C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
4.2 (2008) 145 – 152 4.2 (2008) 145 – 152

TANJANT DEMET ÜZERİNDEKİ g^C SEMİ-RİEMANN METRİĞİ VE İNDEKSİ

İsmet AYHAN[1*], A. Ceylan ÇÖKEN[2], Erol YAŞAR[3]

[1] P.A.Ü., Eğitim Fakültesi, O.Ö.Fen ve Matematik Alanlar Bölümü, 20020 Denizli, TÜRKİYE
[2] S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260 Isparta, TÜRKİYE
[3] M.Ü., Ula Ali Koçman M.Y.O., 48600 Ula-Muğla, TÜRKİYE

Özet: Bu çalışmada, bir semi-Riemann manifoldun g^C semi-Riemann metrikli tanjant demeti üzerindeki bir tanjant vektörün causal karekteri ile bu manifold üzerine izdüşürülmüş tanjant vektörün causal karekterinin aynı olduğu gösterildi. Ayrıca diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki ν-indekse sahip bir semi-Riemann metriğin tam yükseltilmesi ile elde edilen g^C nin n-indekse sahip bir semi-Rieman metriği olduğu ispat edildi.

Anahtar Kelimeler: *Tanjant demet üzerindeki metrik, semi-Riemann metrik, indeks*

g^C SEMI-RIEMANN METRIC ON THE TANGENT BUNDLE AND ITS INDEX

Abstract: In this paper, it is shown that the causal character of a tangent vector on the tangent bundle with g^C semi-Riemann metric of a semi-Riemann manifold and the causal character of projected tangent vector on the semi-Riemann manifold with g semi-Riemann metric are the same. Moreover, it is proved that g^C, which is obtained in term of the complete lift of a semi-Riemann metric with ν-index on a differentiable manifold, is a semi-Riemannian metric with n-index.

Keywords: *Metric on the tangent bundle, the semi-Riemann metric, index*
MOS Clasification : 53C07, 53C50

---

[*] **Sorumlu yazar**

iayhan@pau.edu.tr

1. Giriş

Bir Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerindeki metrikler konusundaki çalışmalar 1950 li yılların sonlarında başladı. (Yano ve Ishihara, 1970), M manifoldu üzerindeki metrikleri dikey, yatay ve tam yükseltmeler yoluyla TM üzerine taşımıştır. Bu metriklere bağlı TM manifoldunun diferensiyel geometrisini incelemiştir. M üzerindeki bir Riemann veya semi-Riemann metriğin tam yükseltilmesiyle TM manifoldu üzerinde elde edilen metriğin semi-Riemann metrik olduğunu ispatlamadan tanımlamış ve bu metrik yardımıyla TM manifoldunun diferensiyel geometrisini incelemiştir. (Yano ve Ishihara, 1970) ve (Oproiu ve Papaghiuc, 1998), TM manifoldu üzerine tam yükseltilme ile taşınmış bu metriğin n-tanesi pozitif, n-tanesi de negatif işarete sahip bir semi-Riemann metrik olduğunu da yine ispatlamadan tanımlamışlardır.

Bu çalışmada, (TM, g^C) nin bir semi-Riemann manifoldu olduğu ispatlandı. Sonra bir semi-Riemann manifoldun g^C semi-Riemann metrikli tanjant demeti üzerindeki bir tanjant vektör, sırasıyla spacelike, null ve timelike bir vektör ise bu manifold üzerine izdüşürülmüş tanjant vektörün spacelike, null ve timelike vektör olduğu gösterildi. Ayrıca, M manifoldu üzerindeki bir Riemann metriğin tam yükseltilmesiyle TM üzerinde elde edilen metriğin n-tanesi pozitif, n-tanesi de negatif işarete sahip bir semi-Riemann metrik olduğu ispat edildi. Son olarak, M manifoldu üzerindeki ν -indekse sahip bir semi-Riemann metriğin tam yükseltilmesiyle TM üzerinde elde edilen metriğin n-tanesi pozitif, n-tanesi negatif işarete sahip bir semi-Riemann metrik olduğu ispat edildi.

Çalışma boyunca tüm diferensiyel geometrik objelerin C^∞ sınıftan diferensiyellenebilir olduğu ve tekrar eden indisler üzerinden toplam alındığı kabul edilmiştir.

2. Diferensiyellenebilir bir manifold ve onun tanjant demeti

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, TM onun tanjant demeti olmak üzere $p \in M$ nin U açık komşuluğu üzerindeki haritaya bağlı olarak M için bir lokal koordinat sistemi $(x) = \{x^1,...,x^n\}$ olsun. O zaman $\tau_M(Z_p) = p$ eşitliğini sağlayan $\tau_M : TM \to M$ kanonik izdüşüm olmak üzere $\tau_M{}^{-1}(U) = U^/$ TM deki $\tau_M{}^{-1}(\{p\})$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall Z_p \in U^/$ noktası için

$$(x,y)(Z_p) = (x^1(p),...,x^n(p), Z_p[x^1],...,Z_p[x^n]) \qquad (1)$$

şeklinde tanımlı (x,y) dönüşümü $U^/$ üzerinde lokal bir harita olup $(x^i, y^i; 1 \le i \le n)$ sistemi TM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir.

TM nin tanjant demeti TTM, TM üzerinde dikey dağılım olarak adlandırılan $VTM = Çek(\tau_M)_*$ integrallenebilen altvektör demetine sahiptir. TM üzerinde bir non-lineer koneksiyon HTM dağılımı ile tanımlı olup VTM nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma TM üzerinde yatay dağılım denir. Böylece

$$TTM = VTM \oplus HTM \qquad (2)$$

dir. Bu direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TM deki lokal çatı $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ dir. Buradaki

$$\delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i{}^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad (3)$$

$$N_i{}^j = y^k \Gamma_{ki}{}^j$$

HTM deki lokal çatı ve

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad (4)$$

VTM deki lokal çatıdır. Ayrıca $\{\delta y^i, dx^i; 1 \le i \le n\}$ lokal 1-formlarının sistemi,

$$\delta y^i = dy^i + N^i{}_j dx^j, \quad N^i{}_j = y^k \Gamma_{kj}{}^i \qquad (5)$$

olmak üzere $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ çatısının lokal dual çatısıdır (Oproiu ve Papaghiuc, 1998).

3. Semi-Riemann Manifold

Tanım 3.1 V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerindeki simetrik bilineer form

$$b : V \times V \to R \qquad (6)$$

IR-bilineer fonksiyonu olsun. V üzerinde tanımlı b simetrik bilineer formu

i) $v \neq 0$ iken $b(v,v) > 0 [< 0]$ pozitif [negatif] tanımlıdır,
ii) $\forall w \in V$ iken $b(v,w) = 0$ şartı sadece $v = 0$ için sağlanıyorsa nondejeneredir
denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.2 Bir V vektör uzayı üzerindeki b simetrik bilineer formunun ν indeksi, $b|_{(W \times W)}$ negatif tanımlı olacak şekilde verilen en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutudur (O'Neill 1983).

Tanım 3.3 Bir vektör uzayı üzerindeki nondejenere, simetrik, bilineer forma skalar çarpım denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.4 M diferensiyellenebilir bir manifold, $\forall p \in M$ ye T_pM tanjant uzayı üzerinde g_p skalar çarpımı atayan bir dönüşüm $g \in \Im^0_2(M)$ olsun. Ayrıca $\forall p \in M$ için g_p nin indeksi aynı ise M ye g metrik tensörü ile teçhiz edilmiş semi-Riemann manifoldu denir ve (M,g) ikilisi ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 3.5 (M,g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir v tanjant vektörüne

$$g(v,v) > 0 \; ya \quad da \quad v = 0 \qquad (7)$$

ise spacelike vektör,

$$g(v,v) = 0 \quad ve \quad v \neq 0 \qquad (8)$$

ise null vektör,

$$g(v,v) < 0 \qquad (9)$$

ise timelike vektör denir ve verilen bir tanjant vektörün düştüğü kategoriye onun causal karekteri denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.6 $\forall t \in [0,1]$ için $v \in S$ iken yine $tv \in S$ bir vektör uzayının alt kümesi olan S ye sıfır vektörü civarında yıldız şekillidir denir. İçinde sıfır vektörü barındıran T_pM vektör uzayının $\tilde{U}$ alt kümesi yıldız şekilli ve $\tilde{U}$

$$\exp_p : 0 \in \tilde{U} \subset T_pM \to p \in U \subset M \qquad (10)$$

dönüşümü yardımıyla U ya diffeomorfik ise U ya p nin normal komşuluğu denir.
$p \in M$ nin bir normal komşuluğu U ve T_pM için $< e_i, e_j >= \delta_{ij} e_j$ olacak şekilde ortonormal baz vektörleri $e_1,...,e_n$ olsun. $\xi = (x^1,...,x^n)$ normal koordinat sistemi, $\forall q \in U$ ya $e_1,...,e_n$ vektör koordinatlarına bağlı $\exp_p{}^{-1}(q) \in \tilde{U} \subset T_pM$ vektörünü atar. Yani

$$\exp_p{}^{-1}(q) = \sum x^i(q) e_i \qquad q \in U \qquad (11)$$

dir. Eğer $(f^1,...,f^n)$, $(e_1,...,e_n)$ in dual bazları ise

$$x^i o \exp_p = f^i \qquad (12)$$

olur (O'Neill 1983).

Teorem 3.1 $(x^1,...,x^n)$, $p \in M$ de normal koordinat sistemi ise $1 \le i, j, k \le n$

ve , $\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & 1 \le j \le \nu \\ 1 & \nu + 1 \le j \le n \end{cases}$ için

i) $g_{ij}(p) = \delta_{ij} \varepsilon_j \qquad (13)$

ve

ii) $\Gamma_{ij}{}^k(p) = 0 \qquad (14)$

dır (O'Neill 1983).

4. (TM, g^C) Semi-Riemann Manifoldu

Teorem 4.1 M, diferensiyellenebilir manifold ve g , M üzerinde tanımlı semi-Riemann metrik olsun. TM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TM,R)$ olmak üzere

$$\begin{array}{lccc} g^C : & \chi(TM) \times \chi(TM) & \to & C^\infty(TM,R) \\ & (\tilde{X},\tilde{Y}) & \to & g^C(\tilde{X},\tilde{Y}) \end{array} \qquad (15)$$

dönüşümü bir semi-Riemann metriktir.

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için g^C

$$\begin{aligned} g^C(X^V, Y^H) &= g^C(X^H, Y^V) = (g(X,Y))^V \\ g^C(X^H, Y^H) &= g^C(X^V, Y^V) = 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano, Ishihara, 1970). (TM, g^C) nin semi-Riemann manifoldu olması için g^C nin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

i) *2-Lineerlik*: $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanlarının TM ye yükseltilmişleri $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \chi(TM)$ olsun. $\alpha, \beta \in R$ için $\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y}$ vektör alanın (2) deki direkt toplam ayrışımı cinsinden ifadesi

$\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y} = (\alpha X + \beta Y)^V + (\alpha X + \beta Y)^H$

olup (16) dan

$$\begin{aligned} & g^C(\alpha\tilde{X} + \beta\tilde{Y}, \tilde{Z}) \\ &= g^C\left((\alpha X + \beta Y)^V + (\alpha X + \beta Y)^H, Z^V + Z^H\right) \\ &= \alpha g^C(\tilde{X}, \tilde{Z}) + \beta g^C(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \end{aligned}$$

g^C, 1. yere göre lineerdir. Benzer işlemler yardımıyla 2. yere göre de lineer olduğu görülebilir.

ii) *Simetriklik* : $\tilde{X}, \tilde{Y}$ (2) deki direkt toplam ayrışımı kullanılarak

$$g^C(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g^C(\tilde{Y}, \tilde{X})$$

olduğundan g^C metriği simetriktir.

iii) *Non-dejenerelik* : $\forall \tilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\tilde{Y} = Y^V$ için

$$\begin{aligned} g^C(\tilde{X}, Y^V) &= g^C(X^V + X^H, Y^V) \\ &= g^C(X^H, Y^V) = (g(X,Y))^V = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $Y^V = 0$ elde edilir. Benzer işlemler yardımıyla Y^H vektör alanı için de sıfır sonucu elde edilir. Böylece

$\forall \tilde{X} \in \chi(TM)$ için $g^C(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ iken $\tilde{Y} = 0$

olduğundan g^C metriği non-dejeneredir.

Buna göre (TM, g^C) bir semi-Riemann manifoldudur

Teorem 4.2 (M,g) semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı X_p , spacelike ya da timelike vektör ise (TM, g^C) semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı $(X^V)_Z$ veya $(X^H)_Z$ tanjant vektörü null vektördür.

İspat: (7), (8), (9) ve (16) eşitlikleri yardımıyla doğrudan görülür.

Teorem 4.3 (TM, g^C) semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir vektörün null olması için gerek ve yeter şart

i) TM üzerinde tanımlı bu vektörün TM manifoldunun düşey veya yatay tanjant uzayına ait bir vektör olmasıdır ya da,

ii) TM üzerinde tanımlı bu vektörün M manifoldu üzerindeki izdüşüm vektörünün null vektör olmasıdır.

İspat: **i)** g^C semi-Riemann metriğinin tanımından açıktır.

ii) $\forall X, Z \in T_pM$ için TM üzerindeki

$$\forall \tilde{X}_Z = (X^V)_Z + (X^H)_Z \in T_Z TM$$

vektörünün, M üzerine (Dombrowski 1962) nin tanımladığı π_* ve K dönüşümleri altındaki görüntüsü olan vektörler

$$\pi_*(\tilde{X}_Z) = X_p, \quad K(\tilde{X}_Z) = X_p$$

olup (16) eşitliğinden

$$g^C(\tilde{X}_Z, \tilde{X}_Z) = 2g(X_p, X_p) = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{X}_Z \neq 0 \Rightarrow X_p \neq 0$$

dır. Böylece X_p vektörü de null vektördür.

Teorem 4.4 (TM, g^C) semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir vektör spacelike bir vektör ise M manifoldu üzerindeki izdüşüm vektörü spacelike vektördür.

İspat: TM üzerindeki
$\forall \tilde{X}_Z = (X^V)_Z + (X^H)_Z \in T_Z TM, \quad \forall X, Z \in T_p M$
vektörü için

$$g^C(\tilde{X}_Z, \tilde{X}_Z) = 2g(X_p, X_p) > 0$$

ya da

$$\tilde{X}_Z = 0 \Rightarrow X_p = 0$$

olup X_p vektörü de spacelike vektördür.

Teorem 4.5 (TM, g^C) semi-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir vektör timelike bir vektör ise M manifoldu üzerindeki izdüşüm vektörü timelike vektördür.

İspat: TM üzerindeki
$\forall \tilde{X}_Z = (X^V)_Z + (X^H)_Z \in T_Z TM, \quad \forall X, Z \in T_p M$
vektörü için

$$g^C(\tilde{X}_Z, \tilde{X}_Z) = 2g(X_p, X_p) < 0$$

olup X_p vektörü de timelike vektördür.

5. g^C metriğinin indeksi

M manifoldu üzerinde g_{ij} bileşenlerine sahip g metrik tensörünün TM üzerinde tam yükseltilmişi g^C, uyarlanmış lokal koordinatlara göre

$$g^C = 2g_{ij}dx^i\delta y^j \qquad (17)$$

ve indirgenmiş lokal koordinatlara göre

$$g^C = y^k\partial_k g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}dx^i dy^j + g_{ji}dy^i dx^j \qquad (18)$$

bileşenlere sahiptir. Ayrıca

$$g^C = \begin{bmatrix} y^k\partial_k g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ji} & 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

şeklinde matris gösterimine sahiptir.

Teorem 5.1 (M, g) bir Riemann manifoldu ise (TM, g^C) indeksi n olan bir semi-Riemann metriğidir.

İspat: Eğer $x^1,...,x^n$, $p \in M$ noktası üzerinde bir normal koordinat sistemi ise

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \qquad (20)$$

dır. g^C metriğinin matris gösterimi

$$g^C = \begin{bmatrix} 0 & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. g^C matrisinin özdeğerleri

$$\left|\lambda I_{2n\times 2n} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & \lambda I_{n\times n} \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^n$$

eşitliği yardımıyla bulunabilir.

Bu eşitliğin doğruluğu n üzerinden tümevarım kullanarak gösterelim.
$n = 1$ için

$$\left|\lambda I_{2\times 2} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^1$$

doğru olduğu görülür. $n = k$ için

$$\left|\lambda I_{2k\times 2k} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^k$$

eşitliği doğru olsun. $n = k+1$ için

$$\left|\lambda I_{2(k+1)\times 2(k+1)} - g^C\right| =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda & ... & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & \lambda I_{k\times k} & & ... & -I_{k\times k} & \\ 0 & & & 0 & & \\ -1 & ... & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & -I_{k\times k} & & ... & \lambda I_{k\times k} & \\ 0 & & & 0 & & \end{bmatrix}_{2(k+1)\times 2(k+1)}$$

$$= \lambda\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & & & 0 & -I_{k\times k} & \\ & & & ... & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & ... & 0 & \lambda & ... & 0 \\ -I_{k\times k} & & & ... & \lambda I_{k\times k} & \\ & & & 0 & & \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{k+4}\begin{vmatrix} 0 & \lambda I_{k\times k} & & -I_{k\times k} & & \\ \ldots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ -1 & & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & -I_{k\times k} & & \lambda I_{k\times k} & & \\ 0 & & & & & \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(-1)^{2(k+1)}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+4}(-1)^{k+3}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix} + (-1)^{2k+7}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda^2-1)^k - (\lambda^2-1)^k$$

$$= (\lambda^2-1)^{k+1}$$

eşitliğin doğru olduğu görülür.

Böylece g^C matrisinin $n-$tane özdeğeri eşit ve -1, $n-$tane özdeğeri de eşit ve $+1$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\lambda = 1$ için

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, X_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$ için

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \ldots \\ 0 \\ -1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, X_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Özvektörlerin oluşturduğu P ve P^{-1} matrisleri

$$P = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

ve

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_{n\times n} & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $\tilde{g}^C = P^{-1} g^C P$ eşitliğinden

$$\tilde{g}^C = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & -I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu $\tilde{g}^C$, TM üzerindeki g^C metriğinin n indeksli bir semi-Riemann metriği olduğunun ispatıdır.

Teorem 5.2 (M, g) indeksi ν olan bir semi-Riemann metriği ise (TM, g^C) indeksi n olan bir semi-Riemann metriğidir.

İspat: M semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir p noktası için g_{ij} bileşenlerine sahip g metriği normal koordinatlar altında,

$$g_{ij}(p) = \left\{\begin{matrix} -1 \;; & 1 \le j = i \le \nu \\ 1 \;; & \nu + 1 \le j = i \le n \\ 0 & j \ne i \end{matrix}\right\} = I_n^\nu$$

olur. Böylece I_n^ν , $n \times n$ birim kare matriste köşegen üzerindeki ilk ν tane değeri -1, geri kalan $n-\nu$ tane değeri $+1$ olan bir matristir. Ayrıca $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ olur. Bu yüzden g^C

$$g^C = \begin{bmatrix} y^k \partial_k g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ji} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n^\nu \\ I_n^\nu & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde matris gösterimine sahiptir. g^C matrisinin özdeğerleri

$$\left|\lambda I_{2n\times 2n} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{n\times n} & -I_n^\nu \\ -I_n^\nu & \lambda I_{n\times n} \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)^n$$

eşitliği yardımıyla bulunabilir.

Bu eşitliğin doğruluğunu iki durum için ispatlayalım.

1. Durum:

g_{ij} matrisinde ν sabit ve değeri $\nu = 1$ ise $n = 2$ için,

$$\left|\lambda I_{4\times4} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2$$

olup doğrudur. $n = k$ için,

$$\left|\lambda I_{2k\times2k} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_k^1 \\ -I_k^1 & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^k$$

olsun.

$n = k + 1$ için,

$$\left|\lambda I_{2(k+1)\times2(k+1)} - g^C\right| =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda I_{k\times k} & & \dots & -I_{k\times k} & \\ 0 & & & 0 & & \\ 1 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & -I_{k\times k} & & \dots & \lambda I_{k\times k} & \\ 0 & & & 0 & & \end{bmatrix}_{2(k+1)\times2(k+1)}$$

$$= \lambda^2(-1)^{2(k+1)}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+3}(-1)^{k+2}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix} + (-1)^{2k+5}\begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_{k\times k} \\ -I_{k\times k} & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - 1)^k - (\lambda^2 - 1)^k$$

$$= (\lambda^2 - 1)^{k+1}$$

eşitliğin doğru olduğu görülür.

2. Durum:

g_{ij} matrisinde ν değişken ise,

$n = 3$ ve $\nu = 1$ için ,

$$\left|\lambda I_{6\times6} - g^C\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^3$$

$n = 3$ ve $\nu = 2$ için

$$\left|\lambda I_{6\times6} - g^C\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^3$$

olduğu görülür. $n = k$ ve $\nu = \eta$ için,

$$\left|\lambda I_{2k\times2k} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{k\times k} & -I_n^\eta \\ -I_n^\eta & \lambda I_{k\times k} \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^n$$

olsun.

$n = k$ ve $\nu = \eta + 1$ için,

$$\left|\lambda I_{2k\times2k} - g^C\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & & \dots & 0 & 1 & & \dots & 0 \\ \dots & \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} & & & \dots & & -I_{k-1}^{\eta-1} & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 1 & & \dots & 0 & \lambda & & \dots & 0 \\ \dots & & -I_{k-1}^{\eta-1} & & \dots & \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} & & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(-1)^{2k}\begin{vmatrix} \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} & -I_{k-1}^{\eta-1} \\ -I_{k-1}^{\eta-1} & \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+2}(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} & -I_{k-1}^{\eta-1} \\ -I_{k-1}^{\eta-1} & \lambda I_{(k-1)\times(k-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - 1)^{k-1} - (\lambda^2 - 1)^{k-1}$$

$$= (\lambda^2 - 1)^k$$

olur. Böylece,

$$\left|\lambda I_{2n\times2n} - g^C\right| = \begin{vmatrix} \lambda I_{n\times n} & -I_n^\nu \\ -I_n^\nu & \lambda I_{n\times n} \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^n$$

determinantının değeri ν indeksinden bağımsız olup g^C matrisinin n tane özdeğeri $+1$, n tane özdeğeri -1 olduğundan, $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler,

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., X_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, X_{\nu+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ -1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., X_n = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ -1 \end{bmatrix}$$

ve $\lambda = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler de,

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ -1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., X_{n+\nu} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, X_{n+\nu+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., X_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu öz vektörlerin oluşturduğu P matrisi

$$\begin{bmatrix} I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & -I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \\ I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & -I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \end{bmatrix}$$

ve P^{-1} matrisi

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \\ I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & -I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & -I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Böylece $\tilde{g}^C = P^{-1} g^C P$ eşitliğinden

$$\tilde{g}^C = \begin{bmatrix} -I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \\ 0_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} & I_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & 0_{(n-\nu)\times(n-\nu)} & -I_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu $\tilde{g}^C$, TM üzerindeki g^C metriğinin n indeksli bir semi-Riemann metriği olduğunun ispatıdır.

Kaynaklar

[1] Dombrowski, P., On the geometry of the tangent bundle, J. Reine Angew. Math., 210, 73-88, (1962).
[2] O'neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Pres. Inc., London, (1983).
[3] Oproiu, V., Papaghiuc, N., On the geometry of tangent bundle of a (pseudo)-Riemannian manifold, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi, Ser.Noua, Mat. 36, No.3, 265-276, (1998).
[4] Yano, K., Ishihara, S., Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Decker. Inc., New York, (1973).

Geliş Tarihi: 10/12/2007   *Kabul Tarihi: 04/03/2008*