

ANKASTRE MESNETLİ ÇOK KADEMELİ KİRİŞLERİN LİNEER ENİNE TİTREŞİMLERİ

Ayla TEKİN¹, Erdoğan ÖZKAYA^{2*}

¹Celal Bayar Üniversitesi, Soma Meslek Yüksekokulu, Makine Bölümü 45100, Soma, Manisa, TÜRKİYE

²Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü 45140, Manisa, TÜRKİYE

Özet:Bu çalışmada keyfi noktalarda n tane kademeye sahip değişken kesitli üç farklı kiriş sistemi için serbest titreşim analizi yapılmıştır. Kirişlerin her iki ucundan ankastre olarak mesnetlendiği kabul edilmiştir. Hamilton prensibi kullanılarak hareket denklemleri ve sınır şartları üç farklı kiriş için elde edilmiştir. Denklemler boyutsuzlaştırılarak geometrik yapıya ve malzemeye olan bağımlılık ortadan kaldırılmıştır. Elde edilen kısmi diferansiyel denklemler çözülerek tabii frekans denklemleri elde edilmiştir. Değişik kademe ve kesitler için tabii frekanslar hesaplanmıştır. Ayrıca kademe konumunun, oranının ve kesidinin titreşimlere olan etkisinde incelenmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Çok kademeli kiriş, Hamilton prensibi, tabii frekans

LINEAR TRANSVERSE VIBRATIONS OF A CLAMPED MULTI – STEPPED

Abstract:In this study, free vibrations of stepped beams having n different sections are investigated. Beams were assumed to be clamped. The equations of motions and boundary conditions for three types of beam were obtained using Hamilton's Principle. Then the equations were made non dimensional. So, the dependence of solution on the material and the geometric shape of the system were eliminated. Solving the differential equations, natural frequency equations were obtained. Natural frequencies were calculated for different step and cross-section. The effects of the position, proportion and cross-section of the step on the vibrations were determined and compared with each other.

Key words: Multi-stepped beam, Hamilton's Principle, natural frequency

*Sorumlu Yazar

erdogan.ozkaya@bayar.edu.tr

GİRİŞ

Gerçek yaşamda birçok mühendislik problemi kademeli kiriş olarak modellenebilir. Demir yolları, köprüler, otomotiv endüstrisi ve makine elemanları gibi pek çok uygulama alanı vardır. Bu nedenle çok kademeli kirişlerin titreşim analizi önemli mühendislik problemlerinden biridir. Titreşim analizinin en önemli kısmı sistemlerin tabii frekanslarının hesaplanmasıdır. Eğer sistemlere tabii frekansa yakın frekansta zorlama uygulanırsa sistem rezonansa gelir ve genlikler tehlikeli bir şekilde büyür.

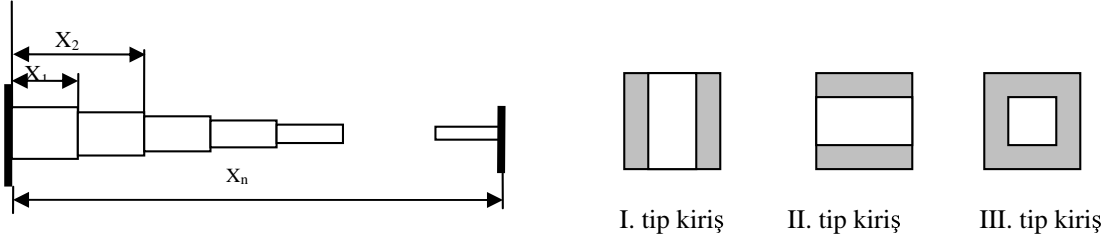
Kademeli kiriş titreşimleri ile ilgili yapılan çalışmalardan ilki Taleb ve Suppiger [1]'a aittir. Yapılan çalışmada tek kademeli basit mesnetlenmiş kirişin frekans denklemi elde edilmiş ve denklemin çözümü ile tabii frekanslar bulunmuştur. Balasubramanian ve Subramanian [2,3] yaptıkları çalışmalarda orta noktadan tek kademeli kiriş titreşimlerini incelemiştir. Jang ve Bert [4] ilk çalışmasında değişik sınır şartlarında tek kademeli kiriş için frekans denklemlerini elde etmiş ve dairesel kesitli kiriş için en küçük tabii frekansları hesaplamıştır. Elde edilen sonuçları sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Jang ve Bert [5] diğer çalışmalarında ise referans [4]'de elde edilen frekans denklemlerinden yararlanarak yüksek mod yapıları için tabii frekansları elde etmişlerdir. Sato [6] her iki ucu ankastre ve basit olarak mesnetlenmiş bir kademeli dikdörtgen kesitli kiriş için nonlineer titreşim analizi yapmış çözüm için matris metodunu kullanmıştır. Sonuçlar Galerkin metodu kullanılarak elde edilen lineer mod yapıları ile karşılaştırılmıştır. Sarıgül ve Aksu [7,8] iki ucu da ankastre kiriş ve millerin serbest titreşimlerini incelemek için sonlu farklar tekniğini kullanmış ve geliştirilen tekniği üniform ve üniform olmayan kademeli kiriş ve shaftların dinamik analizi için uygulamıştır. Enerji fonksiyoneli, yer değiştirme elemanlarına göre minimum duruma getirilip tabii frekanslar ve mod şekilleri hesaplamıştır.

Naguleswaran [9] yaptığı çalışmada sınır şartlarının tüm durumları için tek kademeli üç farklı Euler-Bernoulli kirişinin (dairesel, dikdörtgen kesitli) hareket denklemlerini elde etmiş ve hareket denklemlerinden yararlanarak ilk üç tabii frekansı hesaplamıştır. Dong, Meng, Li, Ye [10] tarafından yapılan çalışmada farklı malzemeden yapılmış tek kademeli Timoshenko kirişinin serbest titreşimleri üzerinde durulmuştur. Özkaya, Tekin, Ekici [11] yapmış oldukları çalışmada bir ucu ankastre diğer ucu serbest kademeli kirişlerin Rayleigh ve Rayleigh-Ritz metodu kullanılarak tabii frekanslarını hesaplamışlardır. Elde ettikleri sonuçları gerçek değerlerle karşılaştırmışlardır.

Bu çalışmada, mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılan üç farklı prizmatik kesitli kiriş sistemi ele alınmıştır. Birinci kiriş sabit yükseklik değişen genişlik, ikinci kiriş değişen yükseklik sabit genişlik, üçüncü kiriş değişen yükseklik ve genişlikteki dikdörtgen kesitli kiriştir. Her iki ucundan ankastre olarak mesnetlendiği kabul edilen kiriş için titreşim analizi yapılmıştır. Çözüm için Hamilton prensibi kullanılarak en genel hal hareket denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü ile üç farklı kesite sahip tek kademeli kiriş için tam sonuç veren frekans denklemleri elde edilmiştir. Bir, iki ve üç kademeli kiriş için elde edilen tabii frekans değerleri tablo halinde verilmiştir. Tek kademeli üç farklı kiriş tipi içinde mod yapılarını veren grafikler çizilmiştir.

2.HAREKET DENKLEMLERİ

İncelediğimiz sistem n kademeli, ankastre ankastre olarak mesnetlenmiş dikdörtgen kesitli kiriş sistemidir. Kullanılan kirişlerden I. tip sabit yükseklik değişen genişliğe sahip, II. tip değişen yükseklik sabit genişliğe sahip, III. tip değişen yükseklik ve genişliğe sahip dikdörtgen kesitli kiriş sistemidir. Şekil-1'de çok kademeli ankastre olarak mesnetlenmiş kiriş sistemi ve üç farklı kiriş tipi için kesitler görülmektedir.



Şekil 1: Çok kademeli ankastre mesnetli kiriş sistemi ve kesitleri

Sistemin Lagrangian'ı şu şekilde yazılabilir:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \left[\int_{x_m}^{x_{m+1}} \rho A_{m+1} \dot{w}_{m+1}^2 dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} EI_{m+1} w_{m+1}''^2 dx \right] \quad (2.1)$$

Burada $x_0 = 0$ ve $x_{n+1} = L$ dir. Denklemden n kademeye sayısını, ρ kirişin yoğunluğunu, A_{m+1} kademeli kirişin kesit alanını, w_{m+1} kirişin kademelerle bölünmüş

her bir parçasının yer değiştirmesini, E Young modülünü, I_{m+1} kademeli kirişin asal eksene göre kesit atalet momentini, (\cdot) zamana göre türevi, $(\cdot)'$ x'e göre türevi gösterir.

Hamilton prensibine göre

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L} dt = 0 \quad (2.2)$$

Lagrangian ifadesi yerine denklem (2.1) yazılıp gerekli matematiksel işlemler yapılırsa ve boyuna yer değiştirmeler elimine edilirse üç

farklı kiriş için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\rho A_{m+1} \ddot{w}_{m+1} + EI_{m+1} w_{m+1}^{iv} = 0 \quad m=0,1,2,\dots,n \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'te n+1 tane birbirine bağlı denklem takımı elde edilir. Bu denklemlerin

çözümü için süreklilik şartları şu şekilde yazılabilir.

$$w_p(x_p, t) = w_{p+1}(x_p, t), \quad w_p'(x_p, t) = w_{p+1}'(x_p, t) \quad (2.4)$$

$$EI_p w_p''(x_p, t) - EI_{p+1} w_{p+1}''(x_p, t) = 0; \quad (2.5)$$

$$EI_p w_p'''(x_p, t) - EI_{p+1} w_{p+1}'''(x_p, t) = 0 \quad p = 1,2,\dots,n$$

Aşağıdaki tanımlar yapılarak denklemler boyutsuzlaştırılabilir.

$$x^* = x/L, \quad w_p^* = w_p/L, \quad \eta = x_p/L, \quad t^* = (EI_1 / \rho A_1 L^4)^{1/2} t \quad (2.6)$$

$$\alpha_p = \frac{b_{p+1}}{b_1} \quad \text{ve} \quad \gamma_p = \frac{h_{p+1}}{h_1} \quad (2.7)$$

Denklem (2.7)'de α_p boyutsuz parametresi kademeli kesit genişliklerinin birinci kesit

genişliğine oranını ve γ_p boyutsuz parametresi ise kademeli kesit yüksekliklerinin

birinci kesit yüksekliğine oranını ifade eden denklemler elde edilir.
 etmektedir. Boyutsuzlaştırma sonucu aşağıdaki

$$\text{I. tip kiriş için} \quad \ddot{w}_{m+1}^* + w_{m+1}^{*iv} = 0, \quad (2.8)$$

$$\text{II. ve III. tip kiriş için} \quad \ddot{w}_{m+1}^* + \gamma_m^2 w_{m+1}^{*iv} = 0 \quad m=0,1,2,\dots,n \quad (2.9)$$

Süreklilik şartları şu şekilde yazılabilir.

$$\text{I. tip kiriş için} \quad w_p^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}^*(\eta_p, t^*), \quad w_p'^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}'^*(\eta_p, t) \quad (2.10)$$

$$w_p^{n*}(\eta_p, t^*) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{p+1}^{n*}(\eta_p, t^*), \quad w_p^{m*}(\eta_p, t^*) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} w_{p+1}^{m*}(\eta_p, t) \quad (2.11)$$

$$\text{II. tip kiriş için} \quad w_p^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}^*(\eta_p, t^*), \quad w_p'^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}'^*(\eta_p, t) \quad (2.12)$$

$$w_p^{n*}(\eta_p, t^*) = \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} w_{p+1}^{n*}(\eta_p, t^*), \quad w_p^{m*}(\eta_p, t^*) = \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} w_{p+1}^{m*}(\eta_p, t) \quad (2.13)$$

$$\text{III. tip kiriş için} \quad w_p^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}^*(\eta_p, t^*), \quad w_p'^*(\eta_p, t^*) = w_{p+1}'^*(\eta_p, t) \quad (2.14)$$

$$w_p^{n*}(\eta_p, t^*) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} w_{p+1}^{n*}(\eta_p, t^*), \quad w_p^{m*}(\eta_p, t^*) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} w_{p+1}^{m*}(\eta_p, t) \quad (2.15)$$

Yukarıdaki denklemlerde $\alpha_0 = 1$ ve $\gamma_0 = 1$ alınmıştır. Bundan sonra yapılan işlemlerde kolaylık olsun diye boyutsuz parametrelerden (*) işareti kaldırılacaktır.

(2.15)'de elde edilen süreklilik şartları için çözülecektir. Elde edilen genel formlar kullanılarak tek kademeli üç farklı kiriş için tabii frekans denklemleri ve α , γ parametresinin bazı değerleri için tabii frekanslar elde edilecektir. İki ve üç kademeli durumlar için elde edilen tabii frekans değerleri tablo olarak verilmiştir.

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

Bu bölümde denklem (2.8) ve (2.9)'da elde edilen hareket denklemleri denklem (2.10)-

$$w_{m+1} = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) Y_{m+1}(x) \quad m=0,1,2,\dots,n \quad (3.1)$$

Yukarıda ω sistemin tabii frekansını gösterir. Denklem (3.1) denklem (2.8) ve (2.9)'a yerleştirilirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\text{I. kiriş için} \quad Y_{m+1}^{iv} - \omega^2 Y_{m+1} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{II. ve III. kiriş için} \quad Y_{m+1}^{iv} - \frac{1}{\gamma_m^2} \omega^2 Y_{m+1} = 0 \quad (3.3)$$

Ortak sınır şartları aşağıdaki şekli alır.

$$\text{I. kiriş için} \quad Y_p(\eta_p) = Y_{p+1}(\eta_p), \quad Y_p'(\eta_p) = Y_{p+1}'(\eta_p) \quad (3.4)$$

$$Y_p''(\eta_p) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} Y_{p+1}''(\eta_p), \quad Y_p'''(\eta_p) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} Y_{p+1}'''(\eta_p) \quad (3.5)$$

$$\text{II.kiriş için} \quad Y_p(\eta_p) = Y_{p+1}(\eta_p), \quad Y_p'(\eta_p) = Y_{p+1}'(\eta_p) \quad (3.6)$$

$$Y_p''(\eta_p) = \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} Y_{p+1}''(\eta_p), \quad Y_p'''(\eta_p) = \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} Y_{p+1}'''(\eta_p) \quad (3.7)$$

$$\text{III.kiriş için} \quad Y_p(\eta_p) = Y_{p+1}(\eta_p), \quad Y_p'(\eta_p) = Y_{p+1}'(\eta_p) \quad (3.8)$$

$$Y_p''(\eta_p) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} Y_{p+1}''(\eta_p), \quad Y_p'''(\eta_p) = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}} \frac{\gamma_p^3}{\gamma_{p-1}^3} Y_{p+1}'''(\eta_p) \quad (3.9)$$

$$p=1,2,3,\dots,n$$

Denklem (3.2-3.3)'den n+1 tane diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemler için şu şekilde bir çözüm önerilebilir.

$$Y_{m+1} = C_{m+1}^1 \text{Sink}_m \beta x + C_{m+1}^2 \text{Cosk}_m \beta x + C_{m+1}^3 \text{Sinhk}_m \beta x + C_{m+1}^4 \text{Coshk}_m \beta x \quad (3.10)$$

Denklem (3.10)'da $m=0,1,2,\dots,n$ dir. Bu denklemde $\beta = \sqrt{\omega}$, I. tip kiriş için $k_m = 1$ ve II. ve III. tip kirişler için ise $k_m = 1/\sqrt{\gamma_m}$ dir. Tek kademeli, değişik kesitli ve değişik sınır şartlarına sahip kirişler için tabii frekans denklemleri Tablo-1'de verilmiştir. Denklem

(3.2-3.3) kullanılarak istenilen kademe sayısı için tabii frekans denklemi bulunabilir. Kademe sayısı arttıkça tabii frekans denklemini analitik olarak elde etmek zorlaşmaktadır. Tablo-2, Tablo-3 ve Tablo-4'de değişik kademeler için ilk üç tabii frekans değerleri verilmiştir.

edilen hareket denklemleri farklı durumlar içinde kullanılabilir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada ankastre mesnetli çok kademeli üç farklı kiriş sistemi ele alınmıştır. Sistemin en genel hal hareket denklemleri çıkartılmış, denklemler boyutsuzlaştırılarak çözümün kullanılan malzemenin cinsine ve sistemin geometrik yapısına olan bağımlılığı ortadan kaldırılmıştır. Elde edilen kısmi diferansiyel denklemler çözülerek tek kademeli durum için tam sonuç veren tabii frekans denklemi analitik olarak elde edilmiştir. Tek, iki ve üç kademeli üç farklı kiriş için kademelerin yerleri ve oranları değiştirilerek ilk üç tabii frekans hesaplanmıştır. Kirişe uygulanan kademelerin konumları değiştirildiğinde lineer frekanslar farklı şekilde değişmektedir. Kademe sayısının artması ile bütün modlar için tabii frekansın azaldığı gözlenmiştir. Üç farklı kiriş tipi için mod yapılarını veren grafik çizilmiştir. Elde

5. TEŞEKKÜR

Bu çalışma 104M427 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

6. KAYNAKLAR

- [1] N.J. TALEB and E.W. SUPPIGER 1961 *Journal of Aerospace Engineering* 28, 295-298. Vibrations of stepped beams.
- [2] S. BALASUBRAMANIAN and G. SUBRAMANIAN 1985 *Journal of Sound and vibration* 99, 563-567. On the performance of a four-degree-of-freedom per node element for stepped beam analysis and higher frequency estimation.
- [3] G. SUBRAMANIAN and T. S. BALASUBRAMANIAN 1987 *Journal of Sound and vibration* 118, 555-560. Beneficial effects of steps on the free vibration characteristics of beams.

[4] S.K. JANG , C.W.BERT 1989 *Journal of Sound and Vibration* 130(2), 342-346, Free Vibration of stepped beams: Exact and Numerical Solutions.

[5] S. K. JANG and C. W. BERT 1989 *Journal of Sound and vibration* 132, 164-168. Free vibrations of stepped beams: higher mode frequencies and effects of steps on frequency.

[6] H. SATO 1980 *Journal of Sound and Vibration* 72, 415-422, Non-linear free vibrations of stepped thickness beams.

[7] A.S. SARIGUL and G.AKSU 1986, *Mechanism and Machine Theory* 21,1-12, A finite difference method for the free vibration analysis of stepped Timoshenko beams and shafts.

[8] A.S. AYDIN and G.AKSU 1981, *Metu Journal of pure and applied sciences* 14, 130-156. Free

vibration analysis of nonuniform and stepped thickness beams and shafts.

[9] S. NAGULESWARAN 2002, *Journal of Sound and Vibration* 252, 751-767, Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an Euler-Bernoulli beam with one-step change in cross-section and with ends on classical supports.

[10] X. DONG, G. MENG, H. LI, L. YE 2005, *Mechanics Research Communications* 32, 572-581, Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam.

[11] E. ÖZKAYA, A. TEKİN, H. O. EKİCİ 2004, *Soma Meslek Yüksekokulu Teknik Bilimler Dergisi* 2, 5-15, Kademeli millerin tabii frekanslarının Rayleigh ve Rayleigh-Ritz Metodları ile hesaplanması.

Geliş Tarihi: 21/02/2007

Kabul Tarihi: 30/04/2007

Tablo-1: Tek kademeli üç farklı giriş tipi için tabii frekans denklemleri

Kiriş tipi	Tabii frekans denklemleri
I. tip giriş	$4 + 4\alpha^2 - \{(1 + 6\alpha + \alpha^2) \cos[\beta] + (-1 + \alpha)^2 \cos[\beta - 2\beta\eta]\} \cosh[\beta] - 4(-1 + \alpha^2) \cos[\beta\eta] \cosh[\beta\eta] - \cos[\beta] \cosh[\beta - 2\beta\eta] + 2\alpha \cos[\beta] \cosh[\beta - 2\beta\eta]$ $- \alpha^2 \cos[\beta] \cosh[\beta - 2\beta\eta] - \cos[\beta - 2\beta\eta] \cosh[\beta - 2\beta\eta] + 2\alpha \cos[\beta - 2\beta\eta] \cosh[\beta - 2\beta\eta] - \alpha^2 \cos[\beta - 2\beta\eta] \cosh[\beta - 2\beta\eta]$ $- 4 \cos[\beta - \beta\eta] \cosh[\beta - \beta\eta] + 4\alpha^2 \cos[\beta - \beta\eta] \cosh[\beta - \beta\eta]$
II. tip giriş	$-k\gamma^2 \{-4 - 4k^4\gamma^6 - 4(-1 + k^4\gamma^6) \cos[k\beta(-1 + \eta)] \cosh[k\beta(-1 + \eta)] + 4(-1 + k^4\gamma^6) \cos[\beta\eta] \cosh[\beta\eta] + \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)]\}$ $- 2k\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k^2\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] - 2k^3\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] +$ $k^4\gamma^6 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] - 2k^2\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)]$ $+ k^4\gamma^6 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] - 2k^2\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] +$ $k^4\gamma^6 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + 2k\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $+ 2k^2\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + 2k^3\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + k^4\gamma^6 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] -$ $2k\gamma^3 \sin[\beta(k + \eta - k\eta)] \sinh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k^3\gamma^3 \sin[\beta(k + \eta - k\eta)] \sinh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k\gamma^3 \sin[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \sinh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $- 2k^3\gamma^3 \sin[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \sinh[\beta(k + \eta - k\eta)]\}$
III. tip giriş için	$-k\gamma^2 \{-4 - 4k^4\alpha^2\gamma^6 - 4(-1 + k^4\alpha^2\gamma^6) \cos[k\beta(-1 + \eta)] \cosh[k\beta(-1 + \eta)] + 4(-1 + k^4\alpha^2\gamma^6) \cos[\beta\eta] \cosh[\beta\eta] + \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)]\}$ $- 2k\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k^2\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] - 2k^3\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)]$ $+ k^4\alpha^2\gamma^6 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] - 2k^2\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)]$ $+ k^4\alpha^2\gamma^6 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] - 2k^2\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $+ k^4\alpha^2\gamma^6 \cos[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + 2k\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $+ 2k^2\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + 2k^3\alpha\gamma^3 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)] + k^4\alpha^2\gamma^6 \cos[\beta(k + \eta - k\eta)] \cosh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $- 2k\alpha\gamma^3 \sin[\beta(k + \eta - k\eta)] \sinh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k^3\alpha\gamma^3 \sin[\beta(k + \eta - k\eta)] \sinh[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] + 2k\alpha\gamma^3 \sin[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \sinh[\beta(k + \eta - k\eta)]$ $- 2k^3\alpha\gamma^3 \sin[\beta(k(-1 + \eta) + \eta)] \sinh[\beta(k + \eta - k\eta)]\}$

Tablo-2: Tek kademeli üç farklı giriş tipi için değişik α , γ ve η değerlerine karşılık gelen ilk üç tabii frekans

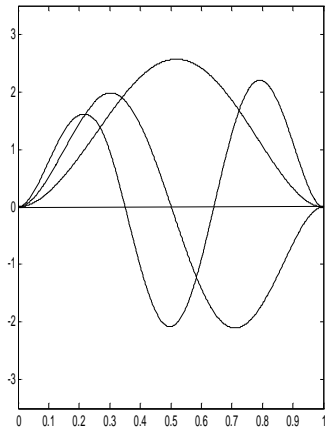
	α_1, γ_1	η_1	ω_1	ω_2	ω_3
I. tip giriş	0.2	0.25	28.4417	61.9813	117.4907
		0.50	19.9091	66.3040	114.6162
		0.75	18.7477	54.5791	116.3613
	0.5	0.25	24.5808	62.4773	120.3586
		0.50	21.8505	62.6000	119.6126
		0.75	20.7078	59.5429	119.6714
	4.0	0.25	19.2428	55.9780	117.2328
		0.50	20.4653	65.1950	116.0860
		0.75	27.4270	62.2336	118.3210
	1.0	1.00	22.3732	61.6728	120.9575
II. tip giriş	0.2	0.25	7.8140	21.1566	39.2076
		0.50	11.5976	20.4034	49.3245
		0.75	8.7563	37.4580	68.1375
	0.5	0.25	15.9250	37.9675	68.9790
		0.50	14.8373	44.3571	81.7582
		0.75	17.1149	46.6647	100.3682
	4.0	0.25	41.5279	152.6078	341.6976
		0.50	47.5463	100.2677	237.6737
		0.75	38.4205	101.8890	176.5982
	1.0	1.00	22.3732	61.6728	120.9575
III. tip giriş	0.2	0.25	7.9216	21.7692	42.0785
		0.50	13.2701	49.3352	85.9713
		0.75	6.9159	38.2579	76.7182
	0.5	0.25	17.4444	40.7346	67.4941
		0.50	14.6697	44.4759	82.2323
		0.75	15.1864	42.2375	103.1324
	4.0	0.25	31.0673	155.4323	351.8107
		0.50	53.0768	93.3246	243.8443
		0.75	39.4229	107.5393	239.0644
	1.0	1.00	22.3732	61.6728	120.9575

Tablo-3: İki kademeli üç farklı kiriş tipi için değişik α , γ ve η değerlerine karşılık gelen ilk üç tabii frekans

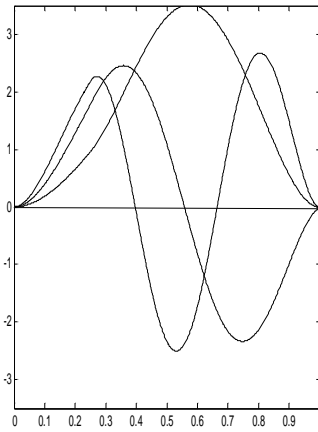
	α_1, γ_1	α_2, γ_2	η_1	η_2	ω_1	ω_2	ω_3
I. tip kiriş	0.8	0.25	0.15	0.35	25.43216	61.46335	124.92923
			0.25	0.55	21.14229	63.87679	119.51674
			0.45	0.75	19.87135	57.43618	118.0184
	0.4	0.8	0.15	0.35	23.53501	65.18724	126.06197
			0.25	0.55	24.98344	63.00526	119.13035
			0.45	0.75	23.93674	63.46405	119.1934
	2.0	1.0	0.15	0.35	21.00059	58.67115	118.54021
			0.25	0.55	19.70941	59.90623	119.19772
			0.45	0.75	19.70941	59.90623	119.19772
	2.0	4.0	0.15	0.35	19.49318	58.24138	119.19884
			0.25	0.55	20.85101	60.30625	119.05665
			0.45	0.75	23.92341	63.22323	119.93316
II. tip kiriş	0.8	0.25	0.15	0.35	11.66172	25.07756	73.07287
			0.25	0.55	11.38837	29.05490	57.30808
			0.45	0.75	11.07848	36.14706	80.57156
	0.4	0.8	0.15	0.35	17.73586	47.26159	96.70434
			0.25	0.55	17.96991	45.17302	76.93207
			0.45	0.75	17.82644	42.72606	86.82310
	2.0	1.0	0.15	0.35	21.26245	65.18045	135.73194
			0.25	0.55	22.47514	69.04712	135.33090
			0.45	0.75	22.47541	69.04712	135.33090
	2.0	4.0	0.15	0.35	49.85876	161.33289	296.13440
			0.25	0.55	48.37355	121.29444	279.41354
			0.45	0.75	45.40649	113.59916	192.28904
III. tip kiriş	0.8	0.25	0.15	0.35	12.74339	29.27688	40.18606
			0.25	0.55	13.02773	28.35371	61.07955
			0.45	0.75	9.28386	36.75899	84.83832
	0.4	0.8	0.15	0.35	16.46365	47.20979	106.40963
			0.25	0.55	18.11491	49.15587	76.78723
			0.45	0.75	18.58322	42.45848	90.52337
	2.0	1.0	0.15	0.35	18.90516	60.26108	128.93962
			0.25	0.55	18.16933	62.40693	128.05648
			0.45	0.75	18.16933	62.40693	128.05648
	2.0	4.0	0.15	0.35	42.18572	162.26972	276.17446
			0.25	0.55	50.07037	113.56197	298.25007
			0.45	0.75	52.92484	118.52904	200.17287

Tablo-4: Üç kademeli üç farklı kiriş tipi için değişik α , γ ve η değerlerine karşılık gelen ilk üç tabii frekans

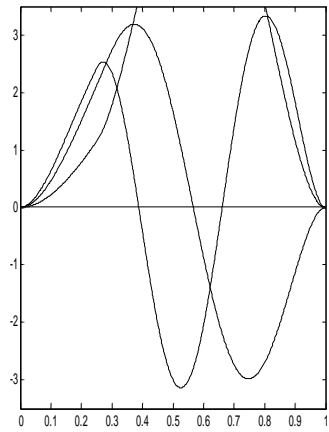
	α_1, γ_1	α_2, γ_2	α_3, γ_3	η_1	η_2	η_3	ω_1	ω_2	ω_3
I. tip kiriş	0.8	0.65	0.25	0.15	0.35	0.60	21.78023	68.92574	123.47458
				0.25	0.55	0.80	20.61641	58.68034	116.83192
				0.35	0.65	0.90	20.14623	57.66912	115.86803
	2.0	1.2	0.8	0.15	0.35	0.60	20.29484	58.93854	118.41896
				0.25	0.55	0.80	19.07655	58.37731	118.20379
				0.35	0.65	0.90	19.11845	57.99471	120.87265
	2.0	4.0	6.0	0.15	0.35	0.60	19.98489	58.56833	119.32659
				0.25	0.55	0.80	22.45492	61.61795	119.60693
				0.35	0.65	0.90	23.67760	62.91361	126.23689
II. tip kiriş	0.8	0.65	0.25	0.15	0.35	0.60	10.80371	31.97607	53.19297
				0.25	0.55	0.80	12.54548	33.77504	71.94161
				0.35	0.65	0.90	14.24307	40.08662	79.138810
	2.0	1.2	0.8	0.15	0.35	0.60	19.67366	63.14789	128.17729
				0.25	0.55	0.80	22.26046	66.91896	133.09327
				0.35	0.65	0.90	22.52071	63.46082	158.71831
	2.0	4.0	6.0	0.15	0.35	0.60	64.54878	185.01863	336.70813
				0.25	0.55	0.80	62.03908	138.99625	300.83137
				0.35	0.65	0.90	54.45095	135.33903	248.81432
III. tip kiriş	0.8	0.65	0.25	0.15	0.35	0.60	11.92547	33.64719	53.51806
				0.25	0.55	0.80	10.97491	32.85169	73.68745
				0.35	0.65	0.90	13.63640	35.84716	71.01432
	2.0	1.2	0.8	0.15	0.35	0.60	16.98264	60.63037	120.53019
				0.25	0.55	0.80	18.28503	58.81616	125.49170
				0.35	0.65	0.90	18.06845	57.11278	162.45541
	2.0	4.0	6.0	0.15	0.35	0.60	67.12871	183.27529	319.36474
				0.25	0.55	0.80	69.33147	144.94608	317.65618
				0.35	0.65	0.90	60.35233	150.53499	218.43598



I. tip kiriş



II. tip kiriş



III. tip kiriş

Şekil-2: Tek kademeli üç farklı kiriş tipi için ilk üç mod yapısını veren grafik ($\alpha_1 = 0.5$ ve $\eta_1 = 0.25$)