışmalarının görüntüleri veri olarak toplanmıştır. Buna ek olarak, A-Ö ders sırasında gözlediği fakat çekilen videonun tam olarak içeriğini yansıtmayacağını düşündüğü ya da teknik olarak video çekmede sorun yaşandığı kısımları her bir dersin bitiminde saha notlarına (field notes) yazmıştır. Video kaydı verileri ve öğretmen adaylarının çalışma kağıtları analizlerde ana veri kaynağı olarak kullanılırken, diğer veri kaynakları bulguların netleştirilmesinde ve desteklenmesinde kullanılmıştır. Birden fazla veri kaynağından analizde yararlanılması çalışmanın güvenirliğini sağlamaya yönelik kullanılan ilk yöntemdir.

Video kaydı verileri, Powell, Francisco, ve Maher'in (2003) analitik modeli kullanılarak analiz edilmiştir. Bu modele göre birinci araştırmacı ilk olarak, video kaydı verisini araştırma sorularını gözeterek dikkatli bir şekilde izlemiştir. Daha sonra, araştırma sorularına cevap taşıyabilecek nitelikte video kaydı verisinin içeriğinin nelerden oluştuğunu, ve analiz için nelere dikkat edilebileceğini tanımlamıştır. Devamında, öğretmen adaylarının davranışlarındaki kritik olayları belirlemiştir. Bu kritik olaylar, adayların farklı bir strateji kullandıkları ve matematiksel alan bilgilerini geliştirdikleri ve/veya değiştirdikleri önemli olaylardan oluşmaktadır. Birinci araştırmacı ve doktora derecesine sahip bir matematik eğitimcisi, belirlenen kritik olayların ortak noktalarını ifadelendiren kodları pilot verideki kodlamaları da dikkate alarak geliştirmişlerdir. Son olarak kritik olayların tespit edildiği veriler ve adayların yazılı çalışmaları bu iki kişi tarafından ayrı ayrı kodlanmış ve kodlamalar arasındaki tutarlılık yüzdesi %88 olarak bulunmuştur (Miles ve Huberman, 1994). Bununla birlikte, dört yıllık öğretmenlik tecrübesi olan bir sınıf öğretmeni ise veri analizi ve kodlama süresinde fikirlerini kodlama yapan araştırmacılarla paylaşmıştır. Verilerin kodlanmasının ayrı yapılması güvenirliği sağlamanın diğer bir yöntemi olarak bu çalışmada kullanılmıştır.

Verilerin analizi neticesinde ortaya çıkan kodlar ve açıklamaları, öğretmen adaylarının MABni yapılandırırken göstermiş oldukları eylemlerdir. Bu çalışma kapsamında, öğretmen adaylarının MABni nasıl yeniden yapılandırdıkları ve bu süreçte göstermiş oldukları eylemler bulgular kısmında paylaşılmıştır.

BULGULAR

Öğretmen adaylarının MABni yeniden yapılandırma süreçlerinin bulguları Genel Alan Bilgisi (GAB), Özel Alan Bilgisi (OAB) ve Yatay Alan Bilgisi (YAB) ana kategorilerinin altındaki yeniden yapılandırma eylemleri bağlamında değerlendirilmiştir. Katılımcılar Öğretmen-Adayı (ÖA) ve bir rakam ile (örneğin, ÖA1) belirtilmişlerdir.

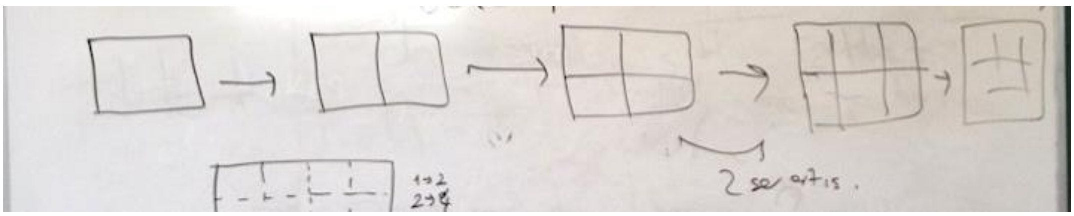
Genel Alan Bilgisini Yeniden Yapılandırma

Öğretmen adayları mevcut GABni yeniden yapılandırırken üç farklı eylem göstermişlerdir. Tablo 1 bu üç eylemi ve kısa tanımlamalarını göstermektedir.

Tablo 1 *Genel Alan Bilgisi Yeniden Yapılandırma Eylemleri*

Ana Kategori	Yeniden Yapılandırma Eylemi	Kısa Tanımlaması
Genel Alan Bilgisi	Düzeltme ve değiştirme	Adaylar bazı kavram yanılgılarına ve matematiksel öğrenme zorluğuna sahiptir. Adayların öğrenme rotasının içerdiği bilgileri kavramsal olarak anlamaları neticesinde yanılgılarını düzeltmeleridir. Buna ek olarak, öğrenme rotasındaki az karmaşık matematiksel fikirlerden/kavramlardan çok karmaşık fikirlere doğru olan ilerlemenin öğretimde yol gösterici olarak kullanımı neticesinde, adayların öğrenme zorluklarının adres edilmesidir.
	Genişletme	Adayların eksik öncül bilgilerinin olduğunu öğrenme rotaları temelli öğretimde fark etmeleri ve bu eksikliklerini tamamlamalarıdır. Adayların mevcut matematiksel düşünmelerini değiştirmeleri ve derinleştirmeleridir. Adayların öğrenme rotaları temelli öğretim sürecinde yeni matematiksel kavramlar, stratejiler ve gösterimler öğrenmeleri ve doğru şekilde açıklayıp kullanabilmeleridir.
	Meydan okuma veya aksini iddia etme	Adayların öğrenme rotasının sunmuş olduğu bilginin aksini iddia etmeleri ve iddialarını matematiksel olarak desteklemeleridir. Adayların birbirlerinin ileri sürdükleri matematiksel yaklaşımların aksine argümanlar üretmeleridir.

Tablo 1 de gösterilen eylemlerden birincisi "düzeltme ve değiştirme"dir. Ön-testte ya da öğrenme deneyi sırasında üzerinde çalıştıkları soruda ya da etkinlikte mevcut matematiksel bir hata veya kavram yanılgısı veya matematiksel bilgi eksikliği gösteren adaylar, sınıf içerisinde bütün cevapların tartışılması esnasında bu eylemi göstermişlerdir. Örneğin, adaylardan dikdörtgen şeklindeki bir kâğıdı dört kez her katlamada iki eşit parça elde edilecek şekilde katladıklarında kaç tane eş büyüklükte parça oluştuğunu bulmaları istenmiştir. ÖA2 bu etkinliği yaparken toplamsal bir kavram yanılgısı göstermiştir. ÖA2'nın yapmış olduğu çözüm Şekil 2 de gösterilmektedir.



Şekil 2. *Toplamsal ilişki kavram yanılgısı*

ÖA2 tahtada çizmiş çözüm stratejisini diğer adaylara şu şekilde açıklamıştır:

ÖA2: İlk önce, dikdörtgeni ikiye katladım [soldan ikinci çizim]. Daha sonra, bu yarıya katlanmış dikdörtgeni tekrar yarıya katladım [dört eşit parçaya ayrılmış dikdörtgeni tahtaya çizdi] Bir sonraki aşamada altı parça oluşur, daha sonra sekiz parça oluşur.
A-Ö: Nasıl altı parça oluştuğunu açıklayabilir misin?
ÖA2: Ben ikişer ikişer arttığını düşündüm. İki, dört sonra altı ve sonra sekiz.

ÖA2'nin bu açıklamasına dört aday itiraz edip niçin bu stratejinin yanlış olduğunu kendi stratejilerini açıklayarak göstermişlerdir. Örneğin, ÖA7 "Ben aradaki ilişkiyi toplamsal olarak algılamadım. O [her bir katlama sonucu oluşan parça sayısı] çarpımsal olarak artıyor. Her defasında iki katı". ÖA5, ÖA6 ve ÖA9 bu çarpımsal ilişkiyi aynı zamanda bir dikdörtgeni dört kez ikiye katlayarak sınıfa göstermişlerdir. Sınıf ortamındaki bu sosyal etkileşim sonrası, ÖA2 bir diğer katlama etkinliğinde aynı yanılgıyı sergilememiştir.

GABni yeniden yapılandırırken ÖAların göstermiş olduğu ikinci eylem ise, "genişletme"dir. Bu eylemde adaylar eşpaylaşım konusuna dair mevcut matematiksel bilgilerini, önceden bilmedikleri bilgileri edinerek genişletmiştir. Bu eylem adayların her birinin farklı GAB seviyesine sahip olmaları ve bunları birbirleri ile paylaşmaları neticesinde, birbirlerinin bilgilerini genişletmeleri şeklinde de gerçekleşmiştir. Örneğin, bir ÖAnın kullanmış olduğu farklı bir matematiksel stratejiyi diğer ÖA ile paylaşması neticesinde aday bu stratejiyi matematiksel olarak irdelemiş ve öğretim deneyinin devamında kullanmıştır. Bu durumu şu şekilde gerçekleşen bir örnek ile somutlaştırabiliriz: Öğretim deneyinin başında ÖAları (n = 4) dikdörtgen seklinde bütünü eşit büyüklükteki parçaya ayırma görevlerinde oluşturulacak parça sayısı çift bir sayı ise, parçaların büyüklüğünü göz kararı ayarlayıp her bir payın büyüklüğünü belirleyen yatay ya da dikey çizgileri ard arda şeklin üzerine çizmişlerdir. Adaylara ilk payı nasıl oluşturdukları sorulduğunda göz kararı ile büyüklüğü ayarladıklarını ve bu şekilde paylaştırmaya devam ettiklerini söylemişlerdir. A-Ö adaylara farklı bir yöntem kullanan var mı diye sorduğunda iki yöntem ortaya çıkmıştır: (1) tekrarlı ikiye bölme ve (2) ölçerek kenar üzerine işaret koyma. Tekrarlı ikiye bölen adaylar (n = 4) dikdörtgen seklindeki bir bütünü önce ikiye sonra oluşan her iki yarımı da ikiye bölerek devam etmişlerdir. Bu şekilde göz kararı payın büyüklüğünü ayarlamak zorunda kalmadıklarını ifade etmişlerdir. İkinci olarak, bir aday dikdörtgenin bir kenarının uzunluğunu ölçmüş ve bu uzunluğu istenilen parçaya eşit olarak ayırmış ve her bir ayrım noktasını kalem ile işaretledikten sonra şekil üzerinde payları oluşturmuştur. Adayların bu şekilde birbirleri ile matematiksel stratejilerini paylaşmaları, sahip oldukları öncül matematik bilgisindeki seviye farklılıkları ve araştırmacının rehberliği sahip oldukları GABlerinin yeniden yapılanmasında rol oynamıştır.

GABni yeniden yapılandırmada gösterilen son eylem çeşidi ise "meydan okuma veya aksini iddia etme"dir. Bu eylem, öğretim deneyinde sıklıkla karşılaşılan bir eylem türü değildir. Çünkü bu eylemde, adayların sahip olduğu MABlerini ve öğretim deneyindeki öğrenme rotasına dair tecrübelerini kullanarak, öğrenme rotasında öne sürülen matematiksel fikirler ile birebir uyuşmayan zorlayıcı argümanlar geliştirmesi gerekmektedir. Bu argümanın geliştirilmesi tek başına yeterli olmayıp, aynı zamanda bu argümanın matematiksel olarak doğru şekilde desteklenmesi gerekmektedir. Bu eylemin gerçekleştiği bir örnek şu şekildedir: Eşpaylaşım öğrenme rotasında bir bütünü (dikdörtgen seklinde ya da dairesel bir bütün) bir sayının pozitif tam bölenlerini kullanarak eşit büyüklükte parçalara ayırmanın tek sayıya ayırmaktan daha zor olduğu ifade edilmektedir. Burada bir bütünü bir sayının pozitif tam bölenlerini kullanarak eşit büyüklükteki parçalara ayırma durumu, bir bütünü 12 eşit büyüklükte parçaya ayırmanın 2x6, 3x4, ve 12x1 gibi farklı şekillerde gerçekleştirilebilecek olması ile örneklendirilebilir. Fakat, ÖA4 ve ÖA9 öğrenme rotasında ifade edilen bu zorluk durumunun her sayı için geçerli olmayacağını savunmuş ve bu savı matematiksel örnekler ile desteklemişlerdir. Örneğin, ÖA9, "sekize ayırma gibi ikinin kuvvetini kullanarak veya sekiz sayısının çarpanlarını kullanarak yapılabilecek bir eşpaylaşım durumu, bir bütünü mesela üç eş olarak paylaştırmaktan daha kolaydır" örneğini vermiştir. Rotada pozitif tam bölenlerin kullanılarak yapılan paylaşımın en zor olduğu ifade edilmesine rağmen, adaylar 8 gibi ikinin katları kullanılarak yapılabilen bir eşpaylaşımın bir bütünü sadece tek yol ile ayırmayı öngören paylaşım durumundan (bir bütünü üç es parçaya ayırma -3x1) kolay olması ile açıklamışlardır. Bu açıklamaları mevcut rotanın ileri sürdüğü bilgi ile uyuşmayan bir durumu açığa çıkarmıştır.

Özel Alan Bilgisini Yeniden Yapılandırma

Adaylar ÖABlerini yeniden yapılandırırken iki eylem çeşidi göstermişlerdir. Tablo 2 bu iki eylemi ve kısa tanımlamalarını göstermektedir.

Tablo 2 *Özel Alan Bilgisini Yeniden Yapılandırma Eylemleri*

Ana Kategori	Yeniden Yapılandırma Eylemi	Kısa Tanımlaması
Özel Alan Bilgisi	İçselleştirme	Adayların öğrenme rotasının içerdiği matematiksel kavram ve düşünceler ile ilintili çeşitli matematiksel açıklamaları ve gösterimleri kavramsal olarak anlamlandırmalarıdır. .
	Boyutlarını ortaya çıkarma	Adayların matematiksel hataların ve kavram yanılgılarının altında yatan sebepleri açığa çıkarmalarıdır.

Tablo 2 de gösterildiği üzere ÖABni yapılandırma eylemlerinden birincisi "içselleştirme"dir. Bu eylem, adayların öğretim deneyinde edindikleri tecrübeler ile kendi matematiksel bilgilerini birleştirip, öğretim rotasının içerdiği çeşitli matematiksel kavramları, stratejileri, açıklamaları ve gösterimleri irdeleme ve kavramsallaştırma sürecini ifade etmektedir. Bu süreçte adaylar matematiksel bir görevin (etkinlik ya da problem) arkasındaki matematiksel düşünce ve ilişkileri önce bireysel çözme ve sonrasında sınıf içi sosyal etkileşim yolu ile açığa çıkarırlar. İçsellestirme sürecinde adayların doğru matematiksel dili kullanmaları da bu eylemin bir bileşenidir. Örneğin, ÖAlarından 32 adet nesneden oluşan bir topluluğu 8 kişi arasında eşit olacak şekilde paylaştırmaları istenmiştir. ÖAları üç grup halinde bu görevin üzerinde çalışmış ve paylaşımlarını Şekil 3 ve 4'te gösterildiği şekilde yapmışlardır.

Şekil 3. *Birer birer dağıtma ile eşit büyüklükte gruplar oluşturma*

Adaylar her bir gruba sistematik şekilde bir nesne dağıtmışlar ve bu sürecin sonunda her bir kişiye dört nesne düştüğünü bulmuşlardır. Diğer iki grup, aynı cevaba ulaşmalarına karşın, eşpaylaşım süreçlerini ve eşpaylaşımın neticesini farklı temsiller ile göstermişlerdir. Şekil 3 sırası ile kalan iki grubun gösterimlerini göstermektedir.

Şekil 4. *Boy karşılaştırması ve dikdörtgensel dizin gosterimi*

Adayların aynı eşpaylaşım sorusu için kullanmış oldukları farklı gösterimler ve bu gösterimlerin arkasındaki matematiksel anlam sınıf içerisinde şu şekilde tartışılmaya başlanmıştır:

A-Ö: Her bir nesneyi niye bir diğerinin üstüne koydunuz?
ÖA9: Biz hepsinin aynı yükseklikte olduğunu gösterdik.
A-Ö: "Her birinin aynı yükseklikte olduğunu" göstermenin avantajı nedir?
ÖA9: Hepsi aynı miktarı almışlardır. Aynı yükseklikte olmaları görsel olarak da aynı miktarı aldıklarına ikna edicidir. Aynı yükseklik bunun bir eşpaylaşım olduğunu gösterir.
ÖA6: Hem fiziksel olarak hem de sayı olarak aynılar [ÖA6 grupları işaret ediyor].

Yukarıdaki sınıf içi etkileşim ilk olarak adayların kullanmış oldukları farklı gösterimlerin matematiksel olarak ne ifade ettiğinin anlaşılmasına bir örnektir. Bu grubun gösterimi neticesinde diğer adaylar boy karşılaştırmasını bir doğrulama stratejisi olarak kullanabileceklerini öğrenmişlerdir. Farklı matematiksel stratejilerin ve gösterimlerin taşıdığı çeşitli matematiksel anlamları tartışma yolu ile irdeleyen adaylar ÖABlerini yeniden yapılandırmışlardır. Sınıf içerisindeki bu etkileşim aynı zamanda başka matematiksel düşünme süreçlerinin önünü açmıştır. Bu tartışmanın devamında, ÖA3 sormuş olduğu bir soru ile "topluluk" kavramının eşpaylaşım öğrenme rotasında matematiksel olarak nasıl tanımlandığını tartışmaya açmıştır.

ÖA3: … Örneğin, üç objeniz olduğunu düşünün, iki farklı silgi ve bir kaleminiz, ve bu üç nesneyi eşpaylaştırmanız sizden istense idi, [...] nasıl karşılaştırırdı[nız]?
ÖA4: Evet boy karşılaştırması bu durum için işe yaramaz.
.....
A-Ö: Tamam, eğer boy karşılaştırması bu durumda çalışmıyor ise, biz neye "topluluk" diyebiliriz?
ÖA3 ve diğer ÖAlar: Bütün nesneler aynı özelliğe sahip olmalıdır.

Yukarıdaki tartışma bu zamana kadar öğretim deneyinde verilen toplulukları eşpaylaştıran adayların "topluluk" kavramının ne ifade ettiği üzerine detaylı şekilde düşünmediklerini göstermektedir. Üst üste konulan nesnelerin yüksekliğini karşılaştırma doğrulama stratejisinin tartışıldığı gösterim, adayların topluluk kavramının anlamını sorgulamalarına yol açmıştır. ÖA3'ün başlattığı tartışmanın neticesinde ÖAları eşpaylaşım öğrenme rotasında ele alınan topluluk kavramının matematiksel anlamını içselleştirmişlerdir.

Tablo 2 de gösterilen ÖAB yeniden yapılandırma eylemlerinden ikinci ise "boyutlarını ortaya çıkarma"dır. Bu eylemi gösteren adaylar bir matematiksel hatanın, zorluğun ya da kavram yanılgısının altında yatan matematiksel sebepleri irdelemektedirler. Adaylar bu çalışmada, kendilerinin, arkadaşlarının ya da bir öğrencinin göstermesi muhtemel olan veya gösterdiği durumlar üzerinden giderek bu eylemi gerçekleştirmişlerdir. Öğretim deneyi öncesi ve başlarında öğretmen adayları sadece doğru cevaplar üzerine odaklanıp, yanlış cevabın üzerinde durmadan bir sonraki göreve geçme eğilimindeydiler. Onlar için doğru cevabın üretilmiş olması matematik yapmanın en belirleyici göstergesi idi. Bu durumu bir aday şu şekilde ifade etmiştir: "Hocam doğru cevabı vermiş, niçin yanlışın üzerinde düşünelim?" Öğretim deneyi ilerledikçe adaylar "boyutlarını ortaya çıkarma" eylemini daha sıklıkla sergilemeye başlamışlardır. Örneğin, adaylar birden fazla bütünü kişiler arasında eşpaylaştırma etkinliklerinden birisinde gerçek öğrenci cevapları üzerinde çalışmışlardır. Bu etkinlikte bir öğrenci 7 kekin 4 kişi arasında eş olarak paylaştırılması durumunda bir kişinin almış olduğu miktarın, 5 kekin 2 kişi arasında eş olarak paylaştırmasında bir kişinin almış olduğu miktara eşit olduğunu düşünmektedir. Adayların hepsi öğrencinin cevabının matematiksel olarak yanlış olduğunu tespit etmek ile birlikte, çoğunluğu (n = 5) öğrencinin niçin böyle bir cevap üretebileceğini irdelemiş ve tespitlerini paylaşmışlardır. Bunlardan bazıları şu şekildedir: (1) Öğrenci birinci ve ikinci durumdaki kek sayısı ve paylaşan kişi sayı arasındaki ilişkiyi toplamsal bir ilişki olarak ele almıştır. Her iki durumda da aradaki fark 3'tür. Öğrenci kek ile kişi sayısı arasındaki oranı anlamamıştır. Adaylar öğrencinin neden böyle bir hata yaptığını tespit ettikten sonra olası çözümler üretip, sınıf içinde bu çözümlerin işlerliğini tartışmışlardır. ÖA6 her iki durumda bir kişinin aldığı payı "Her bir bütünü istenilen kişi sayısına eşpaylaştırma ve dağıtma" stratejisini kullanarak görsel olarak göstermesini isteyebiliriz" demiştir. ÖA4 ise bu durumun öğrencinin sahip olduğu toplamsal yanılgıyı düzeltemeyeceğini ifade edip, başka bir yol önermiştir: "İnsan sayısı yarısına indiği için, kek sayısı da yarıya bölünmeli." ÖA4'ün bu tespiti ise bir sonraki seviye olan kovaryasyon seviyesi ile ilişkilidir. ÖA3 ise birimli oran ile durumu ilişkilendirmiş ve bu ilişkiyi şu şekilde ifadelendirmiştir: "7'nin 4'e oranı ile 5'in 2'ye oranı eşit değildir. Bu sebeple bu bir eş paylaşım değildir." Bu durum, aynı zamanda adayların eş paylaşım rotası içerisindeki bağlantıları süreç içerisinde kullandıklarının bir göstergesidir. Bu bağlantının kurulması ise YAB yeniden yapılandırılmasında gösterilen eylemlerden biridir. Adayların mevcut bir matematiksel hatanın tespitini yapabilmeleri, nedenlerini tartışarak açığa çıkarmaları, daha sonra hatanın düzeltilmesi için çözüm yolları geliştirmeleri ve bu çözüm yollarının taşıdığı matematiksel anlamı irdeleme becerileri mevcut ÖABlerini yeniden yapılandırdıklarının birer göstergesidir.

Yatay Alan Bilgisini Yeniden Yapılandırma

Adaylar öğretim deneyi sırasında YABlerini iki eylem çeşidi göstererek yeniden yapılandırmışlardır.

Tablo 3 *Yatay Alan Bilgisini Yeniden Yapılandırma Eylemleri*

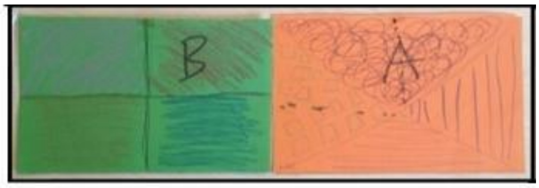
Ana Kategori	Yeniden Yapılandırma Eylemi	Kısa Tanımlaması
Yatay Alan Bilgisi	İlişkilendirme	Adayların eşpaylaşım kavramının birçok ileri matematik kavramı ve konusu ile ilişkili olduğunu fark etmeleri ve bunları öğretim deneyinde somut olarak çıkarsamalarıdır (Wilson vd., 2013'den uyarlanmıştır).
	Genelleme	Adayların eşpaylaşım ile ilgili matematiksel fikirleri ve ilişkili ileri matematiksel fikirleri genellenebilir şekilde ifade edebilmeleridir.

Tablo 3'te gösterilen eylemlerden ilki "ilişkilendirme"dir (Wilson ve diğerlerinden, 2013 uyarlanmıştır). Bu eylem adayların ilk olarak öğrenme rotası içindeki yeterlilik düzeylerinin içerdiği matematiksel bilgiyi birbirleri ile ilişkilendirmelerini, ikinci olarak eş paylaşım konusunun temel hazırladığı ve ilişkili olduğu matematik konularını belirleyebilmelerini ve bu ilişkiyi açıklamalarını gerektirmektedir. Öğrenme rotasındaki seviyeler arasındaki ilişkileri irdelerken adaylar iki şekilde eylem sergilemişlerdir. Birincisi, belirli yeterlilik seviyesinde başka bir seviyenin gerektirdiği bilginin kullanıldığı durumları saptamak iken; ikincisi, farklı yeterlilik seviyelerindeki matematiğin ortak ve farklı yönlerini açığa çıkarmaktır.

Öğrenme rotasının içindeki belirli bir seviyede ele alınan matematiksel bilgilerin diğer seviyelerle ilişkilendirilmesi eylemine bir örnek, birden fazla bütünü eş parçalara ayırma seviyesi etkinliğinde açığa çıkmıştır. Yukarıda ele alınan 7 kekin 4 kişi arasında eşit olarak paylaştırılması ile bir kişinin almış olduğu miktarın ve 5 kekin 2 kişi arasında eşit olarak paylaştırılmasında bir kişinin aldığı miktar durumlarını içeren etkinlik birden fazla bütünün eşpaylaştırılması seviyesindedir.

Fakat, adaylar iki durumu birbirleri ile ilişkilendirerek kovaryasyon seviyesinde ele alınan açıklamalar ile etkinliği irdelemişlerdir. İnsan sayısındaki veya kek sayısındaki çarpımsal artış ile eş zamanlı artışı sağlama ilişkisini kurmuşlardır.

Bu eyleme ikinci bir örnek, bir dikdörtgen şeklindeki bahçeye dört farklı çeşit meyve ağacı dikmek isteyen bir kişinin, bu bahçeyi her bir meyve çeşidine eşit alan düşecek halde kaç farklı şekilde eş paylaştırabileceği hakkındaki etkinlikte tespit edilmiştir. Bu etkinlikte adaylar daha ileri bir seviye olan erken geçişkenlik argümanı seviyesi ile bağlantı kurulmuşlardır. Erken geçişkenlik (geçişme) [şekil olarak] eş olmayan parçaların, aynı bütünün içinde veya [aynı sayıda parçaya eş olarak farklı şekilde bölünmüş aynı büyüklükteki] birden fazla bütünde, eş olduğunu matematiksel olarak göstermedir. Örneğin, eğer A=B, a=1/3A ve b=1/3B ise, a=b dir. Adayların bir kısmı Şekil 5'te gösterilen şekilde paylaşımlarını gerçekleştirmişlerdir.



Şekil 5. *Geçişkenlik argümanı*

ÖA1, ÖA2, ÖA3, ÖA4 ve ÖA7 yukarıda turuncu dikdörtgende gösterilen şekilde köşegenlerin şekli dört eş parçaya ayırmadığını, A ve B parçalarının eş olmadıklarını ifade etmişlerdir. Buna karşın ÖA6, ÖA8 ve ÖA9 her iki dikdörtgeninde eş parçalara ayrıldığını açıklarken geçişkenlik ve parçalara ayırma ve birleştirme seviyelerinde ele alınan stratejileri kullanmışlar. Bu iki seviye de bir bütünü eş parçalara ayırma seviyesinden ileridedir. ÖA9 parça A'yı kesikli çizgi kullanarak iki eş üçgene ayırmıştır ve bu üçgenlerden birisini döndürerek B ile aynı büyüklükte bir parça oluşturmuştur. Bu adayın kullanmış olduğu strateji öğrenme rotasındaki parçalara ayırma ve birleştirme seviyesinde gösterilen bir matematiksel davranıştır. ÖA6 ise ÖA9'un somut olarak gösterdiği eşlik durumunu matematiksel olarak geçişkenlik ilkesi ile şu şekilde açıklamıştır: "Bir parçayı A, diğer bir parçayı da B diye sembolize edersem... Birinci dikdörtgen 4A ve ikinci dikdörtgen 4B den oluşur. Bundan dolayı 4A = 4B dir, bu da A = B'yi verir." ÖA5 bu açıklamanın üzerine, "Bu yüksek seviyede karmaşıklığa sahip bir matematiksel düşünme" ifadesini kullanmıştır. Adaylar bir bütünü eş parçalara ayırma düzeyini (düzey 2) erken geçişkenlik ya da eşparçaların eşitliği düzeyleri ile (düzey 10) ve parçaların eş olduğunu doğrulama düzeyi ile (düzey 3) ilişkilendirmişlerdir.

Bu irdelenen örnek YABnin düzeyler arası ilişkilendirme yeniden yapılandırılmasının yanı sıra, sınıf içi etkileşim ve çözüm yollarının irdelenmesi ve tartışılması neticesinde, "boyutlarını ortaya çıkarma" eylemi yoluyla ÖABnin yeniden yapılandırılmasına da bir örnek teşkil etmektedir. Bu matematiksel stratejilerin sınıf içerisinde paylaşılmasının ardından ÖA1, ÖA2, ÖA3, ÖA4 ve ÖA7 sahip oldukları yanılgıyı düzeltmişler ve parçaların eşit olduğunu ifade etmişlerdir. Burada parçaların hangi özelliklerinin eşit olduğunu ifadelendirmemişlerdir. Bu durum, adayların matematiksel düşüncelerindeki değişikliği ifade ederken matematiksel dili tam olarak doğru kullanmadıklarını göstermektedir. Bu noktada A-Önin adaylara "Eşit dediğinizde neyin eşitliğinden bahsediyorsunuz?" yönlendirici sorusunu sormasının neticesinde, adaylar "parçaların alanları eşit" seklinde cevap vermişlerdir. Bu durum adayların kullanmış oldukları matematiksel dili düzelttiklerini göstermektedir. Bu da adayların ÖABlerini süreç sonunda yapılandırdıklarına bir örnek olarak değerlendirilmiştir.

Son eylem çeşidi ise, adayların eşpaylaşım öğrenme rotasının içermiş olduğu yeterlilik düzeylerindeki matematiksel kavramları diğer matematik konuları ile ilişkilendirmeleri ve ilişkili matematiksel uygulamalara genişletebilmeleridir. Örneğin, adaylar dikdörtgen şeklindeki bahçeyi dört eş parçaya ayırma etkinliğinde dördün katlarını kullanarak eş parçalara ayırma stratejisini kullanmamışlardır. Bunun üzerine A-Ö tahtaya sekiz eş parçaya ayrılmış bir dikdörtgen çizmiş ve oluşan sekiz parçadan ikisini karalamıştır. Bunun üzerine tartışma şu şekilde devam etmiştir:

A-Ö: Bu gösterim [2x2 ayrılan dikdörtgeni göstererek] ile bu gösterimdeki [2x4 gösterimi] eşpaylaşımları karşılaştıralım.
ÖA9: Kesirler ile alakalı.
A-Ö: Kesirlerde hangi konu?
ÖA5, ÖA6 ve ÖA9: Kesirleri sadeleştirme ve genişletme.
A-Ö: Ne diyoruz biz bu durumdaki kesirlere?
ÖA1 ve ÖA4: Denk kesirler.

Yukarıdaki diyalog, adayların bir bütünü eşit büyüklükte parçalara ayırma ve kişi başına düşen payı isimlendirmede kullanılan strateji ile denk kesirler matematik konusu arasında bir ilişki kurduklarına örnek teşkil etmektedir. Adaylardan denk kesirleri matematiksel olarak göstermeleri istendiğinde her iki parçayı sırası ile $\frac{1}{4}$ ve $\frac{2}{8}$ olarak isimlendirmişlerdir. Bu iki kesirin aynı bütün üzerinde çalışıldığında eş büyüklükteki kesirleri ifade ettiğini söylemişlerdir. Buna ek olarak, ÖA3 eşpaylaşım durumunun bu şekilde gösterilmesinin denk kesirlerin anlaşılmasında somut bir gösterim olarak faydalı olduğunu ifade etmiştir. Bu durum, adayların farklı matematiksel gösterimleri (örneğin, somut, soyut) birbirleri ile ilişkilendirebildiklerine de bir örnektir. Öğretim deneyinin sonunda adaylar eşpaylaşım öğrenme rotasındaki düzeylerin içermiş olduğu matematiksel fikir ve kavramları oran, orantı, kesirler, çarpma, bölme ve alan gibi matematiksel konular ile ilişkilendirebilmiş ve bunu uygulamalarında da gösterebilmişlerdir.

Tablo 3'te gösterilen YABnin yeniden yapılandırma eylemlerinden ikinci ise "genelleme"dir. Bu eylem, adayların eşpaylaşım ile ilgili matematiksel fikirleri genellenebilir bir şekilde ifade edebilmeleri ve matematiksel fikir ve kavramları ilişkili matematiksel durumlara genişletebilmeleridir. Adaylar matematiksel olarak ulaştıkları genellemeleri iki şekilde ifade etmişlerdir: Sözel olarak ve matematiksel sembolleri kullanarak. Örneğin, adaylar bir bütünü eş paylaştırma ve birden fazla bütünü eş paylaştırma düzeyleri ile ilgili etkinlikleri yaparken farklı seviyelerde genellemelere ulaşmışlardır. ÖA3, ÖA5, ÖA8 ve ÖA9 "Eğer paylaşan insan sayısı paylaşılan nesne sayısından küçük ise, bileşik kesir ya da tam sayılı kesir oluşur" sonucunu yazılı olarak etkinlik kâğıtlarına yazmışlardır. ÖA8 ve ÖA9 bu sonucu matematiksel sembol kullanarak ifadelendirmişlerdir. Örneğin, ÖA8, "Nesne sayısını "n" ile insan sayısını "p" ile sembolize edelim, n/p bir bileşik kesir oluşturur" ifadesini yazmıştır. Adaylar, öğretim deneyinin devamında basit kesir ve birim kesir elde edilen durumları da genelleyebilmişlerdir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının eşpaylaşım öğrenme rotasının kullanıldığı öğrenme rotaları temelli öğretimde, sahip oldukları MABlerini nasıl yeniden yapılandırdıkları üç bilgi çeşidine bağlı eylemler gruplanarak incelenmiştir. Adaylar öğretim deneyi sırasında öğrenme rotasında yer alan bilgileri ve seviyeleri içeren etkinlikler, diğer adaylar ve öğretmen ile etkileşim sonucunda MABlerini genişletmişler ve bu ilerlemeyi kaydederken çeşitli eylemleri sergilemişlerdir. Öğretmen adaylarının GABlerini düzeltme ve değiştirme, genişletme, meydan okuma ya da aksini iddia etme; ÖABlerini içselleştirme, boyutlarını ortaya çıkarma; ve YABlerini ilişkilendirme ve genelleme eylemleri ile yeniden yapılandırdıkları bulunmuştur. Bu eylemlerin saptanması, adayların belirli bir öğretim ortamında kullandıkları bilginin nasıl değiştiğinin ve öğretim sürecinde öğretmen, öğrenci, etkinlik gibi faktörler ile bu değişimin nasıl etkileşime girdiğinin tespitinde önemlidir. Bu kapsamda diyebiliriz ki, bu çalışma adayların yeni ortaya çıkan, geliştirilmeye ve test edilmeye açık bilgi yapılandırma eylemlerinin çerçevesini çizmektedir. Bu çerçeve bulgularda ortaya konulan eylem çeşitleri ve tanımlamaları şeklinde ortaya konulmuştur. Bununla birlikte bu çerçeve geliştirilmeye açıktır.

Çalışmada adayların ilköğretim öğrencilerinin sahip olduğu bazı kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmek ile kalmayıp, adayların bu yanılgıları tespit etme ve düzeltme süreçleri de incelenmiştir. Bu süreçte, sosyal yapılandırmacı bir sınıf ortamının ve öğrenme rotasının yeterlilik düzeyleri arasındaki ilişkilerin yönlendirici etkisi de nitel olarak tartışılmıştır. Adayların mevcut

MAB düzeylerindeki eksikliklerini eşpaylaşım gibi temel bir konuda fark etmeleri ve bu temel konu ile diğer ileri matematik konularını ilişkilendirmeleri neticesinde kazanmış oldukları farkındalık gelecekteki öğretmenlik uygulamaları için çok önemli bir kazanımdır. Adaylar öğretim deneyinde bir konu ve görev üzerinde çalışırken birden fazla matematiksel strateji üretmiştir. Her ne kadar bazı adaylar diğer adaylar tarafından üretilen bu stratejileri anlamakta zorlanmasalar da, daha öncesinde bu stratejileri tek başlarına çalışırken üretemedikleri ve bu stratejileri arkadaşları ile etkileşim neticesinde anlamlandırdıkları görülmektedir. Bu durum, yapılandırmacı bir yaklaşımı benimseyen öğrenme rotaları temelli öğretimde desteklemenin (scaffolding) gerçekleştirildiğinin bir göstergesi olarak ele alınabilir. Aynı zamanda, bir matematiksel konu ya da strateji ne kadar basit ve anlaşılır olsa da, bu konu hakkında tecrübe sahibi olmadan, varsayımsal olan bu bilginin adaylar tarafından içselleştirilmesi ve fark edilmesi noktasında öğrenme rotaları temelli öğretim önemli bir rol oynamaktadır. Öğrenme rotalarının belirlenen matematik konusu ile alakalı öğrencilerin nasıl öğrendiğine dair araştırmaların sonucunu sentezleyerek, ve ampirik veriler ile bir matematiksel kavramın nasıl az karmaşık düzeyden çok karmaşık düzeye öğrenildiğini ortaya koyan bir araç olması bu önemi ortaya koymaktadır. Öğrenme rotaları bu özelliği ile öğretmen adayları için ileri meslek hayatlarında matematiği öğretirken bir öğrenciden ne beklemeleri gerektiği, hangi matematiksel konuyu ne zaman hangi sıra ile göstermeleri gerektiği noktasında yol gösterici temel bir araç niteliğindedir (Corcoran, Mosher ve Rogat, 2009). Öğrenme rotası desteği ile dersin tasarlanması, ilk olarak öğrenme etkinliklerinin sadece öğretmen bakışı ile değil de öğrencilerin belirli bir konuyu nasıl ve hangi sıra ile öğrendiklerinin bakış açısı ile tasarlanmasını da sağlanmaktadır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının öğrencilerin sergileyebileceği muhtemel kavram yanılgılarını önceden kapsamlı bir şekilde görmelerine ve buna yönelik ders planlarında olası çözüm stratejileri geliştirmelerine temel hazırlar (Wilson vd., 2013). Öğrencilerin bir matematik problemini çözerken kullanabilecekleri matematiksel stratejileri az kompleks olandan çok kompleks olana dogru sıralayan yapısı ile öğretmenlere öğrencinin muhtemel kullanabileceği yöntemleri ders öncesinde sunması açısından öğrenme rotaları önemli bir başvuru aracı olarak görülebilir.

Bütün bunlara ek olarak, araştırmaların sonuçlarının bütüncül olarak, öğretim ve öğrenme sürecine dahil edilmesi ile teori ve pratik arasındaki boşluğun kapanmasında öğrenme rotaları temelli öğretim rol oynanmaktadır. Ders tasarlanmasında, araştırmaların sonuçlarının öğretime dahil etme süreci, dersi tasarlayan öğretmen için çok zaman gerektiren bir süreçtir. Öğrenme rotaları matematik konu alanında araştırmalar neticesinde ortaya konulan "büyük düşüncelerin" (big ideas) belirlenmesinde ve bunların etrafında ders ortamının oluşturulmasında öğretmenler için bir referans noktası olma potansiyeline sahiptir (Clements, Julie ve Sarama, 2009). Öğrenme rotalarının bu bütüncül bilgiyi ve "büyük düşünceleri" öğretmene sağlayarak zamandan kazanç sağlaması öğrenme rotalarının öğretimde kullanılmasının önemlerinden bir diğeridir. Sonuç olarak, bu araştırmadaki öğrenme rotalarını temelli öğretim deneyi adaylara bilinçli ve sistematik bir şekilde çeşitli matematiksel gösterimleri, stratejileri, kavramları ve açıklamaları irdeleyebilecekleri etkinlikler ve etkileşim ortamı sunulması adına önemlidir.

Bu öğretim deneyinin sonuçları diğer çalışmaların (Ball ve Forzani, 2010; Butterfield vd., 2013; Philipp, 2008; Sztajn vd., 2012; Zembat, 2007) sonuçları ile paralellik göstermektedir. Adaylar, öğretim deneyinin başında matematiksel bilgilerini kullanırken matematiğin doğru cevaba ulaşmak olarak algılamışlardır. Öğretim deneyi sırasında adaylar, ÖABlerini yapılandırırken yanlış cevapların, matematiksel yanılgıların ve hataların zengin matematiksel tartışmalar için zemin hazırladığına dair tecrübeler edinmişlerdir. Adayların, sınıf içerisinde açığa çıkmayan fakat önceden araştırmalar tarafından tespit edilmiş hata ve yanılgıların da irdelendiği öğrenme rotaları temelli bir öğretim kapsamında yapılandırılmış etkinlikler ile etkileşimi, onların ÖABlerini yapılandırmalarında önemli bir rol oynamıştır. Adayların bu hataları sadece tespit edebilmelerinin yeterli kabul edilmemesi ve hatanın nedenlerinin ve çözüm önerilerinin matematiksel bilginin kullanılarak açıklanmasının istenmesi, adayların matematiksel iletişim kurmalarını da sağlamıştır. Adaylar matematiksel düşüncelerini sınıf ortamında birbirleri ile paylaşırken yer yer doğru matematiksel dili kullanmakta zorluk yaşamışlardır. Fakat, öğretim deneyi süreci içerisinde adaylar matematiksel dili doğru kullanma becerilerini de geliştirmişlerdir.

Sonuç olarak, öğretim deneyinde adaylar kendi matematiksel alan bilgilerini, (1) öğrenme rotasının içermiş olduğu matematiksel bilginin gelişimsel ilerlemesini yansıtan öğretim etkinliklerine dahil olarak, (2) süreç içerisinde matematiksel fikirlerini sınıf içinde paylaşarak, (3) her bir adayın sahip olduğu öncül matematiksel bilgi seviyesini birbirleri ile etkileşimli şekilde paylaşarak, (4) sınıf içerisinde örnek videoları analiz ederek ve (5) öğrenme rotasındaki matematiksel kavramları derinlemesine irdeleyerek yeniden yapılandırmışlardır. Bu deneyimlerin hepsi çok değerli olmak ile birlikte, adayların matematiksel alan bilgilerindeki eksikliğin tamamlanmasında bu deneyimler tek başına yeterli olmayabilir. Bu deneyimlerin adayların matematiksel alan bilgilerini aktif olarak kullanabilecekleri öğretmenlik uygulaması gibi derslerde desteklenmesi gerekmektedir. Buna ek olarak, Sawchuk'in (2010) ifadelendirdiği zaman kısıtlaması, finansal altyapı eksikleri ve katılımcıların isteksizliği gibi etkenler bu müdahalelerin tek başına yeterli olmamasının başka bir temelini oluşturabilmektedir. Bu sebeple, bu çalışmada önerilen yeniden yapılandırma eylemlerinin farklı kuramların kullanıldığı eğitim ortamlarında ve öğretmenlik deneyimi gibi gerçek sınıf ortamlarında daha uzun süreli test edilmesi önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Baki, M. (2013). Pre-service classroom teachers' mathematical knowledge and instructional explanations associated with division. *Eğitim ve Bilim, 38*(167), 300-311.

Baki A. & Gökçek, T. (2007). Matematik öğretmeni adaylarının benimsedikleri öğretmen modeline ilişkin bazı ipuçları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*, 16-25.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special*? Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D.L., & Forzani, F.M. (2010). Teaching skillful teaching. *Educational Leadership*, *68*(4), 40-45.

Baştürk, S. (2007). *Öğretmen adaylarının öğretmenlik uygulaması dersiyle İlgili deneyimleri*. 16. Ulusal Egitim Bilimleri Kongresinde sunulmuştur. Gaziosmanpaşa Eğitim Fakültesi, Tokat.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Butterfield, B., Forrester, T., McCallum, F. & Chinnappan, M. (2013). Use of learning trajectories to examine pre-service teachers' mathematics knowledge for teaching area and perimeter: Emerging issues. *Paper presented at 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, Melbourne, Australia.

Clements, D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6(2)*, 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). Rethinking early mathematics: What is research-based curriculum for young children?. İçinde L. D. English and J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (s. 121-147). The Netherlands: Springer.

Clements, D., Sarama, J., & Julie, A. (2009). Learning and teaching early math. İçinde *The Learning Trajectories Approach* (s. 18). New York: Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Confrey, J. (2008). *A synthesis of the research on rational number reasoning: A learning progressions approach to synthesis*. 11th International Congress of Mathematics Instruction, Monterrey, Mexico.

Confrey, J. (2012). Better measurement of higher-cognitive processes through learning trajectories and diagnostic assessments in mathematics: The challenge in adolescence. İçinde V. Reyna, M. Dougherty, S. B. Chapman, & J. Confrey (Eds.), *The adolescent brain: Learning reasoning and decision making*. Washington, DC: American Psychology Association.

Confrey, J., & Maloney, A. P. (2011). A next generation of mathematics assessments based on learning trajectories: Diagnostic learning profiles. İçinde J. Confrey, A. P. Maloney & K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education:* Information Age*.*

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, Thessaloniki, Greece.

Corcoran, T., Mosher, F.A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence based approach to reform*. NY: Center on Continuous Instructional Improvement, Teachers College Columbia University.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (2nd baskı).

Thousand Oaks, CA: Sage.
Çıkla A. O. & Duatepe, A. (2002). A qualitative study on the proportional reasoning skills of the preservice elementary mathematics teachers. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*, 32-40.
Duncan, R.G., & Hmelo-Silver, C.E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment*. Journal of Research in ScienceTeaching*, *46*, 606–609.
Edgington, C., Sztajn, P., & Wilson, P. H., & Confrey, J. (2011). Teachers' use of a learning trajectory for formative assessment*. Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Reno, Nevada.
Empson, S. B., & Turner, E. (2006). The emergence of multiplicative thinking in children's solutions to paper folding tasks. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 46-56.
Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004, September). The teaching experiment-What it is and what it isn't. İçinde *2003 Physics Education Research Conference* (Cilt 720, s 157-160).
Eraslan, A. (2009). lköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğretmenlik uygulaması üzerine görüs ve değerlendirmeleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *3*(1), 208-221
Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. İçinde D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (s. 147-164). New York: Macmillan.
Franklin, A., Yilmaz, Z., & Confrey, J. (2010, Kasım). *Reconciling student thinking and theory: The delta learning trajectory and the case of transitivity.* Thirty- Second Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH.
Hacıömeroğlu G., & Şahin Taşkın Ç. (2010). Sınıf öğretmeni adaylarının matematik öğretimi yeterlik inançları. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(2), 539-555.
Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.
Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Miles, M. B. & Huberman, M. A. (1994). *Qualitative Analysis: An Extended Source Book* (2. baski) Thousand Oaks, CA:Sage.
Mojica, G. (2010). *Preparing pre-service elementary teachers to teach mathematics with learning trajectories* (Yayınlanmamış doktora tezi). North Carolina State University, Raleigh, NC.
Pellegrino, J. W. (2009). The challenges of conceptualizing what low achievers know and how to assess their competence. İçinde M. Perie (Ed.), *Considerations for the alternate assessment based on modified achievement standards* (*AAMAS): Understanding the eligible population and applying that knowledge to their instruction and assessment*. New York, NY: New York Comprehensive Center.
Philipp, R. (2008). Motivating prospective elementary school teachers to learn mathematics by focusing upon children's mathematical thinking. *Issues in Teacher Education*, *17*(2), 7-26.
Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape analysis. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 405-435.
Ryan, J. & McCrae, B. (2006). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 7, 72-89.
Sawchuk, S. (2010). Full cost of professional development hidden. *Education Week*, *30*(11), 14-16.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.
Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147–156.
Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In A. Kelly & R. Lesh (Editörler.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s.267 – 306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Steffe, L. P., & Ulrich, C. (2014). Constructivist teaching experiment. In *Encyclopedia of mathematics education* (s. 102-109). Springer Netherlands.
Stein, M. K., & Smith, M. S. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston, VA: Corwin.
Toluk, Z. & Middleton, J. A. (2001). The development of children's understanding of quotient: A teaching experiment. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of 25th Annual Meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: Hogrefe.
Toluk-Uçar, Z. (2010). Sınıf Öğretmeni adaylarının matematiksel bilgileri ve öğretimsel açıklamaları. *e-Journal of New World Science Academy*, 5(3), 911-920.

Wilson, P. H. (2009). *Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning* (Yayınlanmamış doktora tezi). North Carolina State University. Raleigh, NC.

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 149-175.

Yilmaz, Z. (2011). *Toward an understanding of students' strategies on reallocation and covariation items: In relation to an equipartitioning learning trajectory* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). North Carolina State University, Raleigh, NC.

Zembat, I, O. (2007). Working on the same problem – Concepts; with the usual subjects – Prospective Elementary Teachers. *Elementary Education Online*, *6*(2), 305-312.

EK A

Eşpaylaşım Öğrenme Rotası: Bilişsel Düzeyler (Pellegrino, 2009 s.19-20 den alıntılanmış ve araştırmacılar tarafından Türkçeleştirilmiştir).

1. Birebir eşleme veya birleşik birim kullanarak [örn. Aynı anda iki nesneyi dağıtmak] bir topluluğu eş paylaştırma.
2. Bir bütünü eş parçalara ayırma (dikdörtgen, daire).
   Kriter: Doğru sayıda parça, eşit-büyüklükte parça ve bir bütünü tamamen tüketme.
3. Sayarak, üst üste koyarak, dikdörtgensel diziler oluşturarak, örüntü gibi stratejileri kullanarak bir paylaşımın eş paylaşım olduğunu doğrulama.
4. Parçaları isimlendirme, referans birim (referent unit) kullanarak:
    a. Topluluklarda: 12 [nesne]' yi 2 [kişi] arasında paylaştırma (yarım ya da altı).
    b. Bir bütünü: Bir bütünü n adet [eşit büyüklükte] parçaya ayırma (1/n ya da bir bütünün 1/n'i).
5. Eşit büyüklükteki grupları (ya da toplulukları) ya da parçaları (bir bütünün) tekrar birleştirme:
    a. n katı kadar, n katı büyüklükte.
6. Paylaşan insan sayısının değişiminin payın büyüklüğüne olan etkisini tahmin etme (nitel dengeleme-qualitative compensation).
7. Bir bütünü bir sayının pozitif çarpanlarını ya da tam bölenlerini kullanarak parçalara ayırmanın sonuçlarını tahmin etme.
    a. İki ya da daha fazla parçaya ayırma ve tam bölenlerini tespit ederek ayırma.
8. Paylaşım yapılan kişi sayısındaki (tam bölen olacak şekilde) değişimin payın büyüklüğü üzerindeki etkisini ve etkinin doğruluğunu gösterme, ya da bu durumun tam tersi. Topluluk ve bir bütünü eş paylaştırma durumları için, nicel dengeleme 1. (quantitative compensation 1)
9. Artan payın daha az sayıda kişi (toplamsal değişim) için nasıl tekrar dağıtılabileceğini gösterme ve doğrulama, nicel dengeleme 2.
10. [Şekil olarak] eş olmayan parçaların, aynı bütünün içinde veya [aynı sayıda parçaya eş olarak farklı şekilde bölünmüş aynı büyüklükteki] bütünler arasında, eş olduğunu gösterme (geçişkenlik - geçişme).
    a. Parçalama/birleştirme (decomposition/composition):
    b. [Erken] Geçişkenlik (Geçişme): Eğer X=Y, x=1/2X ve y=1/2Y ise, x=y dir.
11. Bir bütünün 1'den büyük herhangi bir doğal sayıya her zaman eş olarak paylaştırılabileceğini ileri sürme
12. Birden fazla bütünü birden fazla kişi arasında eşpaylaştırma ve paylaştırılan bütün sayısı referans alınarak payı isimlendirebilme.
13. Birden fazla bütünü bir sayının pozitif çarpanlarını ya da tam bölenlerini kullanarak eşparçalara ayırmanın sonucunu tahmin etme.

14. Paylaştırılacak nesnelerin, paylaşım yapılacak kişi sayısının ve/veya payın büyüklüğünün pozitif çarpanların veya tam bölenlerin dikkate alınarak değiştirilmesi, ve bu değişimin etkisinin tahmin edilmesi (nicel dengelemenin sayısal olarak ifadelendirilmesi için doğru, ters [orantı] ve kovaryasyon [kullanımı]).
15. Dağılma özelliğini birden fazla bütünü [eşpaylaştırmaya], [farklı şekilde eşparçalara ayrılmış bütünlerin içinde oluşan parçalarının eşit büyüklükte olduğunu gösterecek şekilde], uygulama.
16. a sayıdaki nesnenin b sayıdaki kişi arasında paylaştırılması [b sıfırdan farklı bir değer olmak üzere] her zaman bir kişinin payının a/b olması ile neticelenir, orantısal akıl yürütme ve dağıtma özelliğini kullanarak.