C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
4.1 (2008) 9 – 18 4.1 (2008) 9 – 18

# $C^r$ MANİFOLD GRUPLARININ ÖRTÜ GRUPLARI

**Nazmiye Alemdar[1*], Osman Mucuk[2], Mehmet Özdemir[3]**
[1]Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 38039 Kayseri, TÜRKİYE
[2]Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 38039 Kayseri, TÜRKİYE
[3]Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 38039 Kayseri, TÜRKİYE

**Özet:** Bu makalede Lie grupları ve topolojik grupları içeren $C^r$ gruplarının grup yapılarının $C^r$ örtü fonksiyonları tarafından örtülerine yükseldiği ispat edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** *Topolojik grup,* $C^r$ *grubu, Örtü grubu*

# COVERİNG GROUPS OF $C^r$ MANİFOLD GROUPS

**Abstract:** In this paper it was proved that the group structures of $C^r$ manifolds, which includes both topological groups and Lie groups, lift to the coverings , via $C^r$ covering maps.

**Keywords:** *Topological grup,* $C^r$ *group, covering group*

**A.M.S. Clasification:** *22A05, 22E05, 22E20*

---

***Sorumlu Yazar**

nakari@erciyes.edu.tr

## 1. Giriş

$X$ irtibatlı bir topolojik grup, $e \in X$ birim eleman ve $p : \widetilde{X} \to X$ topolojik uzayların bir örtü fonksiyonu olsun. Burada $\widetilde{X}$ sadece bir topolojik uzaydır. Bunlara ilaveten eğer $\widetilde{X}$ basit irtibatlı ve $\widetilde{e}$ de $p(\widetilde{e}) = e$ olacak şekildeki $\widetilde{X}$ in bir elemanı ise birim eleman $\widetilde{e}$ olacak şekilde $\widetilde{X}$ üzerinde bir grup yapısı vardır. Bu grup yapısına göre $\widetilde{X}$ bir topolojik grup ve $p : \widetilde{X} \to X$ de sürekli bir grup homomorfizmidir [1].

Uzayların irtibatsız olması durumunda bu problem oldukça karmaşıktır. Bununla ilgili ilk olarak R.L. Taylor tarafından [7] de bir kriter verilmiştir. Son zamanlarda [3] ve [5] de groupoid ve crossed module kavramları kullanılarak bu problemin çözümü ile ilgili daha genel bir kriter verilmiştir.

Bu problem uzayların irtibatlı olması halinde Rotman [6] da daha genel olarak ele alınmıştır. Burada $X$ basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve G de $X$ in $x_0$ noktasındaki $\pi_1(X, x_0)$ temel grubunun bir alt grubu olmak üzere $G$ ye karşılık gelen bir $p : \widetilde{X}_G \to X$ örtü fonksiyonu elde edilir. Burada eğer $G$ sadece birim elemandan oluşan bir alt grup ise $p : \widetilde{X}_G \to X$ evrensel bir örtüdür. Bunlara ilaveten eğer $X$ bir topolojik grup ise $p : \widetilde{X}_G \to X$ bir grup homomorfizmi olacak şekilde $\widetilde{X}_G$ üzerinde bir grup yapısı vardır. Bu grup ile birlikte $\widetilde{X}_G$ bir topolojik gruptur. Buradan hareketle bir $X$ topolojik grubunda grup işleminin herhangi bir $p : \widetilde{X} \to X$ örtü fonksiyonu ile $\widetilde{X}$ örtüsüne yükseldiği sonucu elde edilir.

Bu makalede benzer düşünceler diferensiyellenebilir manifoldlara uygulanarak bununla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Topolojik ve diferensiyellenebilme durumlarının her ikisini de içermesi bakımından $r \geq -1$ olmak üzere $C^r$ manifold ve $C^r$ fonksiyonu deyimleri kullanılmıştır. Burada $r = -1$ hali topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar durumunu, $r \geq 0$ hali ise diferensiyellenebilir manifoldlar ve diferensiyellenebilir fonksiyonlar durumunu temsil etmektedir. Hem Lie grup kavramını hem de topolojik grup kavramını temsil etmek amacı ile $C^r$ grubu kavramı kullanılmıştır. Bir $C^r$ fonksiyonu genelde düzgün “smooth” olarak adlandırılır.

## 2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Diferensiyellenebilir manifoldları ve topolojik uzayları birlikte $C^r$ ($r \geq -1$) manifoldu cinsinden ifade edebilmek için önce diferensiyellenebilir manifoldlar ve fonksiyonlar ile ilgili bazı kavramları tanıtalım Clark [2].

Bir $f : R^n \to R$ fonksiyonu ile bir $z \in R^n$ noktası verilsin. Eğer z nin açık bir komşuluğunda $f$ fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise $f$ fonksiyonuna $z$ noktasında $C^\infty$ sınıfındandır denir. İzdüşüm fonksiyonları kullanılarak bu kavram bir $f : R^n \to R^m$ fonksiyonuna genişletilebilir, yani her bir $\pi_i : R^m \to R$ $(1 \leq i \leq m)$ izdüşüm fonksiyonu için $\pi_i f : R^n \to R$ fonksiyonu $z$ noktasında $C^\infty$ sınıfından ise $f : R^n \to R^m$ ye $z$ de $C^\infty$ sınıfından bir fonksiyon denir. Her bir $z \in R^n$ noktasında $C^\infty$ sınıfından olan bir $f : R^n \to R^m$ fonksiyonuna $C^\infty$ sınıfındandır denir. Eğer bir $f:R^n \to R^m$ fonksiyonu ve bunun tersi $f^{-1}:R^n \to R^m$ $C^\infty$ sınıfından ise $f$ ye bir diffeomorfizm denir. Burada $f$ nin tanım cümlesinin $R^n$ nin tamamı olması gerekmez.

$M$ bir cümle olmak üzere değer cümlesi $R^n$ nin açık bir alt cümlesi olan bir $\varphi: M \to R^n$ birebir fonksiyona $n$-boyutlu bir *harita* denir. $\pi_i : R^n \to R$ $(1 \le i \le n)$ izdüşüm fonksiyonları kullanılarak böyle bir haritadan $x^i = \pi_i \varphi$ koordinat fonksiyonları tanımlanır. Buradan $\varphi = (\varphi^1,...,\varphi^n)$ ve $m \in U$ için

$$\varphi(m) = (\varphi^1(m),...,\varphi^n(m))$$

dır.

Tanım cümlelerinin sınıfı $M$ yi örtecek şekilde $n$-boyutlu haritaların bir sınıfı A olsun. Eğer A da tanım cümleleri kesişen herhangi iki $\varphi$ ve $\phi$ haritaları için $\phi\varphi^{-1}: R^n \to R^n$ koordinat değişim fonksiyonu bir diffeomorfizm ise A ya $M$ den $R^n$ içine bir $C^\infty$ *atlas* denir.

$M$ nin hiç bir $C^\infty$ atlası tarafından kapsanmayan bir $C^\infty$ atlasına *tamdır* denir.

$M$ cümlesinden $R^n$ ye tam olan bir atlasa $M$ üzerinde *n-boyutlu* bir $C^\infty$ *yapısı* denir. Burada $M$ nin her hangi bir $C^\infty$ atlasının tam olan sadece bir tek atlas tarafından kapsandığına dikkat edelim. Gerçekten $M$ nin $R^n$ içine herhangi bir A $C^\infty$ atlası verildiğinde A daki her bir $\varphi_i : M \to R^n$ haritası için $\varphi\varphi_i^{-1}: R^n \to R^n$ bir diffeomorfizm olacak şekildeki $\varphi: M \to R^n$ haritalarının sınıfı $M$ nin tam olan bir $C^\infty$ atlasıdır.

Bundan dolayı $M$ üzerindeki *n-boyutlu* bir $C^\infty$ yapısı seçilen $C^\infty$ atlasından bağımsızdır.

Bir $M$ cümlesi, üzerindeki $n$-boyutlu bir $C^\infty$ yapısı ile birlikte bir $n$-boyutlu *diferensiyellenebilir manifold* olarak adlandırılır. Bu $C^\infty$ yapısını tanımlayan tam atlasın bir haritasına $M$ manifoldunun bir *haritası* denir ve bu haritanın tanım cümlesine manifoldun *koordinat komşuluğu* denir.

$M$ ve $M'$ sırasıyla $n$ ve $n'$ boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olmak üzere bir $f::M \to M'$ fonksiyonu ile bir $m \in M$ noktası verilsin. $m$ ve $f(m)$ noktalarındaki sırasıyla $\varphi$ ve $\phi$ haritaları için

$$F = \phi f \varphi^{-1} : R^n \to R^{n'}$$

dönüşümüne $f$ nin bir *koordinat temsilcisi* denir. Eğer $F$ fonksiyonu $\varphi(m)$ de $C^\infty$ sınıfından ise $f$ fonksiyonuna $m$ de *diferensiyellenebilir* denir. Burada bu tanımın seçilen koordinat temsilcilerinden bağımsız olduğuna dikkat edelim. Tanım cümlesinin her noktasında diferensiyellenebilir olan bir $f::M \to M'$ fonksiyonuna *diferensiyellenebilir* denir. Eğer $f::M \to M'$ ve $g: M' \to N$ fonksiyonları diferensiyellenebilir ise $gf: M \to N$ de diferensiyellenebilirdir.

Bir $M$ diferensiyellenebilir manifoldunda koordinat komşuluklarının sınıfı $M$ üzerinde bir topoloji için bir baz oluşturur. Bu topolojiye $M$ üzerindeki *manifold topolojisi* denir. $M$ ve $M'$ manifoldları için bir $f: M \to M'$ fonksiyonu bir $m \in M$ noktasında diferensiyellenebilir ise aynı zamanda manifold topolojilerine göre bu noktada süreklidir.

$M$ bir grup olsun. Eğer

$$\circ: M \times M \to M, \quad (m,n) \mapsto m \circ n^{-1}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir olacak şekilde $M$ üzerinde bir diferensiyellenebilir manifold yapısı varsa $M$ ye bir *manifold grubu* veya *Lie grubu* denir.

## 3. $C^r$ örtü grupları

$M$ ve $\widetilde{M}$ birer $C^r$ manifold, $p:\widetilde{M}\to M$ bir $C^r$ fonksiyon ve $U$ da $M$ nin eğrisel irtibatlı açık bir cümlesi olsun. Eğer $p^{-1}(U)$ ters görüntüsünün her bir eğrisel irtibatlı $S_i$ bileşeni $\widetilde{M}$ nin açık bir alt cümlesi ve her bir $p_i : S_i \to U$ kısıtlanmış fonksiyonu bir diffeomorfizm ise $U \subseteq M$ ya *p tarafından örtülen* veya *kanonik* bir komşuluk denir.

Aşağıdaki Tanım 3.1 ve Tanım 3.2 de verilen kavramlar bu sahada iyi bilinen bir kavramdır ([1], [4]).

**Tanım 3.1:** $M$ bir $C^r$ manifold olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $(\widetilde{M}, p)$ ikilisine $M$ manifoldunun bir *$C^r$ örtü manifoldu* denir.

(i) $\widetilde{M}$ eğrisel irtibatlı bir $C^r$ manifoldu;

(ii) $p:\widetilde{M}\to M$ bir $C^r$ fonksiyon;

(iii) Her $m\in M$ noktası, $p$ tarafından örtülen bir $U=U_m$ açık komşuluğuna sahiptir.

Bu durumda $p:\widetilde{M}\to M$ bir *$C^r$ örtü fonksiyonu* veya *morfizmi* olarak adlandırılır.

$p:\widetilde{M}\to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu, $x_0\in M$ ve $p(\widetilde{x}_0)=x_0$ olacak şekilde bir $\widetilde{x}_0\in\widetilde{M}$ için $p$ tarafından üretilen grup homomorfizmi

$$p_* : \pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0)\to \pi_1(M,x_0)$$

olmak üzere $p_*(\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0))$ alt grubuna $p$ nin *karakteristik grubu* denir. Burada karakteristik grupları aynı olan örtülerin denk olduğuna dikkat edelim.

**Tanım 3.2:** $p:\widetilde{M}\to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu ve $q:N\to M$ bir $C^r$ fonksiyonu olsun. $q=p\widetilde{q}$ olacak şekildeki bir $\widetilde{q}:N\to\widetilde{M}$ $C^r$ fonksiyonuna $q$ nun ($p$ vasıtasıyla) bir *yükseltilmesi* denir.

Burada eğer $q:N\to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu ise $\widetilde{q}:N\to\widetilde{M}$ yükselmesinin de bir $C^r$ örtü fonksiyonu olduğuna dikkat edelim.

Bir $p:\widetilde{M}\to M$ $C^r$ örtü fonksiyonu verilsin. Eğer $p:\widetilde{M}\to M$ $C^r$ örtüsü $M$ nin her $C^r$ örtüsüne Tanım 3.2 deki anlamda yükseliyor ise $p:\widetilde{M}\to M$ ye *evrensel* bir $C^r$ örtü fonksiyonu ve $(\widetilde{M},p)$ ikilisine de evrensel bir $C^r$ örtüsü denir. Eğer $\widetilde{M}$ basit irtibatlı ise $p:\widetilde{M}\to M$ $C^r$ örtüsü evrensel bir örtüdür.

Örtü uzayları ile ilgili literatürde "Path Lifting Theorem" olarak bilinen aşağıdaki Teorem 3.3 bazı ispatlarımıza temel teşkil etmektedir ([1], [4]).

**Theorem 3.3:** $(\widetilde{X},p)$, $X$ in bir örtü uzayı, $x_0\in X$ ve $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$ olsun. Başlangıç noktası $x_0$ olan her hangi bir $\alpha: I\to X$ eğrisi için başlangıç noktası $\widetilde{x}_0$ ve $p(\widetilde{\alpha})=\alpha$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{\alpha}: I\to\widetilde{X}$ eğrisi vardır. Buna ilaveten başlangıç noktaları $x_0\in X$ olan $\alpha,\beta: I\to X$ eğrileri uç noktalara göre homotopiktir ancak ve bunların yükselmeleri $\widetilde{\alpha}$ ve $\widetilde{\beta}$ uç noktalara göre homotopiktir.

Aşağıdaki Önerme 3.4 ün ispatı bazı kaynaklarda mevcuttur ([1], [4]). Fakat Teorem 3.5 de kullanıldığı şekli ile ispatını vermekte yarar vardır.

**Önerme 3.4:** $p:\tilde{M}\to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu ve $N$ basit irtibatlı bir $C^r$ manifold olmak üzere $f:(N,n_0)\to(M,x_0)$ bir $C^r$ fonksiyonu olsun. Bu durumda bir $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ için $p\tilde{f}=f$ olacak şekilde bir tek $\tilde{f}:(N,n_0)\to(\tilde{M},\tilde{x}_0)$ $C^r$ fonksiyonu vardır.

**İspat:** İspatı sadece diferensiyellenebilir manifoldlar için vermek yeterlidir. Bir $n\in N$ noktası verilsin. $N$ nin basit irtibatlı dolayısıyla eğrisel irtibatlı olduğundan yararlanarak $n_0$ dan $n\in N$ ye bir $\alpha_n$ eğrisi seçelim. $f$ bir $C^r$ fonksiyonu olduğundan $f\alpha_n$ $M$ de $x_0$ dan $f(n)$ noktasına bir eğridir. Burada $p:\tilde{M}\to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu olduğundan Teorem 3.3 den başlangıç noktası $\tilde{x}_0\in\tilde{M}$ ve $p(\tilde{\alpha}_n)=f\alpha_n$ olacak şekilde $\tilde{M}$ de bir tek $\tilde{\alpha}_n$ eğrisi vardır. Bu şekilde elde edilen $\tilde{\alpha}_n$ eğrisinin bitiş noktası $\tilde{f}(n)$ olarak tanımlansın. Burada $\tilde{f}(n)$ nin $n_0$ dan $n\in N$ ye seçilen $\alpha_n$ eğrisinden bağımsız olduğuna dikkat edelim. Gerçekten eğer $n_0$ dan $n\in N$ ye başka bir $\beta_n$ eğrisi verilirse $N$ nin basit irtibatlı olmasından $\alpha_n$ ile $\beta_n$ eğrileri uç noktalara göre homotopik olacaktır. Buradan $f\alpha_n$ ile $f\beta_n$ de uç noktalara göre homotopiktir. Teorem 3.3 den bunların yükselmeleri olan $\tilde{M}$ deki $\tilde{\alpha}_n$ ve $\tilde{\beta}_n$ eğrileri de uç noktalara göre homotopik olacağından bu eğrilerin bitiş noktaları aynı olacaktır. Bu şekilde her bir $n\in N$ için $\tilde{f}(n)$ tanımlanarak bir $\tilde{f}:N\to\tilde{M}$ fonksiyonu elde edilmiş olur. Burada $\tilde{f}(n_0)=\tilde{x}_0$ olduğu açıktır.

Şimdi $\tilde{f}:(N,n_0)\to(\tilde{M},\tilde{x}_0)$ nin bir $C^r$ fonksiyonu olduğunu gösterelim. Bir $n\in N$ noktası verilsin. $\tilde{f}(n)$ nin bir koordinat komşuluğu $U$ olsun. $U'\subseteq p(U)$ olacak şekilde $p\tilde{f}(n)=f(n)$ nin bir $U'$ kanonik koordinat komşuluğunu seçelim. $\tilde{f}(n)$ nin $p^{-1}(U')$ deki eğrisel irtibatlı bileşeni $W$ ve $f(n)$ in $U''\subseteq p(W\cap U)$ olacak şekilde bir kanonik koordinat komşuluğu $U''$ olsun. Ayrıca $p$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu olduğundan $W\cap U$ ve $U''$ cümleleri diffeomorfiktir. $f:(N,n_0)\to(M,x_0)$ bir $C^r$ fonksiyonu olduğundan tanım cümlesi $V$ olan bir $\varphi:V\to R^n$ haritası ve tanım cümlesi $U''$ olan bir $\phi:U''\to R^m$ haritası için $\phi f\varphi^{-1}:R^n\to R^m$ diferensiyellenebilirdir. Yine $p:\tilde{M}\to M$ bir örtü fonksiyonu olduğundan tanım cümlesi $W\cap U$ olan $\theta:W\cap U\to R^{\tilde{m}}$ haritası ve tanım cümlesi $U''$ olan $\phi:U''\to R^m$ haritası için $\phi p\theta^{-1}:R^{\tilde{m}}\to R^m$ bir diffeomorfizmdir.

Şimdi

$$\tilde{f}:(N,n_0)\to(\tilde{M},\tilde{x}_0)$$

fonksiyonunun diferensiyellenebilir olması için

$$\theta\tilde{f}\varphi^{-1}:R^n\to R^{\tilde{m}}$$

nin diferensiyellenebilir olduğunu göstermek gerekir. Fakat

$$\theta\tilde{f}\varphi^{-1}=\theta p^{-1}p\tilde{f}\varphi^{-1}=\theta p^{-1}\phi^{-1}\phi\, p\tilde{f}\,\varphi^{-1}$$
$$=\theta p^{-1}\phi^{-1}\phi f\varphi^{-1}=(\phi p\theta^{-1})^{-1}\phi f\varphi^{-1}$$

olup burada $\left(\phi\, p\, \theta^{-1}\right)^{-1}$ ve $\phi\, f\, \varphi^{-1}$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan

$$\theta\, \tilde{f}\, \varphi^{-1}$$

de diferensiyellenebilirdir.

$f:(N,n_0)\rightarrow(M,x_0)$ nin yükselmesinin tekliğinin ispatı ise topolojik durumundaki ile aynıdır.

**Teorem 3.5:** $M$, birim elemanı $e\in M$ olan irtibatlı bir $C^r$ grup ve $(\tilde{M},p)$ de $M$ nin bir $C^r$ örtü manifoldu olsun. $p(\tilde{e})=e$ olacak şekilde bir $\tilde{e}\in\tilde{M}$ elemanı verilsin. Eğer $\tilde{M}$ basit irtibatlı ise $\tilde{M}$, birim elemanı $\tilde{e}\in\tilde{M}$ olan bir $C^r$ grubu ve $(\tilde{M},p)$ bir $C^r$ örtü morfizmi olacak şekilde $\tilde{M}$ üzerinde bir grup yapısı vardır.

**İspat:** $M$ bir $C^r$ grubu olduğundan $m:M\times M\rightarrow M$ grup işlemi bir $C^r$ fonksiyonudur. Burada $\tilde{M}$ basit irtibatlı bir $C^r$ manifoldu olduğundan $\tilde{M}\times\tilde{M}$ de basit irtibatlı bir $C^r$ manifoldudur. O halde Önerme 3.4 den $m(p\times p)=p\tilde{m}$ olacak şekilde bir

$$\tilde{m}:\left(\tilde{M}\times\tilde{M},(\tilde{e},\tilde{e})\right)\rightarrow\left(\tilde{M},\tilde{e}\right)$$

$C^r$ fonksiyonu mevcuttur. Grup aksiyomlarının sağlatılması için $\tilde{m}$ nin ayrıntılı tanımı gereklidir. Bundan dolayı Önerme 3.4 deki düşünce buraya uygulandığında böyle bir fonksiyon ayrıntılı olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)\in\tilde{M}\times\tilde{M}$ olsun. Burada $\tilde{M}$ nin eğrisel irtibatlı olmasından yararlanarak seçilen $\alpha_{\tilde{a}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{a}$, $\alpha_{\tilde{b}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{b}$ eğrilerinden elde edilen

$$\alpha_{\tilde{a}}\times\alpha_{\tilde{b}}:(\tilde{e},\tilde{e})\rightarrow\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)$$

de $\tilde{M}\times\tilde{M}$ de bir eğridir. $M$ bir $C^r$ grubu olduğundan

$$p(\alpha_{\tilde{a}})p(\alpha_{\tilde{b}}):e\rightarrow p(\tilde{a})p(\tilde{b})$$

de $M$ de bir eğridir. Bu eğrinin $\tilde{M}$ deki yükselmesinin bitiş noktası $\tilde{a}\tilde{b}$ olarak tanımlansın. Şimdi bu şekilde tanımlanan işleme göre $\tilde{M}$ nin bir grup olduğunu gösterelim.

(i) $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\in\tilde{M}$ olmak üzere $\tilde{M}$ de $\alpha_{\tilde{a}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{a}$, $\alpha_{\tilde{b}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{b}$ ve $\alpha_{\tilde{c}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{c}$ eğrileri verilsin. $\tilde{M}$ basit irtibatlı olduğundan $\alpha_{\tilde{a}}\alpha_{\tilde{b}}$ ile $\alpha_{\tilde{a}\tilde{b}}$ eğrile uç noktalara göre homotopiktir. Buradan hareketle $p(\alpha_{(\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c}})$ ve $p(\alpha_{\tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c})})$ eğrileri uç noktalara göre homotopiktir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
p(\alpha_{(\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c}}) &\cong p(\alpha_{(\tilde{a}\tilde{b})})p(\alpha_{\tilde{c}})\\
&\cong p(\alpha_{\tilde{a}}\alpha_{\tilde{b}})p(\alpha_{\tilde{c}})\\
&=(p(\alpha_{\tilde{a}})p(\alpha_{\tilde{b}}))p(\alpha_{\tilde{c}})\\
&=p(\alpha_{\tilde{a}})(p(\alpha_{\tilde{b}})(p(\alpha_{\tilde{c}}))\\
&=(p(\alpha_{\tilde{a}})p(\alpha_{\tilde{b}\tilde{c}})\\
&\cong p(\alpha_{\tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c})})
\end{aligned}$$

dir. Burada "$\cong$" eğrilerin uç noktalara göre homotopik olmasını temsil etmektedir. Bundan dolayı $p(\alpha_{(\tilde{a}\tilde{b})\tilde{c}})$ ve $p(\alpha_{\tilde{a}(\tilde{b}\tilde{c})})$ bu eğrilerin $\tilde{M}$ deki yükselmeleri de homotopiktir. O halde bu yükselmelerin bitiş noktaları aynı olacağından $\left(\tilde{a}\tilde{b}\right)\tilde{c}=\tilde{a}\left(\tilde{b}\tilde{c}\right)$ dır.

(ii) $\tilde{e}\in\tilde{M}$ birim elemandır. Gerçekten yine $\tilde{M}$ nin basit irtibatlı olmasından dolayı her hangi bir $\tilde{a}\in\tilde{M}$ için $\alpha_{\tilde{a}}\alpha_{\tilde{e}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{a}\tilde{e}$ ve $\alpha_{\tilde{a}\tilde{e}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{a}\tilde{e}$ eğrileri uç noktalara göre homotopik dir. Burada $\tilde{M}$ nin basit irtibatlılığından $\alpha_{\tilde{e}}:\tilde{e}\rightarrow\tilde{e}$ eğrisi birim eğriye homotopik olduğundan $\alpha_{\tilde{a}\tilde{e}} \cong \alpha_{\tilde{a}}$ dır. O halde

$$p(\alpha_{\tilde{a}\tilde{e}}) \cong p(\alpha_{\tilde{a}})$$

dır. Bu eğrilerin yükselmeleri de homotopik olacağından bitiş noktaları eşit, yani $\tilde{a}\tilde{e} = \tilde{a}$ dır. $\tilde{e}\tilde{a} = \tilde{a}$ olduğu dise benzer şekilde gösterilebilir.

(iii) $\tilde{M}$ basit irtibatlı olduğundan yine Önerme 3.4 den $M$ $C^r$ grubundaki $u : M \to M$, $a \mapsto a^{-1}$ ile tanımlanan ters fonksiyonunun $p\tilde{u} = up$ olacak şekilde bir $\tilde{u} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ yükselmesi vardır. Önerme 3.4 den $\tilde{u} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ bir $C^r$ fonksiyonudur. Bir $\tilde{a} \in \tilde{M}$ için $(p\tilde{u})(\tilde{a}) = (up)(\tilde{a})$ olduğundan $\tilde{u}(\tilde{a}) = \tilde{a}^{-1}$ yazılırsa

$$p(\tilde{a}^{-1}) = (p(\tilde{a}))^{-1}$$

olur. $\tilde{M}$ nin basit irtibatlılığından $\alpha_{\tilde{a}^{-1}}$ ile $(\alpha_{\tilde{a}})^{-1}$ eğrileri homotopik olup

$$\begin{aligned} p(\alpha_{\tilde{a}\tilde{a}^{-1}}) &\cong p(\alpha_{\tilde{a}})p(\alpha_{\tilde{a}^{-1}}) \\ &\cong p(\alpha_{\tilde{a}})(p(\alpha_{\tilde{a}}))^{-1} \\ &= 1_e \end{aligned}$$

yani $p(\alpha_{\tilde{a}\tilde{a}^{-1}})$ eğrisi $e$ noktasındaki birim eğriye homotopiktir. Buradan $\alpha_{\tilde{a}\tilde{a}^{-1}}$ eğrisi $\tilde{e}$ deki birim eğriye homotopik dolayısıyla bu eğrilerin bitiş noktaları aynı, yani $\tilde{a}\tilde{a}^{-1} = \tilde{e}$ dir. Benzer olarak $\tilde{a}^{-1}\tilde{a} = \tilde{e}$ dır. Bundan dolayı $\tilde{u} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ $C^r$ fonksiyonu $\tilde{M}$ nin ters fonksiyonudur.

O halde $\tilde{M}$ bir $C^r$ gruptur. Bunlara ilaveten

$$\tilde{m} : (\tilde{M} \times \tilde{M}, (\tilde{e}, \tilde{e})) \to (\tilde{M}, \tilde{e})$$

nin tanımından açık olarak

$$p(\tilde{a}\tilde{b}) = p(\tilde{a})p(\tilde{b})$$

,yani $p$ bir grup homomorfizmidir.

Şimdi Teorem 3.5 den daha genel olan bir sonucu verebilmek için önce Rotman [6] da topolojik uzaylar için verilen bir yapıyı $C^r$ manifoldları için ifade edelim.

$M$ bir $C^r$ manifoldu ve $x_0 \in M$ olmak üzere $\pi_1(M, x_0)$, $x_0$ noktasında temel grup ve $G$ de $\pi_1(M, x_0)$ temel grubunun bir alt grubu olsun. $M$ de başlangıç noktası $\alpha(0) = x_0$ olan tüm $\alpha$ eğrilerinin sınıfı $P(M, x_0)$ olsun. $P(M, x_0)$ üzerinde bir bağıntı aşağıdaki şekilde tanımlansın: $\alpha, \beta \in P(M, x_0)$ için $\alpha \sim_G \beta$ dır ancak ve ancak $\alpha(1) = \beta(1)$ ve $[\beta^{-1}\alpha] \in G$ dir. Bu şekilde tanımlanan bağıntı $P(M, x_0)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir $\alpha$ eğrisinin denklik sınıfı $\langle \alpha \rangle_G$ ve tüm bu denklik sınıflarının cümlesi $\tilde{M}_G$ ile gösterilsin. $e_0$, $x_0$ noktasında sabit eğri olmak üzere $\tilde{x}_0 = \langle e_0 \rangle_G \in \tilde{M}_G$ şeklinde tanımlansın.

$\alpha \in P(M, x_0)$ ve $\alpha(1)$ in açık bir komşuluğu $U$ olsun. $\lambda(0) = \alpha(1)$ olacak şekilde $U$ daki bir $\lambda$ eğrisi için $F = \lambda\alpha$ şeklinde tanımlı bir $F \in P(M, x_0)$ eğrisine $\alpha$ nın $U$ da bir *devamı* denir.

$\tilde{x} = \langle \alpha \rangle_G$ ve $U$ da $\alpha(1) = x$ in açık bir komşuluğu olmak üzere

$$\begin{aligned} &(U, \tilde{x}) = (U, \langle \alpha \rangle_G) \\ &= \{\langle F \rangle_G \in \tilde{M}_G : F,\ \alpha \text{ nin } U \text{ da bir devamı}\} \end{aligned}$$

olsun.

Aşağıdaki teoremlerin topolojik durumları Rotman [6] da verildiğinden burada sadece diferensiyellebilir manifoldlar için ispat etmek yeterlidir.

**Teorem 3.6:** *M* basit irtibatlı bir örtüye sahip olan irtibatlı bir $C^r$ manifoldu ise

$p:\widetilde{M}_G \to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu olacak şekilde $\widetilde{M}_G$ üzerinde bir $C^r$ manifold yapısı vardır. Buna ilaveten $p:\widetilde{M}_G \to M$ nin karakteristik grubu $G$ dir.

**İspat:** $M$ $C^r$ grubunun koordinat komşulukları $U \subset M$ alt cümlelerine karşılık gelen $(U,\widetilde{x})$ cümlelerini alalım. Bir $x \in M$ noktasının bir $U$ koordinat komşuluğu için $\widetilde{M}_G$ nin haritaları

$$\varphi' : (U,\widetilde{x}) \subseteq \widetilde{M}_G \xrightarrow{p} U \subseteq M \xrightarrow{\varphi} R^n$$
$$\langle \lambda\alpha \rangle_G \mapsto \lambda(1) \mapsto \varphi(\lambda(1))$$

şeklinde tanımlansın. $\varphi'$ nün bir harita olduğunu göstermek için birebir olduğunu gösterelim. Bunun için de $p$ nin birebir olduğunu göstermek yeterlidir.

$(U,\widetilde{x}) = \{\langle \lambda\ \alpha \rangle_G : \lambda\alpha,\ \alpha$ nin $U$ da bir devamı$\}$

olmak üzere $\langle \lambda\ \alpha \rangle_G, \langle \mu\ \alpha \rangle_G \in (U,\widetilde{x})$ için $\lambda(0)=\alpha(1)$, $\lambda(I) \subset U$ ve $\mu(0)=\alpha(1)$, $\mu(I)\subset U$ dır. O halde eğer

$$p(\langle \lambda\ \alpha \rangle_G) = p(\langle \mu\ \alpha \rangle_G)$$

ise $\lambda\ \alpha(1) = \lambda(1) = \mu(1) = \mu\ \alpha(1)$ dir. Ayrıca $\lambda^{-1}\mu$ , $U$ nun $x$ noktasında kapalı eğridir. $U$ nun seçiminden $\lambda^{-1}\mu$ $M$ de sabit eğriye homotopik (nullhomotopiktir) olduğundan $\alpha^{-1}\lambda^{-1}\mu\ \alpha$ de sabit eğriye homotopoktir. Bu da $[\alpha^{-1}\lambda^{-1}\mu\ \alpha] = 1$ yani $\pi_1(M,x_0)$ ın birim elemanına eşittir. Buradan

$$[\alpha^{-1}\lambda^{-1}\mu\ \alpha] \in G \text{ ve } \langle \lambda\ \alpha \rangle_G = \langle \mu\ \alpha \rangle_G$$

dir. O halde $p$ birebirdir. Diğer yandan $\varphi$ bir harita olduğundan birebirdir. O halde $\varphi'$ de birebir olan $\varphi$ ve $p$ fonksiyonlarının bileşkesi olarak birebirdir, yani $\varphi'$ bir haritadır.

$\widetilde{M}_G$ nin $(U,\widetilde{x})$ alt cümlelerinin sınıfını A ile gösterelim. Şimdi A nın bir atlas olduğunu gösterelim. A nın tanım cümleleri kesişen iki haritası $\varphi$, $\phi$ olmak üzere $\phi\ \varphi^{-1}$ in bir diffeomorfizm olduğunu biliyoruz. Burada

$$\phi\ p(\varphi\ p)^{-1} = \phi\ p\ p^{-1}\varphi^{-1} = \phi\varphi^{-1}$$

olup $\phi\ p(\varphi\ p)^{-1}$ de bir diffeomorfizmdir. Buradan A bir $C^\infty$ atlas ve $(U,\widetilde{x})$ lar $M$ nin $U$ haritalarına karşılık geldiğinden A tamdır . O halde $\widetilde{M}_G$ bir $C^r$ manifolddur. $\widetilde{M}_G$ üzerindeki $C^r$ manifold yapısına göre $p:(\widetilde{M}_G,\widetilde{x}_0) \to (M,x_0)$ ın bir $C^r$ örtü fonksiyonu ve $p$ nin karakteristik grubu $G$ olduğu topolojik durumdakine benzer olarak gösterilebilir..

**Teorem 3.7:** $M$, basit irtibatlı bir örtüye sahip olan bir $C^r$ grubu ve $p:\widetilde{M} \to M$ bir $C^r$ örtü fonksiyonu olsun. $M$ nin birim elemanı $e$ olmak üzere $p(\widetilde{e}) = e$ olacak şekilde bir $\widetilde{e} \in \widetilde{M}$ elemanı verilsin. Bu taktirde $\widetilde{M}$ bir $C^r$ grup ve $p$ bir $C^r$ fonksiyonu olacak şekilde $\widetilde{M}$ üzerinde bir grup yapısı tanımlanabilir.

**İspat:** $p:(\widetilde{M},\widetilde{e}) \to (M,e)$ $C^r$ örtüsünün karakteristik grubu $G$, yani $p_*(\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{e})) = G$ olsun. Diğer yandan Teorem 3.6 den $G$ ye karşılık gelen $p:\widetilde{M}_G \to M$ $C^r$ örtüsünün karakteristik grubu da $G$ olduğundan $p:\widetilde{M},\widetilde{e} \to M,e$ ve $p:\widetilde{M}_G \to M$ örtüleri denktir. Bundan dolayı $\widetilde{M}$ yerine $\widetilde{M}_G$ alınabilir.

$M$ $C^r$ grubunun grup işlemi

$$m: M\times M \to M,\ m(x,y) = x \circ y$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $P(M,e)$ üzerinde bir işlem aşağıdaki şekilde tanımlansın: $\alpha, \beta \in P(M,e)$ için $\alpha \circ \beta$ çarpımı

$$(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(t) \circ \beta(t), t \in I$$

ile verilsin. Burada $\alpha \circ \beta$ nın $C^r$ olduğuna dikkat edelim. Çünkü $\alpha \circ \beta$ fonksiyonu $\alpha \times \beta$ ile $m$ $C^r$ fonksiyonlarının bir bileşkesidir. Ayrıca $\alpha(0) = \beta(0) = e$ olduğundan

$$(\alpha \circ \beta)(0) = \alpha(0) \circ \beta(0) = e \circ e = e$$

olup buradan $\alpha \circ \beta \in P(M,e)$ dir.

Şimdi $\widetilde{M}_G$ üzerinde bir işlem

$$\widetilde{m} : \widetilde{M}_G \times \widetilde{M}_G \to \widetilde{M}_G,$$

$$(\langle \alpha \rangle_G, \langle \beta \rangle_G) \mapsto \langle \alpha \circ \beta \rangle_G$$

ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan işlemin iyi tanımlı olduğu ve bu işleme göre $\widetilde{M}_G$ nin bir topolojik grup olduğu Rotman [6] de gösterilmiştir. Burada $\widetilde{M}_G$ grubunun ters fonksiyonu

$$\widetilde{u} : \widetilde{M}_G \to \widetilde{M}_G, \ \langle \alpha \rangle_G \mapsto \langle \overline{\alpha} \rangle_G$$

şeklinde tanımlıdır. Teorem 3.5 de $\widetilde{M}_G$ nin bir $C^r$ manifoldu olduğu gösterildi. O halde $\widetilde{M}_G$ nin $\widetilde{m}$ ve $\widetilde{u}$ nin birer $C^r$ fonksiyonu olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\alpha(1), \beta(1)$ in komşulukları sırası ile $U,V$ ve $\alpha(1) \circ \beta(1)$ yi ihtiva eden bir komşuluğu $W$ olsun. $\langle \alpha \rangle_G, \langle \beta \rangle_G$ harita $\phi_1, \phi_2$ ve $\langle \alpha \circ \beta \rangle_G$ yi ihtiva eden bir harita $\delta$ olsun. Burada $m$ bir $C^r$ fonksiyonu olduğundan

$$F = \delta \widetilde{m} (\phi_1 \times \phi_2)^{-1}$$

$$: R^n \times R^n \to U \times V \to W \to R^n$$

bileşke fonksiyonu $C^r$ dır. Bundan dolayı $\widetilde{m}$ bir $C^r$ fonksiyonudur.

$\alpha(1)$ in bir açık komşuluğu $U$ olsun. $M$ bir $C^r$ manifold olduğundan $U^{-1} = \{x^{-1} : x \in U\}$ da $(\alpha(1))^{-1}$ in bir açık komşuluğudur. Buna göre $\langle \alpha \rangle_G$ yi içeren bir harita $\phi$ ve $\langle \alpha \rangle_G$ nın bu grubun işlemine göre tersi olan $\langle \overline{\alpha} \rangle_G$ yi içeren bir harita $\delta$ olsun.

$$H = \delta^{-1} \widetilde{u} \phi : R^n \to U \to U^{-1} \to R^n$$

$u$ $C^r$ olduğundan $C^r$ fonksiyondur. Buradan da $\widetilde{u}$ bir $C^r$ fonksiyondur.

## Kaynaklar


[1] Chevalley, C., Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946.

[2] Brickell, F., and Clark, R., S., Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company London, 13-33, 1976.

[3] Brown, R., and Mucuk, O., Covering Groups of non-connected Topological Groups Reviseted, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 115, 97-110, 1994.

[4] Massey, W., S., Algebraic Topology: An Introduction, Springer- Verlag New York İnc., 1990.

[5] Mucuk, O., Covering Groups of non-connected Topological Groups and Monodromy Groupoid of a Topological Groupoid, PhD Thesis, University of Wales, 1993.

[6] Rotman, Joseph J., An Introduction to Algebraic Topology, Springer- Verlag New York İnc., 1988.

[7] Taylor, R., L., Coverings of non- connected Topological Groups, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 753-768,1954.


*Geliş Tarihi: 05/03/2007* *Kabul Tarihi: 25/06/2007*